سلسلۂ نصابات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

علم مثلث مستوی

حصہ اوّل

انٹرمیڈیٹ کے لئے بر بنائے ٹرگنومٹری لونی حصہ اول

مترجمہ

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے (پنجاب)

بی۔ اے، ایل ایل۔ بی (کمبرج)، رینگلر سنہ ۱۹۱۴ء فقرا ئیگزبشنر (پنجاب)

گورنمنٹ آف انڈیا سکالر کمبرج (ریاضیات) ایمینول اگزبشنر کمبرج (ریاضیات)

ایمینول فونڈیشن سکالر کمبرج (ریاضیات)

رکن سررشتۂ تالیف و ترجمہ

جامعۂ عثمانیہ

سنہ ۱۳۳۸ھ م سنہ ۱۳۲۹ف م سنہ ۱۹۱۹ع

مطبوعۂ دارالطبع سرکارِ عالی حیدرآباد دکن

مقدمہ

دنیا میں ہر قوم کی زندگی میں ایک ایسا زمانہ آتا ہے جب کہ اُس کے قوائے ذہنی میں انحطاط کے آثار نمودار ہونے لگتے ہیں، ایجاد و اختراع اور غور و فکر کا مادّہ تقریباً مفقود ہو جاتا ہے، تخیل کی پرواز اور نظر کی جولانی تنگ اور محدود ہو جاتی ہے، علم کا دار و مدار چند رسمی باتوں اور تقلید پر رہ جاتا ہے۔ اُس وقت قوم یا تو بیکار اور مردہ ہو جاتی ہے یا سنبھلنے کے لئے یہ لازم ہوتا ہے کہ وہ دوسری ترقی یافتہ اقوام کا اثر قبول کرے۔ تاریخ عالم کے ہر دَور میں اس کی شہادتیں موجود ہیں۔ خود ہمارے دیکھتے دیکھتے جاپان پر یہی گذری اور یہی حالت اب ہندوستان کی ہے۔

جس طرح کوئی شخص دوسرے بنی نوع انسان سے قطع تعلق کرکے تنہا اور الگ تھلگ نہیں رہ سکتا اور اگر رہے تو پنپ

نہیں سکتا اسی طرح یہ بھی ممکن نہیں کہ کوئی قوم دیگر اقوام عالم سے بے نیاز ہو کر پھولے پھلے اور ترقی پائے۔ جس طرح ہوا کے جھونکے اور ادنیٰ پرندوں اور کیڑے مکوڑوں کے اثر سے وہ مقامات تک ہرے بھرے رہتے ہیں جہاں انسان کی دسترس نہیں اسی طرح انسانوں اور قوموں کے اثر بھی ایک دوسرے تک اڑ کر پہنچتے ہیں۔ جس طرح یونان کا اثر روم اور دیگر اقوام یورپ پر پڑا جس طرح عرب نے عجم کو اور عجم نے عرب کو اپنا فیض پہنچایا، جس طرح اسلام نے یورپ میں تاریکی اور جہالت کو مٹا کر علم کی روشنی پہنچائی اسی طرح آج ہم بھی بہت سی باتوں میں مغرب کے محتاج ہیں۔ یہ قانون عالم ہے جو یوں ہی جاری رہا اور جاری رہیگا۔

"دئے سے دیا یوں ہی جلتا رہا ہے"

جب کسی قوم کی نوبت یہاں تک پہنچ جاتی ہے اور وہ آگے قدم بڑھانے کی سعی کرتی ہے تو ادبیات کے میدان میں پہلی منزل ترجمہ ہوتی ہے۔ اس لئے کہ جب قوم میں جدت اور اپج نہیں رہی تو ظاہر ہے کہ اس کی تصانیف معمولی، ادھوری، کم مایہ اور ادنیٰ ہونگی۔ اُس وقت قوم کی بڑی خدمت یہی ہے کہ ترجمہ کے ذریعہ سے دنیا کی اعلیٰ درجہ کی تصانیف اپنی زبان میں لائی جائیں۔ یہی ترجمے خیالات میں تغیر اور معلومات میں اضافہ کریں گے، جمود کو توڑیں گے اور قوم میں ایک نئی حرکت پیدا کریں گے اور پھر آخر یہی ترجمے تصنیف و تالیف

کے جدید اسلوب اور ڈھنگ سمجھائیں گے۔ ایسے وقت میں ترجمہ تصنیف سے زیادہ قابل قدر، زیادہ مفید اور زیادہ فیض رساں ہوتا ہے۔

اسی اصول کی بنا پر جب عثمانیہ یونیورسٹی کی تجویز پیش ہوئی تو ہز اکزالٹڈ ہائینس رستم دوراں ارسطوئے زماں سپہ سالار آصف جاہ مظفر الممالک نظام الملک نظام الدولہ نواب میر عثمان علیخان بہادر فتح جنگ جی۔سی۔اس۔آئی۔جی۔سی۔بی۔ای۔والی حیدرآباد دکن خلد اللہ ملکہ و سلطنتہ نے جن کی علمی قدردانی اور علمی سرپرستی اس زمانہ میں احیائے علوم کے حق میں آب حیات کا کام کر رہی ہے، بہ تقاضائے مصلحت و دوربینی سب سے اول سررشتۂ تالیف و ترجمہ کے قیام کی منظوری عطا فرمائی، جو نہ صرف یونیورسٹی کے لئے نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کریگا بلکہ ملک میں نشر و اشاعت علوم و فنون کا کام بھی انجام دیگا۔ اگرچہ اس سے قبل بھی یہ کام ہندوستان کے مختلف مقامات میں تھوڑا تھوڑا انجام پایا مثلاً فورٹ ولیم کالج کلکتہ میں زیر نگرانی ڈاکٹر گلکرسٹ، دہلی سوسائٹی میں، انجمن پنجاب میں زیر نگرانی ڈاکٹر لائٹنر و کرنل ہالرائڈ، علی گڑھ سائنٹفک انسٹیوٹ میں جس کی بنا سر سید احمد خاں مرحوم نے ڈالی۔ مگر یہ کوششیں سب وقتی اور عارضی تھیں۔ نہ انکے پاس کافی سرمایہ اور سامان تھا نہ انہیں یہ موقع حاصل تھا

اور نہ انہیں اعلیٰحضرت و اقدس جیسے علم پرور فرمانروا کی سرپرستی کا شرف حاصل تھا۔ یہ پہلا وقت ہے کہ اردو زبان کو علوم و فنون سے مالا مال کرنے کے لئے باقاعدہ اور مستقل کوشش کی گئی ہے۔ اور یہ پہلا وقت ہے کہ اردو زبان کو یہ رتبہ ملا ہے کہ وہ اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار پائی ہے۔ احیائے علوم کے لئے جو کام آگسٹس نے روم میں، خلافت عباسیہ میں ہارون الرشید و مامون الرشید نے ہسپانیہ میں عبدالرحمٰن ثالث نے، بکرماجیت و اکبر نے ہندوستان میں، الفرڈ نے انگلستان میں، پیٹر اعظم و کیتھرائن نے روس میں اور متسو ہٹو نے جاپان میں کیا، وہی فرمانروائے دولت آصفیہ نے اس ملک کے لئے کیا۔ اعلیٰحضرت و اقدس کا یہ کارنامہ ہندوستان کی علمی تاریخ میں ہمیشہ فخر و مباہات کے ساتھ ذکر کیا جائیگا۔

منجملہ اُن اسباب کے جو قومی ترقی کا موجب ہوتے ہیں ایک بڑا سبب زبان کی تکمیل ہے۔ جس قدر جو قوم زیادہ ترقی یافتہ ہے اُسی قدر اُس کی زبان وسیع اور اس میں نازک خیالات اور علمی مطالب کے ادا کرنے کی زیادہ صلاحیت ہوتی ہے، اور جس قدر جس قوم کی زبان محدود ہوتی ہے اُسی قدر تہذیب و شایستگی بلکہ انسانیت میں اس کا درجہ کم ہوتا ہے۔ چنانچہ وحشی اقوام میں الفاظ کا ذخیرہ بہت ہی کم پایا گیا ہے۔ علمائے فلسفہ و علم اللسان نے یہ ثابت کیا ہے کہ زبان، خیال اور

خیال، زبان ہے اور ایک مدت کے بعد اس نتیجے پر پہنچے ہیں
کہ انسانی دماغ کے صحیح تاریخی ارتقا کا علم، زبان کی تاریخ
کے مطالعہ سے حاصل ہو سکتا ہے۔ الفاظ ہمیں سوچنے میں
ویسی ہی مدد دیتے ہیں جیسی آنکھیں دیکھنے میں۔ اس لئے
زبان کی ترقی درحقیقت عقل کی ترقی ہے۔

علم ادب اسی قدر وسیع ہے جس قدر حیاتِ انسانی۔ اور
اس کا اثر زندگی کے ہر شعبہ پر پڑتا ہے۔ وہ نہ صرف انسان
کی ذہنی، معاشرتی، سیاسی ترقی میں مدد دیتا، اور نظر میں وسعت،
دماغ میں روشنی، دلوں میں حرکت اور خیالات میں تغیر پیدا کرتا
ہے بلکہ قوموں کے بنانے میں ایک قوی آلہ ہے۔ قومیت کے
لئے ہم خیالی شرط ہے اور ہم خیالی کے لئے ہم زبانی لازم
گویا یک زبانی قومیت کا شیرازہ ہے جو اسے منتشر ہونے سے
بچائے رکھتا ہے۔ ایک زمانہ تھا جب کہ مسلمان اقطاعِ عالم میں
پھیلے ہوئے تھے لیکن اُن کے علم ادب اور زبان نے انہیں
ہر جگہ ایک کر رکھا تھا۔ اس زمانے میں انگریز ایک دنیا پر
چھائے ہوئے ہیں لیکن باوجود بُعدِ مسافت و اختلافِ حالات
یک زبانی کی بدولت قومیت کے ایک سلسلے میں منسلک
ہیں، زبان میں جادو کا سا اثر ہے اور صرف افراد ہی پر
نہیں بلکہ اقوام پر بھی اُس کا وہی تسلط ہے۔

یہی وجہ ہے کہ تعلیم کا صحیح اور فطرتی ذریعہ اپنی ہی زبان
ہو سکتی ہے۔ اس امر کو اعلیٰحضرت اقدس نے

پہچانا اور جامعۂ عثمانیہ کی بنیاد ڈالی۔ جامعۂ عثمانیہ ہندوستان میں پہلی یونیورسٹی ہے جس میں ابتدا سے انتہا تک ذریعۂ تعلیم ایک دیسی زبان ہوگا۔ اور یہ زبان اردو ہوگی۔ ایک ایسے ملک میں جہاں "بھانت بھانت کی بولیاں" بولی جاتی ہیں، جہاں ہر صوبہ ایک نیا عالم ہے، صرف اردو ہی ایک عام اور مشترک زبان ہو سکتی ہے۔ یہ اہل ہند کے میل جول سے پیدا ہوئی اور اب بھی یہی اس فرض کو انجام دیگی۔ یہ اس کے خمیر اور وضع و ترکیب میں ہے۔ اس لئے یہی تعلیم اور تبادلہ خیالات کا واسطہ بن سکتی اور قومی زبان کا دعوے کر سکتی ہے۔

جب تعلیم کا ذریعہ اردو قرار دیا گیا تو یہ کھلا اعتراض تھا کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کتابوں کا ذخیرہ کہاں ہے اور ساتھ ہی یہ بھی کہا جاتا تھا کہ اردو میں یہ صلاحیت ہی نہیں کہ اس میں علوم و فنون کی اعلیٰ تعلیم ہو سکے۔ یہ صحیح ہے کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کافی ذخیرہ نہیں۔ اور اردو ہی پر کیا منحصر ہے، ہندوستان کی کسی زبان میں بھی نہیں۔ یہ طلب و رسد کا عام مسئلہ ہے۔ جب مانگ ہی نہ تھی تو رسد کہاں سے آتی۔ جب ضرورت ہی نہ تھی تو کتابیں کیونکر مہیا ہوتیں۔ ہماری اعلیٰ تعلیم غیر زبان میں ہوتی تھی، تو علوم و فنون کا ذخیرہ ہماری زبان میں کہاں سے آتا۔ ضرورت ایجاد کی ماں ہے۔ اب ضرورت محسوس ہوئی ہے تو کتابیں بھی

مہیا ہو جائیں گی۔ اسی کمی کو پورا کرنے اور اسی ضرورت کو رفع کرنے کے لئے سررشتۂ تالیف و ترجمہ قائم کیا گیا۔ یہ صحیح نہیں ہے کہ اردو زبان میں اس کی صلاحیت نہیں۔ اس کے لئے کسی دلیل و برہان کی ضرورت نہیں۔ سررشتۂ تالیف و ترجمہ کا وجود اس کا شافی جواب ہے۔ یہ سررشتہ یہی کام کر رہا ہے۔ کتابیں تالیف و ترجمہ ہو رہی ہیں اور چند روز میں عثمانیہ یونیورسٹی کالج کے طالب علموں کے ہاتھوں میں ہونگی اور رفتہ رفتہ عام شائقینِ علم تک پہنچ جائیں گی۔

لیکن اس میں سب سے کٹھن اور سنگلاخ مرحلہ وضع اصطلاحات کا تھا۔ اس میں بہت کچھ اختلاف اور بحث کی گنجائش ہے۔ اس بارے میں ایک مدت کے تجربہ اور کامل غور و فکر اور مشورہ کے بعد میری یہ رائے قرار پائی ہے کہ تنہا نہ تو ماہرِ علم صحیح طور سے اصطلاحات وضع کر سکتا ہے اور نہ ماہرِ لسان۔ ایک کو دوسرے کی ضرورت ہے۔ اور ایک کی کمی دوسرا پورا کرتا ہے۔ اس لئے اس اہم کام کو صحیح طور سے انجام دینے کے لئے یہ ضروری ہے کہ دونوں یک جا جمع کئے جائیں تاکہ وہ ایک دوسرے کے مشورہ اور مدد سے ایسی اصطلاحیں بنائیں جو نہ اہل علم کو ناگوار ہوں نہ اہل زبان کو۔ چنانچہ اسی اصول پر ہم نے وضع اصطلاحات کے لئے ایک ایسی مجلس بنائی جس میں دونوں جماعتوں کے اصحاب شریک ہیں۔ علاوہ اِن کے

ہم نے اُن اہلِ علم سے بھی مشورہ کیا جو اس کی خاص اہلیت رکھتے ہیں اور بُعدِ مسافت کی وجہ سے ہماری مجلس میں شریک نہیں ہو سکتے ۔ اس میں شک نہیں کہ بعض الفاظ غیر مانوس معلوم ہوں گے اور اہلِ زبان انہیں دیکھ کر ناک بھوں چڑھائیں گے ۔ لیکن اس سے گزیر نہیں ۔ ہمیں بعض ایسے علوم سے واسطہ ہے جن کی ہوا تک ہماری زبان کو نہیں لگی۔ ایسی صورت میں سوائے اس کے چارہ نہیں کہ جب ہماری زبان کے موجودہ الفاظ خاص خاص مفہوم کے ادا کرنے سے قاصر ہوں تو ہم جدید الفاظ وضع کریں ۔ لیکن اس کے یہ معنی نہیں ہیں کہ ہم نے محض ٹالنے کے لئے زبردستی الفاظ گھڑ کر رکھ دئے ہیں بلکہ جس نہج پر اب تک الفاظ بنتے چلے آئے ہیں اور جن اصولِ ترکیب و اشتقاق پر اب تک ہماری زبان کاربند رہی ہے، اس کی پوری پابندی ہم نے کی ہے ۔ ہم نے اُس وقت تک کسی لفظ کے بنانے کی جرأت نہیں کی جب تک اُسی قسم کی متعدد مثالیں ہمارے پیشِ نظر نہ رہی ہوں ۔ ہماری رائے میں جدید الفاظ کے وضع کرنے کی اس سے بہتر اور صحیح کوئی صورت نہیں۔ اب اگر کوئی لفظ غیر مانوس یا اجنبی معلوم ہو تو اس میں ہمارا قصور نہیں ۔ جو زبان زیادہ تر شعر و شاعری اور قصص تک محدود ہو، وہاں ایسا ہونا کچھ تعجب کی بات نہیں ۔ جس ملک سے ایجاد و اختراع کا مادّہ سلب ہو گیا ہو جہاں لوگ نئی چیزوں کے بنانے اور دیکھنے کے عادی نہ ہوں، وہاں جدید الفاظ کا

غیر مانوس اور اجنبی معلوم ہونا موجب حیرت نہیں۔ الفاظ کی حالت بھی انسانوں کی سی ہے۔ اجنبی شخص بھی رفتہ رفتہ مانوس ہو جاتے ہیں۔ اول اول الفاظ کا بھی یہی حال ہے۔ استعمال آہستہ آہستہ غیر مانوس کو مانوس کر دیتا ہے اور صحت و غیر صحت کا فیصلہ زمانہ کے ہاتھ میں ہوتا ہے۔ ہمارا فرض یہ ہے کہ لفظ تجویز کرتے وقت ہر پہلو پر کامل غور کرلیں، آئندہ چل کر اگر وہ استعمال اور زمانہ کی کسوٹی پر پورا اترا تو خود ٹکسالی ہو جائیگا اور اپنی جگہ آپ پیدا کرلیگا۔ علاوہ اس کے جو الفاظ پیش کئے گئے ہیں وہ الہامی نہیں کہ جن میں ردّ و بدل نہ ہوسکے بلکہ فرہنگِ اصطلاحاتِ عثمانیہ جو زیر ترتیب ہے پہلے اس کا مسودہ اہل علم کی خدمت میں پیش کیا جائے گا اور جہاں تک ممکن ہوگا اس کی اصلاح میں کوئی دقیقہ فروگذاشت نہیں کیا جائے گا۔

لیکن ہماری مشکلات صرف اصطلاحاتِ علمیہ تک ہی محدود نہیں ہیں۔ ہمیں ایک ایسی زبان سے ترجمہ کرنا پڑتا ہے جو ہمارے لئے بالکل اجنبی ہے، اس میں اور ہماری زبان میں کسی قسم کا کوئی رشتہ یا تعلق نہیں۔ اس کا طرز بیان، ادائے مطلب کے اسلوب، محاورات وغیرہ بالکل جدا ہیں۔ جو الفاظ اور جملے انگریزی زبان میں بالکل معمولی اور روزمرہ کے استعمال میں آتے ہیں، اُن کا ترجمہ جب ہم اپنی زبان میں کرنے بیٹھتے ہیں تو سخت دشواری پیش آتی ہے۔ ان تمام دشواریوں پر

غالب آنے کے لئے مترجم کو کیسا کچھ خونِ جگر کھاتا نہیں پڑتا۔ ترجمہ کا کام، جیسا کہ عموماً خیال کیا جاتا ہے، کچھ آسان کام نہیں ہے۔ بہت خاک چھاننی پڑتی ہے تب کہیں گوہر مقصود ہاتھ آتا ہے۔

اس سررشتہ کا کام صرف یہی نہ ہوگا (اگرچہ یہ اس کا فرضِ اولین ہے) کہ وہ نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کرے، بلکہ اس کے علاوہ وہ ہر علم پر متعدد اور کثرت سے کتابیں تالیف و ترجمہ کرائے گا، تاکہ لوگوں میں علم کا شوق بڑھے، ملک میں روشنی پھیلے، خیالات و قلوب پر اثر پیدا ہو، جہالت کا استیصال ہو۔ جہالت کے معنی اب لاعلمی ہی کے نہیں بلکہ اس میں افلاس، کم ہمتی، تنگ دلی، کوتہ نظری، بے غیرتی، بد اخلاقی سب کچھ آجاتا ہے۔ جہالت کا مقابلہ کرکے اسے پس پا کرنا سب سے بڑا کام ہے۔ انسانی دماغ کی ترقی علم کی ترقی ہے۔ انسانی ترقی کی تاریخ علم کی اشاعت و ترقی کی تاریخ ہے۔ ابتدائے آفرینش سے اس وقت تک انسان نے جو کچھ کیا ہے، اگر اس پر ایک وسیع نظر ڈالی جائے تو نتیجہ یہ نکلے گا کہ جوں جوں علم میں اضافہ ہوتا گیا، پچھلی غلطیوں کی صحت ہوتی گئی، تاریکی گھٹتی گئی، روشنی بڑھتی گئی، انسان میدانِ ترقی میں قدم آگے بڑھاتا گیا۔ اسی مقدس فرض کے ادا کرنے کے لئے یہ سررشتہ قائم کیا گیا ہے اور وہ اپنی بساط کے موافق اس کے انجام دینے میں کوتاہی نہ کرے گا۔

لیکن غلطی، تحقیق و جستجو کی گھات میں لگی رہتی ہے۔ ادب کا

کمال ذوق سلیم ہر ایک کو نصیب نہیں ہوتا۔ بڑے بڑے نقاد اور مبصر فاش غلطیاں کر جاتے ہیں۔ لیکن اس سے ان کے کام پر حرف نہیں آتا۔ غلطی ترقی کے مانع نہیں ہے، بلکہ وہ صحت کی طرف رہنمائی کرتی ہے۔ پچھلوں کی بھول چوک آنے والے مسافر کو رستہ بھٹکنے سے بچا دیتی ہے۔ ایک جاپانی ماہر تعلیم (بیرن کی کوچی) نے اپنے ملک کا تعلیمی حال لکھتے ہوئے اس صحیح کیفیت کا ذکر کیا ہے جو ہونہار اور ترقی کرنے والے افراد اور اقوام پر گزرتی ہے۔

"ہم نے بہت سے تجربے کئے اور بہت سی ناکامیاں اور غلطیاں ہوئیں، لیکن ہم نے ان سے نئے سبق سیکھے اور فائدہ اٹھایا۔ رفتہ رفتہ ہمیں اپنے ملک کی تعلیمی ضروریات اور امکانات کا صحیح اور بہتر علم ہوتا گیا اور ایسے تعلیمی طریقے معلوم ہوتے گئے جو ہمارے اہل وطن کے لئے زیادہ موزوں تھے۔ ابھی بہت سے ایسے مسائل ہیں جو ہمیں حل کرنے ہیں، بہت سی ایسی اصلاحیں ہیں جو ہمیں عمل میں لانی ہیں، ہم نے اب تک کوشش کی اور ابھی کوشش کر رہے ہیں اور مختلف طریقوں کی برائیاں اور بھلائیاں دریافت کرنے کے درپے ہیں، تاکہ اپنے ملک کے فائدے کے لئے اچھی باتوں کو اختیار کریں اور رواج دیں اور برائیوں سے بچیں۔"

اس لئے جو حضرات ہمارے کام پر تنقیدی نظر ڈالیں انہیں وقت کی تنگی، کام کا ہجوم اور اس کی اہمیت اور ہماری مشکلات پیش نظر رکھنی چاہئیں۔ یہ پہلی سعی ہے اور پہلی سعی میں کچھ نہ کچھ خامیاں

ضرور رہ جاتی ہیں، لیکن آگے چل کر یہی خامیاں ہماری رہنما بنیں گی اور پختگی اور اصلاح تک پہنچائیں گی۔ یہ نقش اول ہے نقش ثانی اس سے بہتر ہوگا۔ ضرورت کا احساس علم کا شوق، حقیقت کی لگن، صحت کی ٹوہ، جد و جہد کی رسائی خود بخود ترقی کے مدارج طے کرلے گی۔

جاپانی بڑے فخر سے یہ کہتے ہیں کہ ہم نے تیس چالیس سال کے عرصے میں وہ کچھ کر دکھایا جس کے انجام دینے میں یورپ کو اتنی ہی صدیاں صرف کرنی پڑیں۔ کیا کوئی دن ایسا آئے گا کہ ہم بھی یہ کہنے کے قابل ہوں گے؟ ہم نے پہلی شرط پوری کر دی ہے یعنی بیجا قیود سے آزاد ہو کر اپنی زبان کو اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار دیا ہے۔ لوگ ابھی ہمارے کام کو تذبذب کی نگاہ سے دیکھ رہے ہیں اور ہماری زبان کی قابلیت کی طرف مشتبہ نظریں ڈال رہے ہیں۔ لیکن وہ دن آنے والا ہے کہ اس ذرّے کا بھی ستارہ چمکے گا، یہ زبان علم و حکمت سے مالا مال ہوگی اور اعلیٰحضرت واقدس کی نظر کیمیا اثر کی بدولت یہ دنیا کی مہذب و شایستہ زبانوں کی ہمسری کا دعوے کرے گی۔ اگرچہ اس وقت ہماری سعی اور محنت حقیر معلوم ہوگی، مگر یہی شامِ غربت صبح وطن کی آمد کی خبر دے رہی ہے، یہی شب بیداریاں روزِ روشن کا جلوہ دکھائیں گی، اور یہی مشقت اُس قصر رفیع الشان کی بنیاد ہوگی جو آئندہ تعمیر ہونے والا ہے۔ اس وقت ہمارا کام صبر و استقلال سے میدان صاف کرنا،

ڈالنا اور نیو کھودنا ہے، اور فرہاد وار شیریں حکمت کی خاطر
پہاڑوں کو کھود کھود کر جوئے علم لانے کی سعی کرنا ہے۔
م نہ ہوں گے مگر ایک زمانہ آئیگا جب کہ اس میں علم و
کے دریا بہیں گے اور ادبیات کی افتادہ زمین سرسبز و شاداب
ے گی۔

میں میں سررشتہ کے مترجمین کا شکریہ ادا کرتا ہوں جنہوں نے
س کو بڑی مستعدی اور شوق سے انجام دیا۔ نیز میں ارکانِ
ضع اصطلاحات کا شکر گزار ہوں کہ ان کے مفید مشورے
ن کی مدد سے یہ مشکل کام بخوبی انجام پا رہا ہے۔ لیکن خصوصیت
قہ یہ سررشتہ جناب مسٹر محمد اکبر حیدری بی۔ اے معتمد عدالت
ت و کوتوالی و امور عامہ سرکار عالی کا ممنون ہے جنہیں ابتدا
م و انتظام جامعۂ عثمانیہ میں خاص انہاک رہا ہے۔ اور
کی توجہ اور امداد ہمارے شریک حال نہ ہوتی تو یہ عظیم الشان
رت پذیر نہ ہوتا۔ میں سید راس مسعود صاحب بی۔ اے
) آئی۔ ای۔ ایس۔ ناظم تعلیمات سرکار عالی کا بھی شکریہ ادا
ں کہ ان کی توجہ اور عنایت ہمارے حال پر مبذول رہی
رت کے وقت ہمیشہ بلا تکلف خوشی کے ساتھ ہمیں مدد دی۔

عبد الحق

ناظم سررشتۂ تالیف و ترجمہ (عثمانیہ یونیورسٹی)

مولوی عبدالحق صاحب بی۔اے۔۔۔۔۔۔۔۔ناظم۔
قاضی محمد حسین صاحب۔ایم۔اے۔رینگلر۔۔۔۔مترجم ریاضیات
چودھری برکت علی صاحب بی۔یس۔سی۔۔۔۔۔مترجم سائینس
مولوی سید ہاشمی صاحب۔۔۔۔۔۔۔۔مترجم تاریخ۔
مولوی محمد الیاس صاحب برنی ایم۔اے۔۔۔۔مترجم معاشیات
قاضی تلمذ حسین صاحب یم۔اے۔۔۔۔۔۔مترجم سیاسیات
مولوی ظفر علی خاں صاحب بی۔اے۔۔۔۔۔مترجم تاریخ۔
مولوی عبدالماجد صاحب بی۔اے۔۔۔۔۔۔مترجم فلسفہ و منطق
مولوی عبدالحلیم صاحب شرر۔۔۔۔۔۔۔مولف تاریخ اسلام
مولوی سید علی رضا صاحب بی۔اے۔۔۔۔۔۔مترجم قانون۔
مولوی عبداللہ العمادی صاحب۔۔۔۔۔۔مترجم کتب عربی

علاوہ ان مذکورۂ بالا مترجمین کے مولوی حاجی صفی الدین صاحب ترجمہ شدہ کتابوں کو مذہبی نقطۂ نظر سے دیکھنے کے لئے اور نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طبا طبائی) ترجموں پر نظر ثانی کرنے کے لئے مقرر فرمائے گئے ہیں۔

مولوی مرزا مہدی خاں صاحب کوکب وظیفہ یاب سرکار عالی (سابق ناظم مردم شماری)

مولوی حمید الدین صاحب بی۔اے صدر دار العلوم

نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طباطبائی)

مولوی وحید الدین صاحب سلیم

مولوی عبد الحق بی۔اے ناظم سررشتہ تالیف و ترجمہ

علاوہ ان مستقل ارکان کے، مترجمین سررشتہ تالیف و ترجمہ نیز دوسرے اصحاب سے بلحاظ اُنکے فن کے مشورہ کیا گیا۔ مثلاً

خان فضل محمد خانصاحب ایم۔اے رنگلر (پرنسپل سٹی ہائی اسکول حیدرآباد)

مولوی عبد الواسع صاحب (پروفیسر دار العلوم حیدرآباد)

پروفیسر عبد الرحمن صاحب بی۔ایس۔سی (نظام کالج)

مرزا محمد ہادی صاحب۔بی۔اے (پروفیسر کرسچن کالج لکھنؤ)

مولوی سلیمان صاحب ندوی

سید راس مسعود صاحب بی۔اے (ناظم تعلیمات حیدرآباد) وغیرہ

فہرست مضامین

حصۂ اول

علم مثلث کے مشہور ضابطے

حصّہ اوّل

۱- دائرے کا محیط = ۲ ח ر (دفعہ ۱۴)

اس میں ח عبرانی حرف "حیت" ہے

ח = ۳٫۱۴۱۵۹..... [اس کے تقرب $\frac{۲۲}{۷}$ اور $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$] (دفعہ ۱۵)

ایک نیمقطری زاویہ = ۵۷° ۱۷′ ۴۴٫۸″ تقریباً (دفعہ ۱۸)

دو قائمے = ۱۸۰° = ۲۰۰ف = ח نیمقطری (دفعہ ۲۱)

زاویہ = $\frac{\text{قوس}}{\text{نصف قطر}}$ × زاویہ نیمقطری (دفعہ ۲۳)

۲- جب² ط + جم² ط = ۱

قط² ط = ۱ + مس² ط

قم² ط = ۱ + مم² ط (دفعہ ۲۸)

۳- جب ۰° = ۰ ، جم ۰° = ۱ (دفعہ ۴۰)

جب ۳۰° = $\frac{۱}{۲}$ ، جم ۳۰° = $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ (دفعہ ۳۸)

جب ۴۵° = جم ۴۵° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (دفعہ ۳۷)

جب ۶۰° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، جم ۶۰° = $\frac{1}{2}$ (دفعہ ۳۹)

جب ۹۰° = ۱ ، جم ۹۰° = ۰ (دفعہ ۴۱)

جب ۱۵° = $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ ، جم ۱۵° = $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (دفعہ ۱۱۲)

جب ۱۸° = $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ، جم ۳۶° = $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (دفعات ۱۲۶ تا ۱۲۷)

۴- جب (− طہ) = − جب طہ ، جم (− طہ) = جم طہ (دفعہ ۷۴)

جب (۹۰° − طہ) = جم طہ ، جم (۹۰° − طہ) = جب طہ (دفعہ ۷۵)

جب (۹۰° + طہ) = جم طہ ، جم (۹۰° + طہ) = − جب طہ (دفعہ ۷۶)

جب (۱۸۰° − طہ) = جب طہ ، جم (۱۸۰° − طہ) = − جم طہ (دفعہ ۷۸)

جب (۱۸۰° + طہ) = − جب طہ ، جم (۱۸۰° + طہ) = − جم طہ (دفعہ ۷۹)

۵- اگر جب طہ = جب عہ تو طہ = ن π + (−۱)^ن عہ (دفعہ ۸۸)

اگر جم طہ = جم عہ تو طہ = ۲ ن π ± عہ (دفعہ ۸۹)

اگر مس طہ = مس عہ تو طہ = ن π + عہ (دفعہ ۹۰)

۶- جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب

جم (ا + ب) = جم ا جم ب − جب ا جب ب (دفعہ ۹۴)

جب (ا - ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب

جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب (دفعہ ۹۶)

جب ج + جب د = ۲ جب (ج+د)/۲ جم (ج-د)/۲

جب ج - جب د = ۲ جم (ج+د)/۲ جب (ج-د)/۲

جم ج + جم د = ۲ جم (ج+د)/۲ جم (ج-د)/۲

جم د - جم ج = ۲ جب (ج+د)/۲ (دفعہ ۱۰۰)

۲ جب ا جم ب = جب (ا + ب) + جب (ا - ب)

۲ جم ا جب ب = جب (ا + ب) - جب (ا - ب)

۲ جم ا جم ب = جم (ا + ب) + جم (ا - ب)

۲ جب ا جب ب = جم (ا - ب) - جم (ا + ب) (دفعہ ۱۰۳)

مس (ا + ب) = (مس ا + مس ب)/(۱ - مس ا مس ب)

مس (ا - ب) = (مس ا - مس ب)/(۱ + مس ا مس ب) (دفعہ ۱۰۴)

جب ۲ا = ۲ جب ا جم ا

جم ۲ ا = جم² ا − جب² ا = ۱ − ۲ جب² ا = ۲ جم² ا − ۱ (دفعہ ۱۱۱)

جب ۲ ا = ۲ مس ا / (۱ + مس² ا) ، جم ۲ ا = (۱ − مس² ا) / (۱ + مس² ا) (دفعہ ۱۱۵)

مس ۲ ا = ۲ مس ا / (۱ − مس² ا) (دفعہ ۱۱۱)

جب ۳ ا = ۳ جب ا − ۴ جب³ ا

جم ۳ ا = ۴ جم³ ا − ۳ جم ا

مس ۳ ا = (۳ مس ا − مس³ ا) / (۱ − ۳ مس² ا) (دفعہ ۱۱۳)

جب ا/۲ = ± √((۱ − جم ا)/۲) ، جم ا/۲ = ± √((۱ + جم ا)/۲) (دفعہ [illegible])

۲ جب ا/۲ = ± √(۱ + جب ا) ± √(۱ − جب ا)

۲ جم ا/۲ = ± √(۱ + جب ا) ∓ √(۱ − جب ا) (دفعہ ۱۱۹)

مس (ا۱ + ا۲ + ... + ان) = (ن۱ − ن۳ + ن۵ − ....) / (۱ − ن۲ + ن۴ − ....) (دفعہ ۱۲۱)

۷۔ لوکو م ن = لوکو م + لوکو ن

لوکو (م/ن) = لوکو م − لوکو ن

لوکو مⁿ = ن لوکو م (دفعہ [illegible])

$\text{لوک}_{\text{ا}}\text{م} = \text{لوک}_{\text{ب}}\text{م} \times \text{لوک}_{\text{ا}}\text{ب}$ (دفعہ ۱۵۳)

٨- $\dfrac{\text{جب ا}}{\text{اَ}} = \dfrac{\text{جب ب}}{\text{بَ}} = \dfrac{\text{جب ج}}{\text{جَ}}$ (دفعہ ۱۶۹)

$\text{جم ا} = \dfrac{\text{بَ}^2 + \text{جَ}^2 - \text{اَ}^2}{۲\,\text{بَ جَ}}$ (دفعہ ۱۷۰)

$\text{جب}\dfrac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\dfrac{(\text{ن}-\text{بَ})(\text{ن}-\text{جَ})}{\text{بَ جَ}}}$ (دفعہ ۱۷۱)

$\text{جم}\dfrac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\dfrac{\text{ن}(\text{ن}-\text{اَ})}{\text{بَ جَ}}}$ (دفعہ ۱۷۲)

$\text{مس}\dfrac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\dfrac{(\text{ن}-\text{بَ})(\text{ن}-\text{جَ})}{\text{ن}(\text{ن}-\text{اَ})}}$ (دفعہ ۱۷۳)

$\text{جب ا} = \dfrac{۲}{\text{بَ جَ}}\sqrt{\text{ن}(\text{ن}-\text{اَ})(\text{ن}-\text{بَ})(\text{ن}-\text{جَ})}$ (دفعہ ۱۷۵)

$\text{اَ} = \text{بَ جم ج} + \text{جَ جم ب}$ ، ...... (دفعہ ۱۷۶)

$\text{مس}\dfrac{\text{ب}-\text{ج}}{۲} = \dfrac{\text{بَ}-\text{جَ}}{\text{بَ}+\text{جَ}}\,\text{مم}\dfrac{\text{ا}}{۲}$ (دفعہ ۱۷۷)

$\text{ف} = \sqrt{\text{ن}(\text{ن}-\text{اَ})(\text{ن}-\text{بَ})(\text{ن}-\text{جَ})} = \dfrac{۱}{۲}\,\text{بَ جَ جب ا}$

$= \dfrac{۱}{۲}\,\text{جَ اَ جب ب} = \dfrac{۱}{۲}\,\text{اَ بَ جب ج}$ (دفعہ ۲۰۴)

٩- $\text{م} = \dfrac{\text{اَ}}{۲\,\text{جب ا}} = \dfrac{\text{بَ}}{۲\,\text{جب ب}} = \dfrac{\text{جَ}}{۲\,\text{جب ج}} = \dfrac{\text{اَ بَ جَ}}{۴\,\text{ف}}$ دفعات ۲۰۶ و ۲۰۷

ر = نب / ن = (ن - اَ) مس ا/۲ .... (دفعات ۲۰۸ و ۲۰۹)

رَ = ن / ن - اَ = ن مس ا/۲ .... (دفعات ۲۱۱ و ۲۱۲)

ایک ایسی ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ جو ایک دائرہ کے اندر بن سکتی ہے

= √((ن - اَ)(ن - بَ)(ن - جَ)(ن - دَ)) (دفعہ ۲۲۵)

جب ط / ط = ۱ جب زاویہ ط نہایت چھوٹا ہو (دفعہ ۲۳۶)

دائرے کا رقبہ = π رَ۲ (دفعہ ۲۳۹)

۱۰ - جب عہ + جب (عہ + بہ) + جب (عہ + ۲ بہ) + ... ن رقموں تک

= جب {عہ + (ن - ۱)/۲ بہ} جب ن بہ/۲ / جب بہ/۲ (دفعہ ۲۴۷)

جم عہ + جم (عہ + بہ) + جم (عہ + ۲ بہ) + ... ن رقموں تک

= جم {عہ + (ن - ۱)/۲ بہ} جب ن بہ/۲ / جب بہ/۲ (دفعہ ۲۴۸)

باب اوّل

زاویوں کی پیمائش ستینی اور ریڈئی پیمانوں میں

قوسی پیمانہ

۱۔ لفظ ٹرگنومٹری (علم مثلث) دو یونانی لفظوں سے مرکب ہے جن کا مطلب " مثلثوں کی پیمائش " ہے علم مثلث کا اصلی مقصد یہی تھا اور اب تک بھی اس کا بڑا استعمال یہ ہے کہ اس کے ذریعہ مثلثوں کے ضلعوں اور زاویوں کے باہمی ارتباطات اور تعلقات معلوم کئے جاتے ہیں مگر اب علم مثلث کے معنی بہت وسیع ہو گئے ہیں اور اس میں وہ جملہ فروع ریاضی شامل ہیں جن کا تعلق زاویوں سے ہے۔

علم ہندسہ میں زاویوں کی پیمائش زاویہ قائمہ یا اس کی کسروں کی رقوم میں کی جاتی ہے مگر صریحاً اپنی بڑی مقدار

کی وجہ سے یہ اکائی علم مثلث میں اتنی موزوں نہیں ہے اسلئے زاویوں کا اندازہ لگانے کے لئے کئی اور ترکیبیں اختیار کی گئی ہیں ان میں ایک پیمانۂ ستینی (سکس جیسمل) ہے جو علم مثلث میں اکثر استعمال ہوتا ہے، اس کے نام سے ظاہر ہے کہ اس میں ہرایک اکائی اپنے سے اگلی چھوٹی اکائی کی ساٹھ گنی ہوتی ہے اس پیمانہ کو انگریزی ترکیب تقسیم بھی کہتے ہیں

۲- ستینی پیمانہ یعنی انگریزی ترکیب تقسیم ایں زاویہ قائمہ کو ۹۰ برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہرایک حصہ کو درجہ (ڈگری) کہتے ہیں، ہرایک درجہ کو ۶۰ برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہرایک حصہ کو دقیقہ (منٹ) کہتے ہیں اور اسی طرح ہرایک دقیقہ یا منٹ کے ۶۰ برابر حصوں میں سے ہرایک حصہ کو ثانیہ (سکنڈ) کہتے ہیں۔

رموز 1°، $1'$، $1''$ درجہ، دقیقہ، ثانیہ کو بالترتیب تعبیر کرتی ہیں پس

۶۰ ثانیے ($60''$) برابر ہیں ایک دقیقہ ($1'$) کے

۶۰ دقیقے ($60'$) " " درجہ (1°) کے

۹۰ درجے (90°) " " زاویہ قائمہ کے

نوٹ - اگرچہ یہ سب اکائیاں زاویہ قائمہ سے حاصل ہوئی ہیں مگر قائمہ خود اکائی ستینی پیمانہ کی نہیں ہے، بڑی سے بڑی اکائی اس ترکیب تقسیم کی درجہ ہے پس ستینی پیمانہ کے موافق ۲ قائمے = 180° اور علی ہٰذالقیاس۔

علم حساب کے معمولی قاعدوں سے زاویوں کی تحویل قائموں

سے درجوں، دقیقوں، ثانیوں میں اور برعکس اس کے بآسانی ہوسکتی ہے۔

مثال ۱۔ ۲۹۶ء۵۷° کو درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں تعبیر کرو۔

۲۹۶ء درجوں کی تحویل دقیقوں میں ۶۰ سے ضرب دینے سے کرو اس طرح حاصل ہوگا ۷۶ء۱۷'

اور ۷۶ء دقیقوں کے ثانئے ۶۰ میں ضرب دینے سے بناؤ

پس ہمیں حاصل ہوگا ۵۷° ۱۷' ۴۵ء۶"

مثال ۲۔ ۴۶° ۶' ۹" کو زاویہ قائمہ کی رقوم میں بیان کرو

ثانیوں کو ۶۰ پر تقسیم کرو اور حاصل قسمت کے اول دقیقے لکھو پھر ۶۰ پر تقسیم کرو اور حاصل کے ماقبل درجے لکھو اور آخر میں ۹۰ پر تقسیم کرو۔

۶۰) ۹"
  ۱۵ء۰'

۶۰) ۶' ۱۵ء
  ۱۰۲۵ء۰°

۹۰) ۴۶° ۱۰۲۵ء
  ۵۱۲۲۵ء قائمے

جواب

مثال ۳۔ انگریزی ترکیب تقسیم کے موافق (۱) مخمس منتظم (۲) مسبع منتظم کے ہر ایک زاویہ کی مقدار معلوم کرو

(۱) فرض کرو کہ مخمس منتظم کا زاویہ ا سے تعبیر ہوتا ہے۔

تب بموجب اقلیدس م ۱ ش ۳۲ نتیجہ صریح

۵ ا + ۴ قائمے = جتنے اضلاع ہوں اُن سے دوگنے قائمے

∴ ۵ ا = (۱۰-۴) قائمے

اس لئے ا = ۱۰۸°

(۲) اسی طرح فرض کرو کہ ا مسبع منتظم کا ایک زاویہ ہے

تب ۷ ا + ۴ × ۹۰ = ۱۴ × ۹۰ یا ۷ ا = ۹۰۰°

اس لئے ا = ۱۲۸° ۳۴' ۱۷ ۱/۷"

علم مثلث میں ستینی پیمانہ اچھی طرح سے مروج ہو چکا ہے اور اس کی جملہ عملیات میں ہمیشہ استعمال ہوتا ہے مگر مضروب فیہ ۶۰ اور ۶۰ کی موجودگی کے باعث تحویل میں دقت ہوتی ہے۔

۳۔ اس لئے ایک اور نظام احاد جسکو میئی پیمانہ (سنٹسمل) یا فرانسیسی ترکیب تقسیم کہتے ہیں تجویز ہوا ہے اس ترکیب تقسیم میں زاویہ قائمہ کو ۱۰۰ برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہر ایک حصہ کو فرانسیسی درجہ (گریڈ) کہتے ہیں ہر ایک فرانسیسی درجہ کو سو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہر ایک حصہ کو فرانسیسی دقیقہ (فرانسیسی منٹ) کہتے ہیں اور اسی طرح ہر ایک فرانسیسی دقیقہ کے ۱۰۰ برابر حصوں میں سے ہر ایک حصہ کو فرانسیسی ثانیہ (فرانسیسی سکنڈ) کہتے ہیں۔

رموز ۱ث، ۱ٗ، ۱ٓ بالترتیب فرانسیسی درجوں، دقیقوں، ثانیوں کو تعبیر کرتی ہیں پس

۱۰۰ فرانسیسی ثانیے (۱۰۰ٓ) برابر ہیں ایک فرانسیسی دقیقہ (۱ٗ) کے

۱۰۰ " دقیقے (۱۰۰ٗ) " " درجہ (۱ث) کے

۱۰۰ " درجے (۱۰۰ث) " " ایک زاویہ قائمہ کے

۴۔ فرانسیسی ترکیب تقسیم کا استعمال انگریزی ترکیب تقسیم کی نسبت زیادہ آسان اور سہل ہے مگر اس سے پیشتر کہ اسکو عملی طور پر اختیار کر لیا جائے جدولوں کی ایک بڑی تعداد کا نئے سرے سے حساب لگانا پڑے گا اس وجہ سے یہ ترکیب عملیات میں کبھی استعمال نہیں کی گئی اور اب تقریباً معدوم ہو چکی ہے۔

۵۔ ستینی پیمانہ کی تحویل مئی پیمانہ میں اور برعکس اس کے۔
چونکہ ایک زاویہ قائمہ ۹۰° کے برابر ہوتا ہے اور نیز $۱۰۰^{ف}$ کے

اس لئے $۹۰^\circ = ۱۰۰^{ف}$

$\therefore \quad ۱^\circ = \frac{۱۰}{۹}^{ف}$ اور $۱^{ف} = \frac{۹}{۱۰}^\circ$

پس معلوم ہوا کہ انگریزی درجوں کو فرانسیسی درجوں میں تحویل کرنے کے لئے ہمیں کل انگریزی درجوں کی تعداد کا $\frac{۱}{۹}$ واں حصہ اُن کی تعداد پر زیادہ کرنا چاہیئے اور برعکس اس کے فرانسیسی درجوں کو انگریزی درجوں میں منتقل کرنے کے لئے فرانسیسی درجوں کی تعداد کا $\frac{۱}{۱۰}$ واں حصہ اُن کی تعداد سے منفی کرنا چاہیئے

مثال۔ $۳۶^\circ = (۳۶ \times \frac{۱}{۹} + ۳۶)^{ف} = ۴۰^{ف}$

اور $۶۴^{ف} = (۶۴ - \frac{۱}{۱۰} \times ۶۴)^\circ = (۶۴ - ۶٫۴)^\circ = ۵۷٫۶^\circ$

اگر کسی زاویے میں درجوں کی صحیح تعداد شامل نہ ہو تو اس کو سب سے پہلے درجوں کی کسور میں لانا چاہیئے اور اس کے بعد فرانسیسی درجوں میں منتقل کرنا چاہیئے۔

عملی صورتوں میں زاویوں کو قائم الزاویہ یا اس کی کسور میں تعبیر کرنا زیادہ مناسب ہوتا ہے امثلہ ذیل سے اس کی توضیح

ہوگی۔

مثال ۱۔ ۶۳° ۱۴′ ۱۵″ کی تحویل مئی پیمانہ میں کرو

۱۵″ = ۱۷/۲۰ = ۰٫۸۵′

اور ۱۴′ ۱۵″ = ۱۴٫۸۵′ = ۱۴٫۸۵°/۶۰ = ۰٫۲۴۷۵°

∴ ۶۳° ۱۴′ ۱۵″ = ۶۳٫۲۴۷۵° = ۶۳٫۲۴۷۵/۹۰ قائمے

= ۰٫۷۰۲۷۵ قائمے

= ۷۰٫۲۷۵ᵍ = ۷۰ᵍ ۲۷٫۵`

= ۷۰ᵍ ۲۷` ۵۰``

مثال ۲۔ ۹۴ᵍ ۲۳` ۸۷`` کی تحویل ستینی پیمانہ میں کرو

۹۴ᵍ ۲۳` ۸۷`` = ٫۹۴۲۳۸۷ قائمے

۹۰

۸۴٫۸۱۴۸۳ انگریزی درجے

۶۰

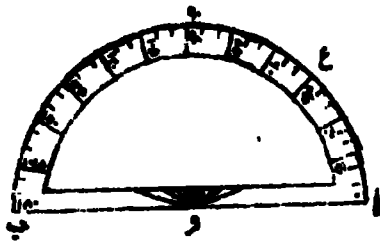
۴۸٫۸۸۹۸ " دقیقے

۶۰

۵۳٫۳۸۸۰ " ثانیے

اس لئے ۹۴ᵍ ۲۳` ۸۷`` = ۸۴° ۴۸′ ۵۳٫۳۸۸″

۴۔ زاویہ کش یا چاندہ زاویوں کی پیمائش کا ایک آلہ ہے ۔ یہ دہات کی پتری ہوتی ہے جسکی شکل نصف دائرہ کی ہوتی ہے اور اسکے پر صفر سے ۱۸۰° تک نشان لگے ہوئے ہوتے ہیں۔

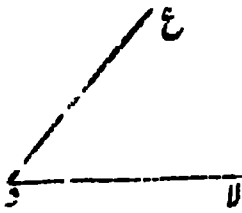
اگر کسی زاویہ کی پیمائش منظور ہو تو زاویہ کے راس مرکز و پر اور زاویہ کی ایک ساق کو قطر و ا پر ٹھیک ٹھیک منطبق کرتے ہیں اگر زاویہ کی دوسری ساق و ع ہو تو

کے مقابل محیط پر جو عدد ہوگا وہ زاویہ ع و ا کی مقدار کو درجوں میں تعبیر کرے گا۔

چونکہ کسی دائرہ میں مساوی قوسوں کے محاذی مرکزی زاویئے مساوی ہوتے ہیں اس لئے معلوم ہوا کہ نصف دائرہ پر درجوں کے نشانات متساوی الفصل ہیں اس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ جس قوس کے محاذی زاویہ ۱۰° ہو وہ اُس قوس کا دس گنا ہوگا جس کے سامنے کا زاویہ صرف ۱° ہو پس معلوم ہوا کہ کسی دائرہ کے مرکزی زاویئے اُن قوسوں کے متناسب ہوتے ہیں جن کے وہ محاذی ہوں۔

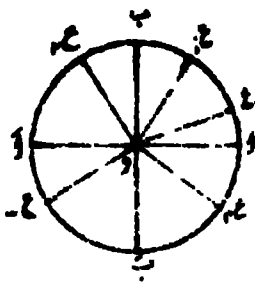
یہ نتیجہ اعظم اقلیدس م۶ ش۳۳ میں زیادہ وضاحت سے ثابت کیا گیا ہے۔

زاویوں کی مثلثی تعبیر

اقلیدس کی تعریف زاویہ "یعنی دو ایسے خطوط کا میلان جو ایک ... ٹھیک طور پر صادق نہیں آتی جب تک کہ زاویئے دو ... سے کم نہوں۔

علم مثلث میں زاویہ کی تعریف اس طرح کرتے ہیں کہ اگر کوئی خط مستقیم اپنے ایک سرے کے گرد ایک ہی سطح میں ایک مقام سے کسی دوسرے مقام تک چکر لگائے تو اس کی حرکت سے جو میلان ان دو مقامات کے درمیان پیدا ہو اُس کو زاویہ کہتے ہیں۔ فرض کرو کہ شکل منسلکہ میں چکر لگانے والا خط مقام و لا سے مقام و ع تک حرکت کرتا ہے، مثلثی اصطلاح میں اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ اس نے "ایک زاویہ لا و ع مرتسم کیا ہے" چکر لگانے والے خط کو نصف قطر دائر یا خط دائر کہتے ہیں۔

گھڑی کی سوئیاں یا پہئے کے آرے اس طرح سے زاویہ مرتسم کرنے کی عمدہ مثالیں ہیں، گھڑی میں منٹوں کی سوئی ایک قائمہ یعنی ۹۰ درجے $\frac{1}{4}$ گھنٹے میں اور ۱۸۰ درجے $\frac{1}{2}$ گھنٹے میں اور ۳۶۰ درجے ایک گھنٹے میں مرتسم کرتی ہے اور گھنٹوں کی سوئی اپنی گردش سے ۳۶۰ درجے ۱۲ گھنٹے میں، ۷۲۰ درجے ایک دن میں مرتسم کرتی ہے پس معلوم ہوا کہ علم مثلث میں زاویہ کی مقدار پر کوئی قید نہیں ہے۔

۸۔ کسی مقدار کے زاویے

فرض کرو کہ دو ثابت خط لا و لاَ اور ب و بَ نقطہ و پر متقاطع علی القوائم ہیں اور فرض کرو کہ ایک چکر لگانے والا خط و ع

(ہوتا ہے نقطہ و کے گرد ایک ہی سطح
میں گردش کرتا ہے) مقام
وا سے شروع ہو کر گھڑی کی سوئیوں
کی مقابل سمت میں حرکت کرتا ہے
جب خط دائر وا اور وب کے
درمیان کسی مقام وع۱ پر منطبق ہوتا
ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ اوع۱ ہوتا ہے جو زاویہ قائمہ سے کم ہے
جب خط دائر وب اور وا کے درمیان کسی مقام وع۲ پر ہوتا
ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ ایک قائمے سے بڑا ہوتا ہے۔
وا اور وب کے درمیان کسی مقام وع۳ پر زاویہ مرتسمہ اوع۳
یعنی اوب + ب وا + ا وع۳ یعنی دو قائمے + ا وع۳ ہوتا
ہے یعنی زاویہ مرتسمہ دو قائموں سے بڑا ہوتا ہے۔
اسی طرح سے وب اور وا کے درمیان کسی مقام وع۴
پر زاویہ مرتسمہ تین قائموں سے بڑا ہوتا ہے
جب خط دائر ایک پورا چکر لگا چکتا ہے اور دوسری مرتبہ ابتدائی
مقام وا پر منطبق ہوتا ہے تو اس کی گردش سے جو زاویہ پیدا
ہوتا ہے وہ چار قائموں کے برابر ہوتا ہے۔
اگر اس کے بعد خط دائر اپنی گردش کو جاری رکھے تو دوسری
مرتبہ جب وہ مقام وع۱ پر پہنچتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ صرف
اوع۱ نہیں ہوتا بلکہ ۴ قائمے + زاویہ اوع۱ ہوتا ہے
اسی طرح سے جب خط دائر دو پورے چکر لگا چکنے کے بعد

مقام وع، پر منطبق ہوتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ = ۸ قائمے + زاویہ او ع،

۹- خطوط مستقیم او اَ اور ب و بَ متقاطع ہوکر چار قائمے پیدا کرتے ہیں اور سطح مستوی کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں، حصہ او ب کو ربع اول، ب و اَ کو ربع دوم، اَ و بَ کو ربع سوم اور بَ و ا کو ربع چہارم کہتے ہیں۔ اب خط ثابت و ا اور خط دائر و ع کے درمیان کوئی زاویہ فرض کرو، اگر و ع ربع اول میں مقام و ع، پر واقع ہو تو اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ زاویہ او ع، ربع اول میں ہے اگر و ع دوسرے ربع میں مقام و ع، پر واقع ہو تو زاویہ او ع، کو ربع دوم میں کہتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔

۱۰- مفصلہ ذیل زاویئے مرتسم کرنے کے بعد خط دائر کے مختلف مقامات دریافت کرو۔

(۱) ۲۲۵° ، (۲) ۴۸۰° اور (۳) ۱۰۵۰°

(۱) چونکہ ۲۲۵° = ۱۸۰° + ۴۵° اس لئے معلوم ہوا کہ اس صورت میں خط دائر دو قائمے مرتسم کرنے کے بعد زاویہ ۴۵° میں گھوم چکا ہے۔ اس لئے اس وقت وہ ربع سوم میں ہے اور زاویہ اَ و بَ کی تنصیف کرتا ہے۔

(۲) چونکہ ۴۸۰° = ۳۶۰° + ۱۲۰° اس لئے ایک پورا چکر لگانے کے بعد خط دائر نے زاویہ ۱۲۰° مرتسم کیا ہے، اسلئے وہ ربع دوم میں و ب اور و اَ کے درمیان ہے اور و ب کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بناتا ہے۔

(۳) چونکہ ۱۰۵۰° = ۱۱ × ۹۰° + ۶۰° اس لئے معلوم ہوا کہ خط دائر ۱۱ پورے

چکر لگانے کے بعد زاویہ ۶۰° مرتسم کر چکا ہے اور ربع چہارم میں و ب اور و ا کے درمیان ہے اور و ب کے ساتھ زاویہ ۶۰° بناتا ہے

امثلہ نمبری ۱

ذیل کے زاویوں کو زاویہ قائمہ کی رقوم میں بیان کرو -

۱- ۶۰°   ۲- ۷۵° ۱۵'

۳- ۶۳° ۱۷' ۲۵"   ۴- ۱۳۰° ۳۰'

۵- ۲۱۰° ۴۰' ۳۰"   ۶- ۳۷۰° ۲۰' ۴۸"

ذیل کے زاویوں کو فرانسیسی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں بیان کرو

۷- ۳۰°   ۸- ۸۱°

۹- ۱۳۸° ۳۰'   ۱۰- ۴۵° ۴۷' ۱۵"

۱۱- ۲۳۵° ۱۲' ۳۶"   ۱۲- ۷۷۵° ۱۳' ۴۸"

ذیل کے زاویوں کو قائموں اور نیز انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں کی رقوم میں بیان کرو

۱۳- ۱۲۰ᵍ   ۱۴- ۴۵ᵍ ۳۵ᶜ ۲۴ᶜᶜ

۱۵- ۳۹ᵍ ۴۵ᶜ ۳۶ᶜᶜ   ۱۶- ۲۵۵ᵍ ۸ᶜ ۹ᶜᶜ

۱۷- ۵۹ᵍ ۱ᶜ ۵ᶜᶜ

جب خط دائر مفصلہ ذیل زاویئے مرتسم کر چکا ہو تو ہر ایک صورت میں اسکے مقام کا نشان شکل میں دو -

۱۸- $\frac{4}{3}$ زاویہ قائمہ   ۱۹- $3\frac{1}{2}$ زاویئے قائمے

۲۰- $13\frac{1}{4}$ زاویئے قائمے   ۲۱- ۱۲۰°

۲۲- ۳۱۵° ۲۳- ۴۵°

۲۴- ۱۱۸۵° ۲۵- ۱۵۰ ف

۲۶- ۴۲۰ ف ۲۷- ۸۷۵ ف

۲۸- معلوم کرو کہ گھڑی کی گھنٹہ اور منٹ کی سوئیاں ۱۱ ½ منٹ میں بالترتیب کتنے انگریزی درجے، دقیقے اور ثانئے مرتسم کرتی ہیں۔

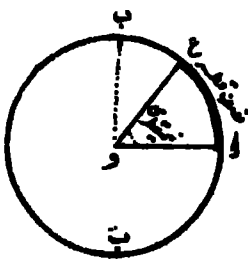
۲۹- کسی مثلث قائم الزاویہ کے ایک زاویہ حادہ میں انگریزی درجوں کی تعداد دوسرے زاویہ کی فرانسیسی درجوں کی تعداد کے برابر ہے۔ دونوں زاویوں کو انگریزی درجوں میں بیان کرو۔

۳۰- ثابت کرو کہ کسی زاویہ میں ستینی دقیقوں کی تعداد کو اُسی زاویہ میں مئی دقیقوں کی تعداد سے نسبت ۲۷ : ۵۰ ہے

۳۱- زاویہ ۴۴° ۸' کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ ایک حصہ کی ستینی ثانیوں کی تعداد دوسرے حصہ کی مئی ثانیوں کی تعداد کے برابر ہو

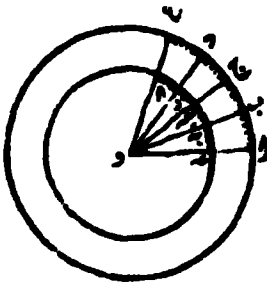
قوسی پیمانہ

۱۱- زاویوں کی ایک تیسری ترکیب تقسیم ایجاد ہوئی ہے اور علم ریاضی کی اعلیٰ فروع میں یہی استعمال کی جاتی ہے

اس ترکیب تقسیم کی اکائی اس طرح حاصل ہوتی ہے۔

کوئی دائرہ اع ب بَ لو جسکا مرکز و ہو اور کسی نقطہ ا سے قوس اع برابر نصف قطر دائرہ کے

۱۳ پس وا اور وج کو ملاؤ زاویہ اوج کو قوسی پیمائش کی اکائی قرار دیتے ہیں یعنی اس زاویہ کی رقوم میں اور زاویوں کا اندازہ لگاتے ہیں۔
اس زاویہ کو انگریزی میں ریڈین کہتے ہیں ہم اسکو زاویہ نیمقطری یا اختصاراً نیم قطری کہیں گے اور اس کو آئندہ نشان (ا نقم) سے تعبیر کرینگے۔

۱۲۔ اب کسی پیمانہ واحد یا اکائی کے مناسب انتخاب کے لئے ضروری ہے کہ وہ مقدار مستقل ہو اسلئے ہمکو ثابت کرنا چاہیئے کہ نیمقطری ایک مستقل زاویہ ہے، دفعات ذیل میں ہم اس بات کو ثابت کریں گے۔

۱۴۔ مسئلہ کسی دائرہ کے محیط اور قطر کی باہمی نسبت مستقل ہوتی ہے
دو دائرے لو جن کا مرکز مشترک و ہو، بڑے دائرے کے اندر ایک ایسی منتظم کثیر الاضلاع بناؤ جس کے ن اضلاع ہوں۔
فرض کرو کہ وا، وب، وج..... چھوٹے دائرہ کو نقاط عہ، بہ، جہ..... پر ملتے ہیں عہ بہ، بہ جہ، جہ لہ..... کو ملاؤ
تب بموجب اقلیدس م ۶ ش ۲ عہ، بہ، جہ، لہ..... چھوٹے دائرہ کے اندر ن اضلاع کی ایک منتظم کثیر الاضلاع ہے۔
چونکہ وعہ = وبہ اور وا = وب
اس لئے ضرور ہے کہ خطوط عہ بہ اور اب متوازی ہوں
اسلئے $\frac{\text{اب}}{\text{عہ بہ}} = \frac{\text{وا}}{\text{وعہ}}$ (اقلیدس م ۶ ش ۴)

نیز کثیر الاضلاع ا ب ج د ..... منتظم ہے اس کا گھیرا یعنی مجموعہ اضلاع ن × ا ب ہے اور اسی طرح سے اندرونی کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع ن × عد بد ہے پس

$$\frac{\text{بیرونی کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع}}{\text{اندرونی کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع}} = \frac{\text{ن × ا ب}}{\text{ن × عد بد}}$$

$$= \frac{\text{ا ب}}{\text{عد بد}} = \frac{\text{و ا}}{\text{و عد}} \quad \ldots\ldots (1)$$

اور یہ تعلق صحیح ہے خواہ اوپر کی اشکال کثیر الاضلاع کی تعداد اضلاع کچھ ہی ہو۔

اب فرض کرو کہ تعداد اضلاع لا انتہا بڑھتی ہے (یعنی ن لا انتہا بڑھتا ہے) یہاں تک کہ آخر الامر بیرونی کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع بیرونی دائرہ کے محیط کے قریب قریب برابر ہو جاتا ہے۔ اور اندرونی کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع اندرونی دائرہ کے محیط کے قریب قریب برابر ہو جاتا ہے۔

اُس وقت ربط (۱) کی صورت یہ ہو جائیگی۔

$$\frac{\text{بیرونی دائرہ کا محیط}}{\text{اندرونی دائرہ کا محیط}} = \frac{\text{و ا}}{\text{و عد}}$$

$$= \frac{\text{بیرونی دائرہ کا نصف قطر}}{\text{اندرونی دائرہ کا نصف قطر}}$$

اس لئے $\frac{\text{بیرونی دائرہ کا محیط}}{\text{بیرونی دائرہ کا نصف قطر}} = \frac{\text{اندرونی دائرہ کا محیط}}{\text{اندرونی دائرہ کا نصف قطر}}$

اب چونکہ ابتدا میں دونوں دائروں کی مقدار پر کوئی قید نہیں رکھی گئی اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ مقدار

$$\frac{\text{محیط دائرہ}}{\text{نصف قطر دائرہ}}$$

تمام دائروں کے لئے وہی ہوتی ہے۔ پس معلوم ہوا کہ دائرہ کے محیط کی نسبت اپنے نصف قطر سے اور نیز اس لئے اپنے قطر سے ایک مقدار معین اور مستقل ہے۔

۱۴۔ دفعہ گزشتہ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ نسبت $\frac{\text{محیط}}{\text{قطر}}$ تمام دائروں کے لئے یکساں ہوتی ہے۔ اس مستقل نسبت کی قیمت کو ہم ہمیشہ عبرانی حرف π (حیت) سے تعبیر کریں گے۔ اس سے ظاہر ہے کہ π ایک عدد ہے

پس $\frac{\text{محیط}}{\text{قطر}}$ = عدد مستقل π

یعنی مسئلہ ذیل قائم ہوا کہ کسی دائرہ کا محیط ہمیشہ اُس کے قطر کا π گنا یا اس کے نصف قطر کا 2π گنا ہوتا ہے۔

۱۵۔ اب مشکل یہ ہے کہ π کی قیمت نہ توصیح عدد ہے اور نہ یہ کسر عام کی شکل میں بیان ہو سکتی ہے، اس لئے ہم اُس کو کسر اعشاریہ متوالی یا غیر متوالی کی رقوم میں بھی تعبیر نہیں کر سکتے عدد π مقدار متبائن ہے یعنی یہ ایک ایسی مقدار ہے جس کی قیمت دو صحیح عددوں کی نسبت سے تعبیر نہیں ہو سکتی۔

آٹھ مرتبہ کے اعشاریہ تک اس کی صحیح قیمت ... ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵ ہے

کسر $\frac{22}{7}$ سے π کی قیمت پہلے دو مرتبہ کے اعشاریہ تک صحیح حاصل ہوتی ہے، کیونکہ

$\frac{22}{7} = ۳٫۱۴۲۸۵ .....$

کسر $\frac{355}{113}$ سے π کی زیادہ صحیح قیمت حاصل ہوتی کیونکہ وہ ۶ مرتبہ کے اعشاریہ تک درست ہے کیونکہ

$\frac{355}{113} = ۳٫۱۴۱۵۹۲۰۳.........$

نوٹ۔ کسر $\frac{355}{113}$ اس طرح یاد رہ سکتی ہے۔ پہلے تین طاق اعداد کو اس ترتیب سے لکھو کہ اس میں ہر ایک عدد دو دفعہ مکرر آئے جیسے ۱۱۳۳۵۵ پھر اس عدد کو دو حصوں میں تقسیم کرو اور پہلے حصہ کو دوسرے پر تقسیم کرو۔ جیسے ۱۱۳)۳۵۵(حاصل قسمت π کی قیمت ۶ مرتبہ کے اعشاریہ تک صحیح حاصل ہوگی۔

خلاصہ یہ ہے کہ π کی تقریبی قیمت جو دو مرتبہ کے اعشاریہ تک درست ہو کسر $\frac{22}{7}$ ہے۔ مگر اس سے اچھا تقرب ۳٫۱۴۱۵۹ ..... ہے۔ عمل تقسیم سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$\frac{1}{\pi} = ۰٫۳۱۸۳۰۹۸۸۶۲.........$

۱۶۔ مثال ا۔ ایک ٹرائیسکل کے پہیئے کا قطر ۲۸ انچ ہے۔ اگر پہیئے کے محیط کا کوئی ایک نقطہ ایک پورا چکر لگائے تو دریافت کرو کہ پہیئے کا مرکز اس اثنا میں کتنا فاصلہ طے کرے گا۔

اس جگہ نصف قطر = ۱۴ انچ

اس لئے محیط = $2 \times \pi \times 14 = 28\pi$ انچ

اگر $\pi = \frac{22}{7}$ تو محیط $= \frac{22}{7} \times 28$ انچ

= ۷ فٹ ۴ انچ (تقریباً)

اگر π کو زیادہ صحیح قیمت .... ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵ دی جائے

تو محیط = ۲۸ × ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵ ...... انچ

= ۷ فٹ ..... ۳٫۹۶۴۵۹ انچ

مثال ۲۔ ایک دوڑنے والے گول چکر کے گرد ۵ مرتبہ دوڑنے سے ایک مشّاق ایک میل فاصلہ طے کرتا ہے۔ چکر کا نصف قطر دریافت کرو۔

چکر کا محیط = ۱/۵ × ۱۷۶۰ = ۳۵۲ گز

پس اگر چکر کا نصف قطر گزوں میں ر سے تعبیر کریں

تو ۲π ر = ۳۵۲

ر = ۱۷۶/π گز

فرض کرو کہ π = ۲۲/۷ تو ر = (۷×۱۷۶)/۲۲ = ۵۶ گز (تقریباً)

اگر π کی زیادہ صحیح قیمت لیجائے تو ۱/π = ۰٫۳۱۸۳۱ اور ہمیں حاصل ہوگا۔

ر = ۱۷۶ × ۰٫۳۱۸۳۱ = ۵۶٫۰۲۲۵۶ گز

امثلہ نمبری ۲

۱۔ اگر زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہو تو اس کے محیط کا طول دریافت کرو۔

۲۔ ایک ریل گاڑی کے پہیۓ کا قطر ۳ فٹ ہے اور وہ ایک سکنڈ میں ۳ چکر لگاتا ہے۔ گاڑی کی رفتار معلوم کرو۔

۳۔ ایک پون چکی کا بادبان ۱۸ فٹ ہے اور وہ ایک منٹ میں ۱۰ چکر لگاتا ہے، معلوم کرو کہ اس کا سرا ایک گھنٹہ میں کتنا فاصلہ طے کرتا ہے۔

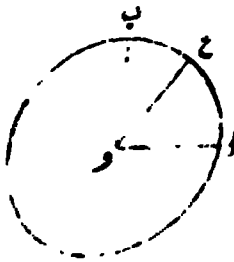
۴۔ ایک پیسے کا قطر ایک انچ ہے، ایسی رسی کا طول دریافت کرو جو

اس کے گول کنارے کے گرد ٹھیک ایک دفعہ آسکے

۵ - اگر یہ فرض کرلیا جائے کہ زمین اپنی حرکت سے ایک سال میں ایک ایسا دائرہ بناتی ہے جس کا نصف قطر ۹۲۵۰۰۰۰۰ میل ہے اور جس کا مرکز سورج ہے تو دریافت کرو کہ زمین ایک سال میں کتنا فاصلہ طے کرتی ہے -

۶ - ایک گاڑی کے پہیئے کا نصف قطر اف ۹ انچ ہے اور وہ ۱/۴ سکنڈ میں اپنے مرکز کے گرد گھومنے سے °۸۰ کا زاویہ پیدا کرتا ہے، معلوم کرو کہ اس کے کنارے پر کا ایک نقطہ ایک گھنٹہ میں کتنا فاصلہ طے کرتا ہے

۷ ا - مسئلہ زاویہ نیمقطری ایک مستقل زاویہ ہے -

فرض کرو کہ زاویہ او ج زاویہ نیمقطری ہے (دفعہ ۱۱)

اور قوس اب ربع دائرہ ہے یعنی اس کا طول ایک چوتھائی محیط کے برابر ہے۔ بموجب دفعہ ۱۴

طول اب = $\frac{۲۲ ر}{۲}$ جہاں ر

سے دائرہ کا نصف قطر تعبیر ہوتا ہے -

بلحاظ تعریف ... بلومعلوم ہے کہ کسی دائرہ کے ... آپس میں وہی نسبت ہوتی ہے جو ان ... کے ... قائم ہوں ...

ی زاویہ اوع = $\frac{۲}{\pi}$ × زاویہ او ب

یکن ہم نے اوپر فرض کیا ہے کہ زاویہ اوع نیمقطری ہے

سلئے زاویہ نیمقطری = $\frac{۲}{\pi}$ × زاویہ او ب

= $\frac{۲}{\pi}$ زاویہ قائمہ کا

ہ چونکہ قائمہ ایک مستقل زاویہ ہے اور ہم ثابت کر چکے ہیں
فعہ ۱۴) کہ π ایک مستقل مقدار ہے۔ اس لئے ظاہر ہے کہ نیمقطری
ک مستقل زاویہ ہے۔ اور اس کی مقدار میں فرق نہیں آتا خواہ
م کسی دائرہ سے اس کی قیمت نکالیں۔

۱۔ زاویہ نیمقطری کی مقدار

جب دفعہ گزشتہ زاویہ نیمقطری

= $\frac{۲}{\pi}$ × ایک زاویہ قائمہ = $\frac{۱۸۰°}{\pi}$

= ۱۸۰° × ....۳۱۸۳۰۹۸۸۶۲ء = ۵۷ء۲۹۵۷۷۹۵°

= ۵۷° ۱۷′ ۴۴ء۸″ تقریباً

۱۔ چونکہ زاویہ نیمقطری = $\frac{۲}{\pi}$ × ایک زاویہ قائمہ

اس لئے ایک زاویہ قائمہ = $\frac{\pi}{۲}$ × نیمقطری زاوئے

اس لئے ۱۸۰° = ۲ قائمے = π نیمقطری

اور ۳۶۰° = ۴ ″ = ۲π نیمقطری

لئے معلوم ہوا کہ جب خط دائر (دفعہ ۸) ایک پورا چکر لگا چکتا ہے

تو اس کی حرکت سے ۴π نیمقطری زاوئے پیدا ہوتے ہیں اور جب وہ تین چکر لگاتا ہے تو ۶π نیمقطری زاوئے پیدا ہوتے ہیں اور بالعموم جب وہ ن چکر ختم کرتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ ۲ن π نیمقطری زاویوں کے برابر ہوتا ہے۔

۲۰۔ عملیات میں اکثر نشان "نق" کو حذف کرتے ہیں اور "زاویہ $\pi^{\text{نق}}$" کی بجائے "زاویہ π" لکھتے ہیں۔

طالب علم کو یہ بات یاد رکھنی چاہیے کہ جب اُس اکائی کا جس کی رقوم میں ایک زاویہ ناپا گیا ہو کوئی ذکر نہ ہو تو الفاظ "نیمقطری زاوئے" وہاں محذوف ہوتے ہیں، ورنہ یہ فرض کرنے میں وہ غلطی کریگا کہ π قائم مقام ۱۸۰° کا ہے۔ یہ صحیح ہے کہ π نیمقطری زاوئے ($\pi^{\text{نق}}$) اور ۱۸۰° ایک ہی زاوئے کو تعبیر کرتے ہیں۔ مگر یاد رہے کہ π بنفسہ ایک عدد اور صرف ایک عدد ہے۔

۲۱۔ قوسی پیمانہ کی تحویل ستینی اور مئی پیمانوں میں اور برعکس اسکے طالب علم کو یہ ارتباطات یاد رکھنے چاہئیں۔

دو قائمے = ۱۸۰° = $۲۰۰^{\text{ث}}$ = π نیمقطری

باقی عمل معمولی قواعد علم حساب کے متعلق ہے

مثال

$$(۱)\quad ۰٫۴۵\pi^{\text{نق}} = ۰٫۴۵ \times ۱۸۰^\circ = ۸۱^\circ = ۹۰^{\text{ث}}$$

$$(۲)\quad ۳^{\text{نق}} = \frac{۳}{\pi} \times \pi^{\text{نق}} = \frac{۳}{\pi} \times ۱۸۰^\circ$$

$$= \frac{۳}{\pi} \times ۲۰۰^{\text{ث}}$$

$$(۳)\quad ۴۰^\circ\ ۱۵'\ ۳۶'' = ۴۰^\circ\ ۱۵\tfrac{۳}{۵}'$$

$$= ۴۰٫۲۶^\circ = ۴۰٫۲۶ \times \frac{\pi^{\text{نق}}}{۱۸۰}$$

$= .223\dot{6} \times \pi$ نیمقطری

(۴) $40^g\ 15'\ 36'' = 40.1536^g$

$= 40.1536 \times \frac{\pi}{200}$ نیمقطری

$= .200768 \times \pi$ نیمقطری

۲۲- مثال ۱- ایک مثلث کے زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب سے چھوٹے زاویہ میں فرانسیسی درجوں کی تعداد کو سب سے بڑے زاویہ کی نیمقطری زاویوں کی تعداد سے نسبت ۴۰ : π ہے۔ زاویوں کو انگریزی درجوں میں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ زاویے $(\text{لا} - \text{ما})^\circ$، لا° اور $(\text{لا} + \text{ما})^\circ$ ہیں

چونکہ مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ ۱۸۰° ہے

اس لئے $180^\circ = \text{لا} - \text{ما} + \text{لا} + \text{لا} + \text{ما} = 3\,\text{لا}$

$\therefore \quad \text{لا} = 60$

پس مطلوبہ زاویے ہوئے

$(60 - \text{ما})^\circ,\ 60^\circ,\ (60 + \text{ما})^\circ$

اب $(60 - \text{ما})^\circ = \frac{10}{9} \times (60 - \text{ما})^g$

اور $(60 + \text{ما})^\circ = \frac{\pi}{180} \times (60 + \text{ما})$ نیمقطری

اسلئے $\frac{10}{9}(60 - \text{ما}) : \frac{\pi}{180}(60 + \text{ما}) = 40 : \pi$

اس لئے $\frac{\pi}{200} \times \frac{60 - \text{ما}}{60 + \text{ما}} = \frac{40}{\pi}$

یعنی $5(60 - \text{ما}) = 60 + \text{ما}$

یعنی $\text{ما} = 40$

اس لئے مطلوبہ زاویئے ہیں ۲۰°۲، ۹۰° ، ۱۰۰°

مثال ۲۔ زاویوں کی پیمائش کی تینوں ترکیبوں ستینی، ہبی اور قوسی میں سے ہر ایک کے موافق کسی معشر منتظم کے ایک زاویہ کی مقدار دریافت کرو
بموجب اقلیدس م ا ش ۳۲ نتیجہ صریح، اگر کسی مستقیم الاضلاع کے اندرونی زاویوں کے مجموعہ پر ۴ قائمے زیادہ کردئے جائیں تو اس حاصل جمع میں شکل مذکورہ کی تعداد اضلاع سے دو گنے قائمے ہونگے۔

فرض کرو کہ معشر منتظم کے ایک زاویہ میں لا قائمے ہیں۔ اس لئے تمام زاوئے ۱۰ لا قائموں کے برابر ہوئے۔

بموجب نتیجہ صریح مذکورہ بالا۔

۱۰ لا + ۴ = ۲۰

اس لئے لا = $\frac{۸}{۵}$ قائمے

لیکن ایک زاویہ قائمہ = ۹۰° = ۱۰۰ث = $\frac{π}{۲}$ نیمقطری زاوئیے

اس لئے زاویہ مطلوبہ = ۱۴۴° = ۱۶۰ث

= $\frac{۴π}{۵}$ نیمقطری زاوئے

امثلہ نمبری ۳

ذیل کے زاویوں کو انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں تعبیر کرو۔

۱- $\frac{π}{۳}$ نق   ۲- $\frac{۳π}{۴}$ نق   ۳- ۱۰π نق

۴- ۱ نق   ۵- ۸ نق

ذیل کے زاویوں کو فرانسیسی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں تعبیر کرو۔

۶۔ $\frac{۲۲۴}{۵}$ نق　　۷۔ $\frac{۲۲۷}{۹}$ نق　　۸۔ ۲۱۰ نق

ذیل کے زاویوں کو نیمقطری زاویوں میں بیان کرو

۹۔ °۹۰　　۱۰۔ °۱۱۰ ′۳۰

۱۱۔ °۱۷۵ ′۴۵　　۱۲۔ °۴۷ ′۲۵ ″۳۶

۱۳۔ °۳۹۵　　۱۴۔ ف۶۰

۱۵۔ ف۱۱۰ `۳۰　　۱۶۔ ف۳۴۵ `۲۵ ``۳۶

۱۷۔ ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کے دو حادے زاویوں کا فرق $\frac{۲۲۲}{۵}$ نیمقطری زاویوں کے برابر ہے۔ اُن کو انگریزی درجوں میں بیان کرو

۱۸۔ ایک مثلث کا ایک زاویہ ($\frac{۳}{۴}$ نا)ف ہے، اور دوسرا ($\frac{۳}{۴}$ نا)° اور تیسرا ($\frac{۲۲}{۷۵}$ نا)نق ان سب کو انگریزی درجوں میں بیان کرو۔

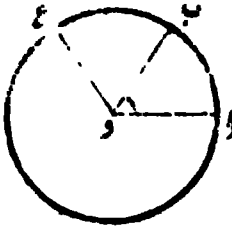
۱۹۔ کسی مثلث کے زاویوں کا قوسی ناپ بالترتیب $\frac{۱}{۲}$ اور $\frac{۱}{۳}$ ہے تیسرے زاویہ میں انگریزی درجوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۰۔ ایک مثلث کے زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں سب سے چھوٹے زاویہ میں انگریزی درجوں کی تعداد کو سب سے بڑے زاویے کی نیمقطری زاویوں کی تعداد سے نسبت ۶۰ : ۲۲ ہے، ان زاویوں کو انگریزی درجوں میں دریافت کرو۔

۲۱۔ ایک مثلث کے زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں سب سے چھوٹے زاویے میں جو نیمقطری زاویوں کی تعداد ہے اس کو درمیانی زاویئے کی انگریزی درجوں کی تعداد کے ساتھ نسبت ۱ : ۱۲۰ ہے، زاویوں کے قوسی ناپ دریافت کرو۔

۲۲۔ اشکال ذیل کے اندرونی زاویوں کو نیمقطری زاویوں اور انگریزی درجوں میں بیان کرو۔ (۱) مخمس منتظم (۲) مسبع منتظم (۳) مثمن منتظم (۴) بارہ

اضلاع کی منتظم کثیرالاضلاع (۵) ۱۷ اضلاع کی منتظم کثیرالاضلاع۔
۲۳۔ دو اشکال کثیرالاضلاع منتظم ہیں ایک کے زاویہ کو دوسرے کے زاویہ سے نسبت ۳ : ۲ ہے، نیز پہلی کثیرالاضلاع کی تعداد اضلاع دوسری کی تعداد اضلاع کی دوچند ہے، ہر ایک کثیرالاضلاع کی تعداد اضلاع دریافت کرو۔
۲۴۔ دو اشکال کثیرالاضلاع کی تعداد اضلاع میں نسبت ۵ : ۴ ہے۔ ان کے زاویوں کا فرق ۹° ہے ہر ایک کی تعداد اضلاع دریافت کرو
۲۵۔ دو ایسی اشکال کثیرالاضلاع معلوم کرو جو منتظم ہوں اور جن کی تعداد اضلاع میں نسبت ۳ اور ۴ کی ہو نیز پہلی کثیرالاضلاع کے ایک زاویئے میں جو انگریزی درجوں کی تعداد ہو اُس کو دوسری کثیرالاضلاع کے کسی زاویئے کی فرانسیسی درجوں کی تعداد کے ساتھ نسبت ۴ : ۵ ہو۔
۲۶۔ ایک ذوار بعۃ الاضلاع کے زاویئے سلسلہ حسابیہ میں ہیں سب سے بڑا زاویہ سب چھوٹے زاویہ کا دوچند ہے، سب سے چھوٹے زاویئے کو نیمقطری زاویوں میں تعبیر کرو۔
۲۷۔ اوقات مندرجہ ذیل پر گھنٹہ اور منٹ کی سوئیوں کے درمیان جو زاویئے بنیں ان کو نیمقطری زاویوں، انگریزی اور فرانسیسی درجوں میں بیان کرو۔
(۱) ساڑھے تین بجے (۲) چھ بجنے میں ۲۰ منٹ (۳) سوا گیارہ بجے
۲۸۔ وقت معلوم کرو (۱) چار اور پانچ بجے کے درمیان جب گھنٹہ اور منٹ کی سوئیوں کے درمیان زاویہ ۷۸° ہو (۲) سات اور آٹھ بجے کے درمیان جب یہ زاویہ ۵۴° ہو۔

۱۳۔ مسئلہ کسی زاویہ میں نیمقطری زاویوں کی تعداد اُس کسر کے برابر ہوتی ہے جس کا شمار کنندہ وہ قوس ہو جس کے محاذی کسی

دائرہ کے مرکز پر زاویہ مجوزہ بنے
اور جس (کسر) کا قسب نما دائرہ کا
نصف قطر ہو۔

فرض کرو کہ خط دائر وا سے شروع
ہوکر مقام وع تک حرکت کرنے سے
زاویہ اوع مرتسم کرتا ہے۔

و کو مرکز مان کر کسی نصف قطر پر ایک دائرہ کھینچو جو خطوط وا اور
وع کو نقاط ا اور ع پر قطع کرے۔

فرض کرو کہ $\angle$ اوب زاویہ نیمقطری ہے یعنی قوس اب
نصف قطر دائرہ کے برابر ہے۔

بحکم اقلیدس م ۶ ش ۳۳

$$\frac{\angle \text{اوع}}{\text{زاویہ نیمقطری}} = \frac{\angle \text{اوع}}{\angle \text{اوب}} = \frac{\text{قوس اع}}{\text{قوس اب}} = \frac{\text{قوس اع}}{\text{نصف قطر}}$$

$$\text{یعنی } \angle \text{اوع} = \frac{\text{قوس اع}}{\text{نصف قطر}} \times \text{زاویہ نیمقطری}$$

جس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

۴۲۔ مثال ۱۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہے اس کی ۱ فٹ قوس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر زاویہ دریافت کرو۔

$$\text{زاویہ میں نیمقطری زاویوں کی تعداد} = \frac{\text{قوس}}{\text{نصف قطر}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{اس لئے زاویہ مجوزہ} = \frac{1}{3} \text{ نیمقطری}$$

$= \frac{1}{\pi} \times \frac{2}{\pi}$ زاویہ قائمہ

$= \frac{2}{\pi^2} \times 90^\circ = \frac{560^\circ}{\pi} = 19\frac{1}{11}^\circ$ اگر π کو $\frac{22}{7}$ کے برابر فرض کیا جائے

مثال ۲۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۵ فٹ ہے اگر اس کی ایک قوس کے مقابل مرکزی زاویہ $33^\circ\ 15'$ ہو تو قوس کا طول دریافت کرو۔

فرض کرو کہ طول مطلوب لا فٹ ہے۔

اس لئے $\frac{لا}{5}$ = زاویہ $33^\circ\ 15'$ میں نیمقطری زاویوں کی تعداد

$= \frac{33\frac{1}{4}}{180}\pi$ (دفعہ ۲۱)

$= \frac{133}{720}\pi$

اس لئے لا $= \frac{133}{144}\pi$ فٹ $= \frac{133}{144} \times \frac{22}{7}$ فٹ تقریباً

$= 2\frac{65}{72}$ فٹ تقریباً

مثال ۳۔ فرض کرو کہ سورج اور زمین کے درمیان اوسط فاصلہ ۹۲۵۰۰۰۰۰ میل ہے اور سورج ایک شخص کی آنکھ پر $32'$ کا زاویہ بناتا ہے، سورج کا قطر دریافت کرو۔

فرض کرو کہ میلوں میں سورج کا قطر ق ہے

چونکہ سورج کے محاذی زاویہ نہایت چھوٹا ہے اس لئے اس کا قطر ایک ایسے دائرہ کی چھوٹی سی قوس کے برابر ہے جس کا مرکز دیکھنے والے کی آنکھ ہے۔ نیز ہمیں معلوم ہے کہ اس دائرہ کے مرکز پر سورج کے مقابل زاویہ $32'$ بنتا ہے۔

اس لئے بموجب دفعہ ۲۳

$\frac{ق}{۹۲۵.....}$ = نیمقطری زاویوں کی تعداد ۳۲′ میں

= نیمقطری زاویوں کی تعداد $\frac{۸}{۱۵}$° میں

$= \frac{۸}{۱۵} \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi ۲}{۶۷۵}$

اس لئے ق = $\frac{۱۸۵......}{۶۷۵}$ π میل

$= \frac{۱۸۵......}{۶۷۵} \times \frac{۲۲}{۷}$ میل تقریباً

= ۸۶۲۰۰۰ میل تقریباً

مثال ۴۔ فرض کرو کہ ایک درست بینائی والا شخص چھاپہ کے حروف کو اتنے فاصلہ سے پڑھ سکتا ہے کہ حروف کے محاذی اس کی آنکھ پر ۵′ کا زاویہ بنتا ہے اُن حروف کی اونچائی دریافت کرو جو وہ مفصلہ ذیل فاصلوں سے پڑھ سکتا ہے (۱) ۱۲ فٹ (۲) $\frac{۱}{۴}$ میل

فرض کرو کہ لا فٹ مطلوبہ اونچائی ہے۔

پہلی صورت میں لا تقریباً ایک ایسے دائرہ کی قوس کے برابر ہے جس کا نصف قطر ۱۲ فٹ ہے اور جس کے مرکز پر قوس کے محاذی زاویہ ۵′ بنتا ہے

اس لئے $\frac{لا}{۱۲}$ = تعداد نیمقطری زاویوں کی ۵′ میں

$= \frac{۱}{۱۲} \times \frac{\pi}{۱۸۰}$

اس لئے لا = $\frac{\pi}{۱۸۰}$ فٹ = $\frac{۱}{۱۸۰} \times \frac{۲۲}{۷}$ فٹ تقریباً

$= \frac{۱}{۱۵} \times \frac{۲۲}{۷}$ انچ = $\frac{۱}{۵}$ انچ تقریباً

دوسری صورت میں اگر اونچائی ما ہو تو

$\frac{ما}{۳ \times ۴۴۰}$ = تعداد نیمقطری زاویوں کی ۵′ میں

$$= \frac{\pi}{180} \times \frac{1}{12}$$

اس لئے ا $= \frac{11}{18}\pi = \frac{11}{18} \times \frac{22}{7}$ فٹ تقریباً

= ۲۳ انچ تقریباً

امثلہ نمبری ۴

[فرض کرو کہ π = ... ۳و۱۴۱۵۹ اور $\frac{1}{\pi}$ = ء۳۱۸۳۱]

۱- کسی دائرہ میں ایک قوس کا طول نصف قطر کا ۷۵۳۵ء گنا ہے ، اسکے محاذی مرکز پر جو زاویہ بنے اس میں انگریزی درجوں کی تعداد دریافت کرو

۲- کسی دائرہ کا نصف قطر ۲۵ فٹ ہے ، ایک ۱۵ فٹ قوس سے محاذی دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ بنے اس میں نیم قطری زاویوں اور انگریزی درجوں کی تعداد دریافت کرو۔

۳- ایک دائرہ کے بیرونی کنارہ پر درجے بنے ہوئے ہیں، اس میں ہر ایک درجہ کی زاوی قیمت ۵َ ہے اور آپس میں درجوں کا فاصلہ ۱ء انچ ہے ، دائرہ کا نصف قطر معلوم کرو۔

۴- ایک درجہ دار دائرہ کا قطر ۶ فٹ ہے اور ہر ایک درجہ کی زاوی قیمت ۵َ ہے، متصل درجوں کا فاصلہ دریافت کرو۔

۵- اگر ایک کرہ کے ایک ہی نصف النہار پر دو مقامات کے عرضوں کا فرق ۱۰َ ۱ً ہو اور مقامات کے درمیان فاصلہ $\frac{1}{4}$ انچ ہو تو کرہ کا نصف قطر دریافت کرو۔

۶- فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہے۔ دو ایسے مقامات کے عرض بلد

کا فرق معلوم کرو جن میں سے ایک مقام دوسرے مقام کی نسبت ۱۰۰ میل شمال کی طرف واقع ہو۔

۷۔ فرض کرو کہ زمین ایک کرہ ہے اور اس کے دوائر متوازی العرض کے درمیان فاصلہ $\frac{1}{9}$ ۶۹ میل ہے اور اس فاصلہ کے محاذی زمین کے مرکز پر زاویہ ۱° بنتا ہے، زمین کا نصف قطر دریافت کرو۔

۸۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہے اگر اُس کی ایک قوس کے وتر کا طول بھی ۳ فٹ ہو تو قوس کے طول کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۹۔ دو دائروں کے مرکزوں پر مساوی قوسوں کے محاذی زاویے ۶۰° اور ۷۵° بنتے ہیں اُن کے نصف قطروں کی باہمی نسبت دریافت کرو

۱۰۔ ایک دائرہ کا قطر ۸ فٹ ہے اگر اُس کی ۱۰ فٹ قوس کے محاذی مرکزی زاویہ ۱۴۳° ۱۴′ ۲۲″ بنے تو π کی قیمت ۴ مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو۔

۱۱۔ ایک دائرہ کے محیط کو ایسے پانچ حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جو سلسلہ حسابیہ میں ہیں اگر سب سے بڑا حصہ سب سے چھوٹے کا ۶ گنا ہو تو حصوں کے محاذی مرکزی زاویوں کی مقداروں کو نیمقطری زاویوں میں دریافت کرو

۱۲۔ ایک قطاع دائرہ کے احاطہ کرنے والے خطوط کا مجموعہ ایک ایسی نصف دائرہ قوس کے برابر ہے جس کا نصف قطر وہی ہے جو دائرہ کا ہے، قطاع کے زاویہ کو انگریزی درجوں، دقیقوں، ثانیوں میں تعبیر کرو۔

۱۳۔ ایک آدمی کا قد ۶ فٹ ہے کتنے فاصلہ پر اُس کے محاذی ۱۰′ کا زاویہ بنے گا؟

۱۴۔ ایک شے کے محاذی ایک میل کے فاصلہ پر ۱′ کا زاویہ بنتا ہے

اُس کی اونچائی دریافت کرو۔

۱۵۔ ایک کرہ کا قطر ۵ ½ انچ ہے، معلوم کرو کہ کتنے فاصلہ پر اُس کے محاذی ۶ً کا زاویہ بنے گا؟

۱۶۔ ایک مینار کی اونچائی ۱۵ فٹ ہے اور ایک آنکھ پر اُس کے محاذی زاویہ ۵ $\frac{5}{11}$ً بنتا ہے، مینار اور آنکھ کے درمیان جو فاصلہ ہو اُس کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۱۷۔ کسی گرجے کے مینار کی اونچائی ۱۰۰ فٹ ہے اور ایک آنکھ پر اُسکے محاذی زاویہ ۹ً بنتا ہے آنکھ اور گرجے کے درمیان جو فاصلہ ہو اُس کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۱۸۔ ایک سطح مائل کا چڑھاؤ ۲۱۰ گز طول میں ۳ ½ فٹ ہے سطح افقی سے اُس کے میلان کی تقریبی قیمت دقیقوں میں معلوم کرو۔

۱۹۔ فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر ۳۹۶۰ میل ہے اور چاند کا فاصلہ زمین سے زمین کے نصف قطر کا ۶۰ گنا ہے، اگر چاند کا نصف قطر زمین پر زاویہ ۱۶ً بنائے تو اُس کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۲۰۔ جب کسی خاص مقام پر چاند غروب ہو رہا ہو تو زمین کا نصف قطر جو مقام مختص میں سے گزرتا ہے چاند کے مرکز پر ۵۷ً کا زاویہ بناتا ہے۔ اگر زمین کا نصف قطر ۳۹۶۰ میل فرض کیا جائے تو چاند اور زمین کے فاصلے کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

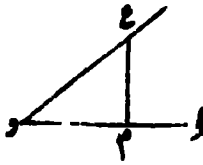
۲۱۔ فرض کرو کہ زمین کے نصف قطر کے محاذی سورج کے فاصلے پر زاویہ ۸ً۷۶ بنتا ہے اور ایک جغرافی میل کے مقابل زمین کے مرکز پر زاویہ ۱ً بنتا ہے تو ثابت کرو کہ سورج کا فاصلہ زمین سے تقریباً

۸۱۰ لاکھ جغرافی میل ہے انیز زمین کا قطر اور محیط دونوں جغرافی میلوں میں دریافت کرو۔

۴۲۔ مدار زمین کا نصف قطر ۹۲۷۰۰۰۰۰ میل ہے اور اُس کے محاذی ستارہ شعریٰ (سریس) پر زاویہ ۴ء۰″ بنتا ہے ستارہ کا فاصلہ تقریباً دریافت کرو۔

باب دوم

ایسے زاویوں کی مثلثی نسبتیں جو زاویہ قائمہ سے کم ہیں

۲۵- اس باب میں ہم صرف اُن زاویوں کے متعلق بحث کرینگے جو زاویہ قائمہ سے کم ہوں۔

فرض کرو کہ ایک خط دائر وع مقام وا سے چکر لگاتا ہوا مقام وع پر پہنچتا ہے۔ اور زاویہ اوع مرتسم کرتا ہے۔ خط دائر پر ایک نقطہ ع مقرر کرو اور خط ابتدائی وا پر اس سے عمود نکالو۔

مثلث م وع میں وع وتر ہے، ع م عمود اور وم قاعدہ۔

زاویہ اوع کی مثلثی نسبتوں یا جملوں کی تعریف اکثر اس طرح کرتے ہیں

$\frac{\text{مع}}{\text{وع}}$ یعنی $\frac{\text{عمود}}{\text{وتر}}$ کو جیب زاویہ اوع کی کہتے ہیں

$\frac{\text{وم}}{\text{وع}}$ " $\frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}}$ کو جیب التمام زاویہ اوع کی کہتے ہیں

$\frac{\text{مع}}{\text{وم}}$ " $\frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}}$ کو مماس زاویہ اوع کا کہتے ہیں

$\frac{\text{وم}}{\text{مع}}$ " $\frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}}$ کو مماس التمام زاویہ اوع کا کہتے ہیں

$\frac{\text{و ع}}{\text{م ع}}$ یعنی $\frac{\text{وتر}}{\text{عمود}}$ کو قاطع التمام زاویہ اوع کا کہتے ہیں

$\frac{\text{و ع}}{\text{و م}}$ " $\frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}}$ کو قاطع " " " "

اُس مقدار کو بقدر جس کے جیب التمام ایک سے کم ہو یعنی مقدار
۱ - جم اوع کو سہم الجیب یا جیب معکوس زاویہ اوع کی کہتے ہیں۔
نیز اُس مقدار کو بقدر جس کے جیب زاویہ ایک سے کم ہو یعنی
۱ - جب اوع کو سہم التمام زاویہ اوع کا کہتے ہیں۔

۲۶ - یہ یاد رکھنا چاہیئے کہ مثلثی نسبتیں سب اعداد ہیں۔
اوپر کی آٹھ نسبتوں کو اختصار کی خاطر بالترتیب یوں لکھتے ہیں
جب اوع، جم اوع، مس اوع، مم اوع، قم اوع،
قط اوع، سہ اوع، سم اوع۔
آخری دو نسبتیں شاذ و نادر استعمال ہوتی ہیں

۲۷ - تعریفات سے ظاہر ہے کہ قاطع التمام جیب کا متکافی یا مقلوب ہے۔

$$\text{یعنی قم اوع} = \frac{1}{\text{جب اوع}}$$

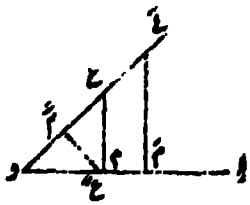
اسیطرح سے قاطع زاویہ جیب التمام کا مقلوب ہے یعنی

$$\text{قط اوع} = \frac{1}{\text{جم اوع}}$$

اور مماس التمام مماس کا مقلوب ہے یعنی

$$\text{مم اوع} = \frac{1}{\text{مس اوع}}$$

۲۸۔ ثابت کرو کہ ایک زاویہ کی مثلثی نسبتیں ہمیشہ وہی رہتی یعنی جب تک زاویہ نہ بدلے وہ نہیں بدلتیں۔

یہ ثابت کرنا مطلوب ہے کہ اگر خط دائر وع میں کوئی اور نقطہ عَ لیا جائے اور اُس سے وا پر عمود عَمَ نکالا جائے تو مثلثی نسبتیں جو مثلثات وعَمَ اور وعم سے حاصل ہونگی وہ قیمت میں جداگانہ ایک دوسرے کے برابر ہونگی۔

ان مثلثوں میں زاویہ و مشترک ہے م اور مَ پر کے دونوں زاویئے قائمے ہیں۔ معلوم ہوا کہ یہ مثلث متشابہ ہیں اور اسلیئے بحکم اقلیدس م ۶ ش ۴، $\frac{\text{مع}}{\text{وع}} = \frac{\text{مَعَ}}{\text{وعَ}}$ جس سے ثابت ہوا کہ زاویہ اوع کی جیب ہمیشہ وہی رہتی ہے خواہ کوئی سا نقطہ خط دائر پر لیا جائے۔

اور چونکہ بموجب مسئلہ مذکورہ

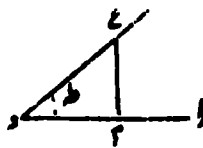
$$\frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \frac{\text{ومَ}}{\text{وعَ}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{مع}}{\text{وم}} = \frac{\text{مَعَ}}{\text{ومَ}}$$

اس سے ظاہر ہے کہ جیب التمام اور مماس زاویہ بھی ہمیشہ وہی رہتے ہیں خواہ نقطہ خط دائر پر کہیں لیا جاوے اور باقی نسبتوں کی بھی

یہی کیفیت ہے۔
اگر د ا کو خط دائر خیال کریں اور اس کے کسی نقطہ عؔ سے وع پر عمود عؔ مؔ نکالیں تو مثلث دعؔ مؔ سے جو نسبتیں حاصل ہونگی ان کی قیمتیں بھی وہی ہونگی جو اوپر بیان ہوئیں۔
کیونکہ دو مثلثات وعم اور وعؔ مؔ میں زاویہ د مشترک ہے اور زاوئے وم̃ عؔ اور وم ع قائمے ہیں، اس سے ظاہر ہے کہ یہ دونوں مثلث متساوی الزاویا اور اسلئے متشابہ ہیں۔ اس لئے

$$\frac{\text{مؔ عؔ}}{\text{دعؔ}} = \frac{\text{م ع}}{\text{وع}} \text{ اور } \frac{\text{ومؔ}}{\text{وعؔ}} = \frac{\text{وم}}{\text{وع}}$$

۲۹۔ مثلثی نسبتوں کے اساسی ارتباطات

ہمیں آگے چلکر معلوم ہوگا کہ اگر کسی زاویہ کی ایک مثلثی نسبت معلوم ہو تو باقی سب نسبتوں کی عددی قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔
فرض کرو کہ طہ زاویہ ا و ع کو تعبیر کرتا ہے۔ [طہ کو ہم "تاہ" پڑھینگے]
مثلث م و ع میں بحکم اقلیدس م اش ۴۷

$$\text{م ع}^2 + \text{وم}^2 = \text{وع}^2 \quad \ldots\ldots (1)$$

وع² پر تقسیم کرنے سے

$$1 = \left(\frac{\text{وم}}{\text{وع}}\right)^2 + \left(\frac{\text{م ع}}{\text{وع}}\right)^2$$

یعنی $(\text{جب طہ})^2 + (\text{جم طہ})^2 = 1$

مقدار (جب طہ)۲ کو جب۲ طہ لکھتے ہیں اور اسی طرح باقی سب نسبتوں کو۔

پس یہ ربط حاصل ہوا جب۲ طہ + جم۲ طہ = ۱ ..... (۲)

نیز طرفین مساوات (۱) کو وم۲ پر تقسیم کرنے سے

$$\left(\frac{\text{م ع}}{\text{و م}}\right)^۲ + ۱ = \left(\frac{\text{و ع}}{\text{و م}}\right)^۲$$

یعنی (مس طہ)۲ + ۱ = (قط طہ)۲

پس قط۲ طہ = ۱ + مس۲ طہ .... (۳)

طرفین مساوات (۱) کو م ع۲ پر تقسیم کرنے سے

$$۱ + \left(\frac{\text{و م}}{\text{م ع}}\right)^۲ = \left(\frac{\text{و ع}}{\text{م ع}}\right)^۲$$

یعنی ۱ + (مم طہ)۲ = (قم طہ)۲

پس قم۲ طہ = ۱ + مم۲ طہ .... (۴)

نیز چونکہ جب طہ = $\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}}$ اور جم طہ = $\frac{\text{و م}}{\text{و ع}}$

اس لئے $\frac{\text{جب طہ}}{\text{جم طہ}} = \frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} \div \frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \frac{\text{م ع}}{\text{و م}} =$ مس طہ

اسلئے مس طہ = $\frac{\text{جب طہ}}{\text{جم طہ}}$ .... (۵)

اور اسیطرح سے مم طہ = $\frac{\text{جم طہ}}{\text{جب طہ}}$ .... (۶)

۳۶- مثال ۱- ثابت کرو کہ $\sqrt{\dfrac{۱ - \text{جم ا}}{۱ + \text{جم ا}}} = \text{قم ا} - \text{مم ا}$

$$\sqrt{\frac{۱ - \text{جم ا}}{۱ + \text{جم ا}}} = \sqrt{\frac{(۱ - \text{جم ا})^{۲}}{۱ - \text{جم}^{۲}\,\text{ا}}}$$

$$= \frac{۱ - \text{جم ا}}{\sqrt{۱ - \text{جم}^{۲}\,\text{ا}}} = \frac{۱ - \text{جم ا}}{\text{جب ا}}$$ بموجب نتیجہ (۲) دفعہ آخر

$$= \frac{۱}{\text{جب ا}} - \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}} = \text{قم ا} - \text{مم ا}$$

مثال ۲- ثابت کرو کہ $\sqrt{\text{قط}^{۲}\,\text{ا} + \text{قم}^{۲}\,\text{ا}} = \text{مس ا} + \text{مم ا}$

ہم نے اوپر ثابت کیا ہے کہ $\text{قط}^{۲}\,\text{ا} = ۱ + \text{مس}^{۲}\,\text{ا}$

اور $\text{قم}^{۲}\,\text{ا} = ۱ + \text{مم}^{۲}\,\text{ا}$

اس لئے $\text{قط}^{۲}\,\text{ا} + \text{قم}^{۲}\,\text{ا} = \text{مس}^{۲}\,\text{ا} + ۲ + \text{مم}^{۲}\,\text{ا}$

$$= \text{مس}^{۲}\,\text{ا} + ۲\,\text{مس ا مم ا} + \text{مم}^{۲}\,\text{ا}$$

$$= (\text{مس ا} + \text{مم ا})^{۲}$$

اس لئے $\sqrt{\text{قط}^{۲}\,\text{ا} + \text{قم}^{۲}\,\text{ا}} = \text{مس ا} + \text{مم ا}$

مثال ۳- ثابت کرو کہ $(\text{قم ا} - \text{جب ا})(\text{قط ا} - \text{جم ا})(\text{مس ا} + \text{مم ا}) = ۱$

جملہ مجوزہ $= \left(\dfrac{۱}{\text{جب ا}} - \text{جب ا}\right)\left(\dfrac{۱}{\text{جم ا}} - \text{جم ا}\right)\left(\dfrac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} + \dfrac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}}\right)$

$$= \frac{۱ - \text{جب}^{۲}\,\text{ا}}{\text{جب ا}} \times \frac{۱ - \text{جم}^{۲}\,\text{ا}}{\text{جم ا}} \times \frac{\text{جب}^{۲}\,\text{ا} + \text{جم}^{۲}\,\text{ا}}{\text{جب ا جم ا}}$$

$$= \frac{\text{جم}^{۲}\,\text{ا}}{\text{جب ا}} \times \frac{\text{جب}^{۲}\,\text{ا}}{\text{جم ا}} \times \frac{۱}{\text{جب ا جم ا}} = ۱$$

امثلہ نمبری ۵

ارتباطات ذیل کو ثابت کرو

۱- $\text{جم}^{4}\,\text{ا} - \text{جب}^{4}\,\text{ا} + ۱ = ۲\,\text{جم}^{2}\,\text{ا}$

۲- $(\text{جب ا} + \text{جم ا})(۱ - \text{جب ا جم ا}) = \text{جب}^{3}\,\text{ا} + \text{جم}^{3}\,\text{ا}$

۳- $$\frac{\text{جب ا}}{۱ + \text{جم ا}} + \frac{۱ + \text{جم ا}}{\text{جب ا}} = ۲\,\text{قم ا}$$

۴- $\text{جم}^{6}\,\text{ا} + \text{جب}^{6}\,\text{ا} = ۱ - ۳\,\text{جب}^{2}\,\text{ا} \times \text{جم}^{2}\,\text{ا}$

۵- $$\sqrt{\frac{۱ - \text{جب ا}}{۱ + \text{جب ا}}} = \text{قط ا} - \text{مس ا}$$

۶- $$\frac{\text{قم ا}}{\text{قم ا} - ۱} + \frac{\text{قم ا}}{\text{قم ا} + ۱} = ۲\,\text{قط}^{2}\,\text{ا}$$

۷- $$\frac{\text{قم ا}}{\text{مم ا} + \text{مس ا}} = \text{جم ا}$$

۸- $(\text{قط ا} + \text{جم ا})(\text{قط ا} - \text{جم ا}) = \text{مس}^{2}\,\text{ا} + \text{جب}^{2}\,\text{ا}$

۹- $$\frac{۱}{\text{مم ا} + \text{مس ا}} = \text{جب ا جم ا}$$

۱۰- $$\frac{۱}{\text{قط ا} - \text{مس ا}} = \text{قط ا} + \text{مس ا}$$

۱۱- $$\frac{۱ - \text{مس ا}}{۱ + \text{مس ا}} = \frac{\text{مم ا} - ۱}{\text{مم ا} + ۱}$$

۱۲- $$\frac{۱ + \text{مس}^{2}\,\text{ا}}{۱ + \text{مم}^{2}\,\text{ا}} = \frac{\text{جب}^{2}\,\text{ا}}{\text{جم}^{2}\,\text{ا}}$$

۱۳- (قط ا - مس ا)/(قط ا + مس ا) = ۱ - ۲ قط ا مس ا + ۲ مس^۲ ا

۱۴- مس ا/(۱ - مم ا) + مم ا/(۱ - مس ا) = قط ا قم ا + ۱

۱۵- جم ا/(۱ - مس ا) + جب ا/(۱ - مم ا) = جب ا + جم ا

۱۶- (جب ا + جم ا)(مم ا + مس ا) = قط ا + قم ا

۱۷- قط^۴ ا - قط^۲ ا = مس^۴ ا + مس^۲ ا

۱۸- مم^۴ ا + مم^۲ ا = قم^۴ ا - قم^۲ ا

۱۹- √(قم^۲ ا - ۱) = جم ا قم ا

۲۰- قط^۲ ا قم^۲ ا = مس^۲ ا + مم^۲ ا + ۲

۲۱- مس^۲ ا - جب^۲ ا = جب^۲ ا قط^۲ ا

۲۲- (۱ + مم ا - قم ا)(۱ + مس ا + قط ا) = ۲

۲۳- ۱/(قم ا - مم ا) - ۱/جب ا = ۱/جب ا - ۱/(قم ا + مم ا)

۲۴- (مم ا جم ا)/(مم ا + جم ا) = (مم ا - جم ا)/(مم ا جم ا)

۲۵- (مم ا + مس ب)/(مم ب + مس ا) = مم ا مس ب

۲۶- (۱/(قط^۲ عہ - جم^۲ عہ) + ۱/(قم^۲ عہ - جب^۲ عہ)) جم^۲ عہ جب^۲ عہ = (۱ - جم^۲ عہ جب^۲ عہ)/(۲ + جم^۲ عہ جب^۲ عہ)

۲۷- جب^۶ ا - جم^۶ ا = (جب^۲ ا - جم^۲ ا)(۱ - ۲ جب^۲ ا جم^۲ ا)

۲۸- (جم ا قم ا - جب ا قط ا)/(جم ا + جب ا) = قم ا - قط ا

۲۹۔ $\frac{\text{مس ا + قط ا - ۱}}{\text{مس ا - قط ا + ۱}} = \frac{\text{۱ + جب ا}}{\text{جم ا}}$

۳۰۔ (مس ع + قم ب)^2 - (مم ب - قط ع)^2 = ۲ مس ع مم ب (قم ع + قط ب)

۳۱۔ ۲ قط^2 ع - قط^4 ع - ۲ قم^2 ع + قم^4 ع = مم^4 ع - مس^4 ع

۳۲۔ (جب ع + قم ع)^2 + (جم ع + قط ع)^2 = مس^2 ع + مم^2 ع + ۷

۳۳۔ (قم ا + مم ا) سم ا - (قط ا + مس ا) سه ا = (قم ا - قط ا) (۲ سه ا سم ا)

۳۴۔ (۱ + مم ا + مس ا) (جب ا - جم ا) = $\frac{\text{قط ا}}{\text{قم}^2\text{ ا}} - \frac{\text{قم ا}}{\text{قط}^2\text{ ا}}$

۳۵۔ ۲ سه ا + جم^2 ا = ۱ + سه^2 ا

۱۳۔ مثلثی نسبتوں کی قیمتوں کی حدود

مساوات (۲) دفعہ ۲۹ سے

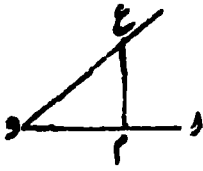
جب^2 طہ + جم^2 طہ = ۱

اب چونکہ جب^2 طہ اور جم^2 طہ دونوں مربعے ہیں اس لئے ضروری ہے کہ وہ مثبت ہوں اور چونکہ ان کا مجموعہ ایک کے برابر ہے۔ اس لئے ظاہر ہے کہ ان میں سے کوئی بھی ایک سے بڑا نہیں ہو سکتا۔

[کیونکہ اگر ان میں سے ایک مربع مثلاً جب^2 طہ ایک سے بڑا ہو تو ضرور ہے کہ دوسرا منفی ہو اور یہ غیر ممکن ہے]

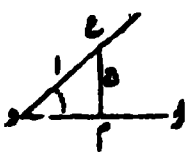
پس معلوم ہوا کہ جیب اور جیب التمام دونوں میں سے کوئی بھی تعداداً ایک سے بڑی نہیں ہو سکتی۔

اب چونکہ جب طہ ایک سے بڑی نہیں ہو سکتی اس لئے قم طہ جو $\frac{1}{\text{جب طہ}}$ کے برابر ہے ایک سے کم نہیں ہو سکتا۔
اسی طرح سے قعاطہ جو $\frac{1}{\text{جم طہ}}$ کے برابر ہے تعداداً ایک سے کم نہیں ہو سکتا۔

۳۲ ۔ شکل دفعہ ہذا سے نتائج مذکورہ بالا بآسانی حاصل ہوتے ہیں ۔ کیونکہ زاویہ ا و ع کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو اضلاع وم اور م ع طول میں وتر وع سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتے ۔

اب چونکہ م ع وتر وع سے کبھی بڑا نہیں ہو سکتا اس لئے نسبت $\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}}$ ایک سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتی، اس سے ظاہر ہے کہ جیب زاویہ ایک سے کبھی بڑھ نہیں سکتی ۔

نیز چونکہ وم وتر وع سے ہمیشہ کم رہتا ہے اس لئے نسبت $\frac{\text{وم}}{\text{وع}}$ ایک سے ہمیشہ کم رہے گی یعنی جیب التمام ایک سے کبھی زیادہ نہ ہوگی ۔

۳۳ ۔ ہم کسی زاویہ کی مثلثی نسبتوں کو کسی ایک نسبت کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں، اس ترکیب عمل کی توضیح امثلہ ذیل سے ہوگی ۔

مثال ا ۔ کسی زاویہ کی مثلثی نسبتوں کو جیب کی رقوم میں بیان کرو

فرض کرو کہ ا و ع کوئی زاویہ طہ ہے اور وع کا طول ایک ہے اور ع م کا متناسب طول ج ہے ۔

$$\text{اقلیدس م ا ش ۴۷ سے و م} = \sqrt{\text{و ع}^2 - \text{م ع}^2} = \sqrt{۱ - \text{ج}^2}$$

$$\text{اس لئے جب ط} = \frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} = \frac{\text{ج}}{۱} = \text{ج}$$

$$\text{جم ط} = \frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \sqrt{۱ - \text{ج}^2} = \sqrt{۱ - \text{جب}^2\,\text{ط}}$$

$$\text{مس ط} = \frac{\text{م ع}}{\text{و م}} = \frac{\text{ج}}{\sqrt{۱ - \text{ج}^2}} = \frac{\text{جب ط}}{\sqrt{۱ - \text{جب}^2\,\text{ط}}}$$

$$\text{ظم ط} = \frac{\text{و م}}{\text{م ع}} = \frac{\sqrt{۱ - \text{ج}^2}}{\text{ج}} = \frac{\sqrt{۱ - \text{جب}^2\,\text{ط}}}{\text{جب ط}}$$

$$\text{قم ط} = \frac{\text{و ع}}{\text{م ع}} = \frac{۱}{\text{ج}} = \frac{۱}{\text{جب ط}}$$

$$\text{قط ط} = \frac{\text{و ع}}{\text{و م}} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - \text{ج}^2}} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - \text{جب}^2\,\text{ط}}}$$

آخری پانچ مساواتوں سے جو کچھ مطلوب تھا حاصل ہوا

مثال ۲- سب مثلثی نسبتوں کو مماس التمام کی رقوم میں بیان کرو۔

حسب معمول شکل بناؤ اور فرض کرو کہ م ع کا طول ایک ہے اور و م کا متناسب طول لا ہے

اقلیدس م ا ش ۴۷ سے

$$\text{و ع} = \sqrt{\text{و م}^2 + \text{م ع}^2} = \sqrt{۱ + \text{لا}^2}$$

$$\text{اس لئے ظم ط} = \frac{\text{و م}}{\text{م ع}} = \frac{\text{لا}}{۱} = \text{لا}$$

$$\text{جب ط} = \frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{لا}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{مم}^2\text{ط}}}$$

$$\text{جم ط} = \frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{1+\text{لا}^2}} = \frac{\text{مم ط}}{\sqrt{1+\text{مم}^2\text{ط}}}$$

$$\text{مس ط} = \frac{\text{م ع}}{\text{و م}} = \frac{1}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{مم ط}}$$

$$\text{قط ط} = \frac{\text{و ع}}{\text{و م}} = \frac{\sqrt{1+\text{لا}^2}}{\text{لا}} = \frac{\sqrt{1+\text{مم}^2\text{ط}}}{\text{مم ط}}$$

$$\text{اور قم ط} = \frac{\text{و ع}}{\text{م ع}} = \frac{\sqrt{1+\text{لا}^2}}{1} = \sqrt{1+\text{مم}^2\text{ط}}$$

جو کچھ مطلوب تھا آخری پانچ مساواتوں سے حاصل ہوا

یاد رہے کہ اوپر کی ہر ایک صورت میں اُس کسر کا نسب نما جسکی رقوم میں باقی مثلثی نسبتوں کو بیان کرنا مطلوب ہے ہمیشہ ایک لیا گیا ہے مثلاً زاویہ ط کی جیب $\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}}$ ہے۔ اسلئے مثال ۱ میں نسب نما و ع کا طول ایک کے برابر لیا گیا ہے اور چونکہ مماس التمام $\frac{\text{و م}}{\text{م ع}}$ ہے اسلئے مثال ۲ میں ضلع م ع کو ایک کے مساوی فرض کیا ہے۔

اسی طرح سے اگر باقی مثلثی نسبتوں کو جیب التمام کی رقوم میں بیان کرنا ہو تو چونکہ جیب التمام $\frac{\text{و م}}{\text{و ع}}$ ہے اس لئے و ع کو ایک کے برابر فرض کرنا چاہیئے اور و م کو لا کے، اس کے بعد عمل بالکل ایسا ہی ہوگا جیسا کہ امثلہ ۱ اور ۲ میں ہوا۔

امثلہ ذیل میں اضلاع کی قیمتیں عددی ہیں

مثال ۳۔ اگر جم ط = $\frac{3}{5}$ تو باقی نسبتوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

خط ابتدائی و ا پر و م برابر ۳ کے لو اور ایک عمود م ع کھینچو، نیز فرض کرو کہ ایک خط و ع جس کا طول ۵ ہے نقطہ و کے گرد چکر لگاتا ہوا عمود م ع کو نقطہ ع پر قطع کرتا ہے تب ا و ع زاویہ مجوزہ ہوگا

بحکم اقلیدس م ا ش ۴۷، $\text{م ع} = \sqrt{\text{و ع}^{۲} - \text{و م}^{۲}} = \sqrt{۵^{۲} - ۳^{۲}} = ۴$

اس لئے صریحاً

جب ط $= \frac{۴}{۵}$ ، مس ط $= \frac{۴}{۳}$ ، ظم ط $= \frac{۳}{۴}$ ، قم ط $= \frac{۵}{۴}$ اور قط ط $= \frac{۵}{۳}$

مثال ۴ - اگر زاویہ ط کی جیب $\frac{۱}{۳}$ ہو تو باقی مثلثی نسبتوں کی عددی قیمتیں دریافت کرو۔

چونکہ جیب ط $= \frac{۱}{۳}$ اس لئے ربط (۲) دفعہ ۲۹ سے ظاہر ہے کہ

$$\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲} + \text{جم}^{۲}\,\text{ط} = ۱$$

یعنی $\text{جم}^{۲}\,\text{ط} = ۱ - \frac{۱}{۹} = \frac{۸}{۹}$

یعنی $\text{جم ط} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

اسلئے $\text{مس ط} = \frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$

$$\text{ظم ط} = \frac{۱}{\text{مس ط}} = ۲\sqrt{۲}$$

$$\text{قم ط} = \frac{۱}{\text{جب ط}} = ۳$$

$$\text{قط ط} = \frac{۱}{\text{جم ط}} = \frac{۳}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\text{سہ ط} = ۱ - \text{جم ط} = ۱ - \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\text{سم ط} = ۱ - \text{جب ط} = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

۴۳ - نقشۂ ذیل میں ہر مثلثی نسبت کو باقی سب نسبتوں کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے

	جب ط	جم ط	مس ط	مم ط	قط ط	قم ط
جب ط	جب ط	$\sqrt{1-\text{جم}^2\text{ط}}$	$\frac{\text{مس ط}}{\sqrt{1+\text{مس}^2\text{ط}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\text{مم}^2\text{ط}}}$	$\frac{\sqrt{\text{قط}^2\text{ط}-1}}{\text{قط ط}}$	$\frac{1}{\text{قم ط}}$
جم ط	$\sqrt{1-\text{جب}^2\text{ط}}$	جم ط	$\frac{1}{\sqrt{1+\text{مس}^2\text{ط}}}$	$\frac{\text{مم ط}}{\sqrt{1+\text{مم}^2\text{ط}}}$	$\frac{1}{\text{قط ط}}$	$\frac{\sqrt{\text{قم}^2\text{ط}-1}}{\text{قم ط}}$
مس ط	$\frac{\text{جب ط}}{\sqrt{1-\text{جب}^2\text{ط}}}$	$\frac{\sqrt{1-\text{جم}^2\text{ط}}}{\text{جم ط}}$	مس ط	$\frac{1}{\text{مم ط}}$	$\sqrt{\text{قط}^2\text{ط}-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\text{قم}^2\text{ط}-1}}$
مم ط	$\frac{\sqrt{1-\text{جب}^2\text{ط}}}{\text{جب ط}}$	$\frac{\text{جم ط}}{\sqrt{1-\text{جم}^2\text{ط}}}$	$\frac{1}{\text{مس ط}}$	مم ط	$\frac{1}{\sqrt{\text{قط}^2\text{ط}-1}}$	$\sqrt{\text{قم}^2\text{ط}-1}$
قط ط	$\frac{1}{\sqrt{1-\text{جب}^2\text{ط}}}$	$\frac{1}{\text{جم ط}}$	$\sqrt{1+\text{مس}^2\text{ط}}$	$\frac{\sqrt{1+\text{مم}^2\text{ط}}}{\text{مم ط}}$	قط ط	$\frac{\text{قم ط}}{\sqrt{\text{قم}^2\text{ط}-1}}$
قم ط	$\frac{1}{\text{جب ط}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\text{جم}^2\text{ط}}}$	$\frac{\sqrt{1+\text{مس}^2\text{ط}}}{\text{مس ط}}$	$\sqrt{1+\text{مم}^2\text{ط}}$	$\frac{\text{قط ط}}{\sqrt{\text{قط}^2\text{ط}-1}}$	قم ط

امثلہ نمبری ۶

۱۔ سب مثلثی نسبتوں کو جیب التمام کی رقوم میں بیان کرو

۲۔ سب نسبتوں کو مماس کی رقوم میں بیان کرو

۳۔ سب نسبتوں کو قاطع التمام کی رقوم میں بیان کرو

۴۔ سب نسبتوں کو قاطع الزاویہ کی رقوم میں بیان کرو

۵۔ ایک زاویہ کی جیب $\frac{۱}{۴}$ ہے اسکی اور مثلثی نسبتوں کی عددی قیمتیں دریافت کرو۔

۶۔ اگر جیب طہ = $\frac{۱۲}{۱۳}$ تو مس طہ اور سمہ طہ کی قیمتیں دریافت کرو

۷۔ اگر جیب طہ = $\frac{۱۱}{۶۱}$ تو مس طہ، جم طہ اور قط طہ دریافت کرو

۸۔ اگر جم طہ = $\frac{۳}{۵}$ تو معلوم کرو جیب طہ اور مم طہ

۹۔ اگر جم ا = $\frac{۹}{۱۴}$ تو مس ا اور قم ا دریافت کرو

۱۰۔ اگر مس طہ = $\frac{۳}{۴}$ تو زاویہ طہ کی جیب، جم، سمہ اور قم دریافت کرو

۱۱۔ اگر مس طہ = $\frac{۱}{\sqrt{۷}}$ تو $\frac{\text{قم}^۲\text{طہ} - \text{قط}^۲\text{طہ}}{\text{قم}^۲\text{طہ} + \text{قط}^۲\text{طہ}}$ کی قیمت دریافت کرو

۱۲۔ اگر مم طہ = $\frac{۱۵}{۸}$ تو جم طہ اور قم طہ کی قیمتیں دریافت کرو

۱۳۔ اگر قط ا = $\frac{۳}{۲}$ تو معلوم کرو مس ا اور قم ا۔

۱۴۔ اگر ۲ جیب طہ = ۲ ۔ جم طہ تو جیب طہ دریافت کرو۔

۱۵۔ اگر ۸ جیب طہ = ۴ + جم طہ تو معلوم کرو جیب طہ۔

۱۶۔ اگر مس طہ + قط طہ = ۱٫۵ تو معلوم کرو جیب طہ

۱۷۔ اگر مم طہ + قم طہ = ۵ تو معلوم کرو جم طہ۔

اگر ۳ قطا^۲ طہ + ۸ = ۱۰ قط^۲ طہ تو مس طہ کی قیمت دریافت کرو۔

اگر مس^۲ طہ + قطا طہ = ۵ تو معلوم کرو جم طہ

اگر مس طہ + مم طہ = ۲ تو معلوم کرو جب طہ۔

اگر قطا^۲ طہ = ۲ + ۲ مس طہ تو معلوم کرو مس طہ۔

اگر مس طہ = $\frac{۲ لا (لا + ۱)}{۲ لا + ۱}$ تو معلوم کرو جب طہ اور جم طہ

۔ اب ہم چند کارآمد زاویوں کی مثلثی نسبتیں دریافت کرینگے،
ت میں یہ اکثر استعمال ہوتی ہیں۔ طالب علم کو ان سے
واقف ہونا چاہیئے مگر سب سے پہلے ہم "لاتناہی" کے
یان کرینگے۔

ب۔ ہماری موجودہ اغراض کے لئے یہ تعریف کافی ہوگی کہ
تناہی ایک ایسا عدد ہے جو کسی اور عدد سے جو بیان
، یا ذہن میں آسکے بڑا ہو، اس کو ہم علامت ∞ سے تعبیر
گے۔

ے سے بڑے عدد کا تصور باندھنا محض ناممکن ہے کیونکہ
ے عدد کا خیال میں آنا ممکن ہو تو اس سے بڑے عدد کے
یں کیا مشکل ہوسکتی ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ
تناہی بڑا عدد کیوں نہ لیا جائے وہ لاتناہی سے ہمیشہ
یگا۔ پس ایسے بیانات مثلاً لا = ∞ کا یہ مطلب ہرگز نہیں
تناہی کی کوئی خاص قیمت ہے اور لا اس کے برابر ہے
اولات لا = ∞ اور ما = ∞ سے یہ نتیجہ لازماً صادق نہیں

آسانا کہ لا = ما

تعریف۔ صفر وہ عدد ہے جو ایک کی ہر ایک کسر مقررہ سے کم ہو۔ مقدار محدود وہ ہے جو نہ تو صفر ہو اور نہ مقدار غیر متناہی۔

۳۶ـ اگر کسی محدود مقدار کو صفر پر تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت مقدار غیر متناہی کے برابر ہوگا۔

فرض کرو کہ ا کوئی مقدار محدود ہے ہم یہ ثابت کرینگے کہ ا ÷ صفر ایک ایسی مقدار کے برابر ہے جو ہر ایک مقدار محدود (مثلاً ن) سے جو ہمارے ذہن میں آسکے بڑی ہے۔

ا کو صفر پر تقسیم کرو اور ن کو خارج قسمت ٹھہراؤ

$$\cdot)\,\text{ا}\,(\text{ن}$$

اب چونکہ ۰ × ن = ۰ اسلئے باقی ا ہے

پس معلوم ہوا کہ خواہ کتنا بڑا عدد (ن) بطور خارج قسمت کے لیا جائے ا ہمیشہ باقی بچے گا۔ اس سے ثابت ہوا کہ نسبت ا ÷ صفر ہر ایک عدد سے بڑی ہے خواہ وہ عدد کتنا ہی بڑا کیوں نہ ہو اور اس کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ

$$\text{ا} \div 0 = \infty$$

اور اگر ا مقدار غیر متناہی نہ ہو تو ا ÷ ∞ = ۰

چند کارآمد صورتوں میں مثلثی نسبتوں کی قیمتیں

۳۷ ـ ۴۵° کا زاویہ

فرض کرو کہ زاویہ مرتسمہ ا و ع = ۴۵°

اب چونکہ ایک مثلث کے تینوں

زاویوں کا مجموعہ ۲ قائموں کے برابر ہوتا ہے، اس لئے

زاویہ وعم = ۱۸۰° − زاویہ ع وم − زاویہ ع م و

= ۱۸۰ − ۴۵° − ۹۰° = ۴۵° = زاویہ ع وم

∴ وم = م ع

اگر وع کو ۲ ا کے برابر فرض کریں تو

۴ ا² = وع² = وم² + م ع² = ۲ × وم²

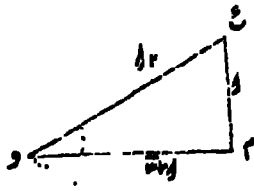
یعنی وم = ا√۲

اس لئے جب ۴۵° = م ع / وع = ا√۲ / ۲ا = ۱ / √۲

جم ۴۵° = وم / وع = ا√۲ / ۲ا = ۱ / √۲

اور مس ۴۵° = ۱

۳۸ - ۳۰° کا زاویہ

فرض کرو کہ ۳۰° کا زاویہ م وع ہے، ع م کو عَ تک خارج کرو اور م عَ کو ع م کے برابر بناؤ۔

مثلث وم ع اور وم عَ میں

اضلاع وم اور م عَ اضلاع وم اور م ع کے بالترتیب برابر ہیں۔ نیز ان کے درمیانی زاویئے قائمے ہیں۔ اس لئے

وعَ = وع اور زاویہ وعَ ع = زاویہ وع عَ = ۶۰°

اس سے معلوم ہوا کہ مثلث عَ وع متساوی الاضلاع ہے۔

آتا کہ لا = ما

تعریف۔ صفر وہ عدد ہے جو ایک کی ہر ایک کسر مقررہ سے کم ہو۔ مقدار محدود وہ ہے جو نہ تو صفر ہو اور نہ مقدار غیر متناہی۔

۳۶۔ اگر کسی محدود مقدار کو صفر پر تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت مقدار غیر متناہی کے برابر ہوگا۔

فرض کرو کہ ا کوئی مقدار محدود ہے ہم یہ ثابت کرینگے کہ ا ÷ صفر ایک ایسی مقدار کے برابر ہے جو ہر ایک مقدار محدود (مثلاً ن) سے جو ہمارے ذہن میں آسکے بڑی ہے۔

ا کو صفر پر تقسیم کرو اور ن کو خارج قسمت ٹھہراؤ $\cdot)\overline{\text{ا}}($ ن

اب چونکہ ۰ × ن = ۰ اسلئے باقی ا ہے

پس معلوم ہوا کہ خواہ کتنا بڑا عدد (ن) بطور خارج قسمت کے لیا جائے ا ہمیشہ باقی بچے گا۔ اس سے ثابت ہوا کہ نسبت ا ÷ صفر ہر ایک عدد سے بڑی ہے خواہ وہ عدد کتنا ہی بڑا کیوں نہ ہو اور اس کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ

$$\text{ا} \div \cdot = \infty$$

اور اگر ا مقدار غیر متناہی نہ ہو تو ا ÷ ∞ = ۰

چند کارآمد صورتوں میں مثلثی نسبتوں کی قیمتیں

۳۷۔ ۴۵° کا زاویہ

فرض کرو کہ زاویہ مرتسمہ ا و ع = ۴۵°

اب چونکہ ایک مثلث کے تینوں

زاویوں کا مجموعہ ۲ قائموں کے برابر ہوتا ہے، اس لئے

زاویہ وع م = ۱۸۰° ـ زاویہ ع وم ـ زاویہ ع م و

= ۱۸۰ ـ ۴۵° ـ ۹۰° = ۴۵° = زاویہ ع وم

∴ وم = م ع

اگر وع کو ۲ ا کے برابر فرض کریں تو

۴ ا^۲ = وع^۲ = وم^۲ + م ع^۲ = ۲ × وم^۲

یعنی وم = ا √۲

اس لئے جب ۴۵° = م ع / وع = ا √۲ / ۲ ا = ۱ / √۲

جم ۴۵° = وم / وع = ا √۲ / ۲ ا = ۱ / √۲

اور مس ۴۵° = ۱

۳۸ ـ ۳۰° کا زاویہ

فرض کرو کہ ۳۰° کا زاویہ م وع ہے، ع م کو عَ تک خارج کرو اور م عَ کو ع م کے برابر بناؤ۔

مثلث وم ع اور وم عَ میں اضلاع وم اور م عَ اضلاع وم اور م ع کے بالترتیب برابر ہیں۔ نیز ان کے درمیانی زاویے قائمے ہیں۔ اس لئے

وعَ = وع اور زاویہ وعَ ع = زاویہ وع عَ = ۶۰°

اس سے معلوم ہوا کہ مثلث عَ وع متساوی الاضلاع ہے۔

اب اگر وع کا طول ۲ا ہو

تو $\text{مع} = \frac{1}{2}\,\text{عَع} = \frac{1}{2}\,\text{وع} = \text{ا}$

نیز $\text{وم} = \sqrt{\text{وع}^2 - \text{مع}^2} = \sqrt{4\text{ا}^2 - \text{ا}^2} = \sqrt{3}\,\text{ا}$

$\therefore \text{جب } 30^\circ = \frac{\text{مع}}{\text{وع}} = \frac{1}{2}$

$\text{جم } 30^\circ = \frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \frac{\sqrt{3}\,\text{ا}}{2\text{ا}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

اور $\text{مس } 30^\circ = \frac{\text{جب } 30^\circ}{\text{جم } 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

۳۹۔ ۶۰° کا زاویہ

فرض کرو کہ ۶۰° کا زاویہ اوع ہے
وا پر ایک ایسا نقطہ ن لو کہ
مَن = وم = ا (فرض کرو)

اب مثلث وم ع کے اضلاع وم اور مع مثلث ن م ع کے اضلاع ن م اور م ع کے بالترتیب برابر ہیں اور ان کے درمیانی زاویے قائمے ہیں۔ اس سے معلوم ہوا کہ مثلث باہم مساوی ہیں۔

اس لئے ع ن = وع اور

$\angle\,\text{ع ن م} = \angle\,\text{ع و م} = 60^\circ$

اس سے ثابت ہوا کہ مثلث وع ن متساوی الاضلاع ہے۔

اس لئے وع = ون = ۲ وم = ۲ا

$$\text{م ع} = \sqrt{\text{وع}^2 - \text{وم}^2} = \sqrt{۴\text{ا}^2 - \text{ا}^2} = \sqrt{۳} \times \text{ا}$$

$$\text{جب } ۶۰^\circ = \frac{\text{م ع}}{\text{وع}} = \frac{\sqrt{۳}\,\text{ا}}{۲\,\text{ا}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\text{جم } ۶۰^\circ = \frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \frac{\text{ا}}{۲\,\text{ا}} = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{س } ۶۰^\circ = \frac{\text{جب } ۶۰^\circ}{\text{جم } ۶۰^\circ} = \sqrt{۳}$$

۔ صفر درجہ (°) کا زاویہ ۔

ض کرو کہ خط دائر وع نے و

د گھومنے سے نہایت ہی

اویہ پیدا کیا ہے ۔

ی فرض کرو کہ زاویہ م وع نہایت چھوٹا ہے

اہر ہے کہ مقدار ع م نہایت ہی قلیل ہے اور ابتدا میں جب

نے اس زاویہ کا مرتسم کرنا عین شروع ہی کیا تھا تو اُس وقت

ر م ع ہر مقدار معینہ سے کم تھی یعنی ایک ایسی مقدار تھی

ہم صفر سے تعبیر کرتے ہیں ۔

اب اگر فرض کیا جائے کہ

اوع واقعی صفر کے برابر ہے

ں صورت میں وم اور وع

قاط ع اور م) ایک دوسرے پر منطبق ہونگے اور عمود

معدوم ہو جائے گا

اس لئے وم = وع اور ع م = ۰

∴ جب ۰° = $\frac{\text{مع}}{\text{وع}} = \frac{۰}{\text{وع}} = ۰$

جم ۰° = $\frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \frac{\text{وع}}{\text{وع}} = ۱$

اور مس ۰° = $\frac{۰}{۱} = ۰$

نیز مم ۰° = قیمت نسبت $\frac{\text{وم}}{\text{مع}}$ جب م اور ع ایک دوسرے پر منطبق ہوں

. = $\frac{\text{مقدار محدود}}{\text{نہایت ہی قلیل مقدار}}$ = ایک ایسی مقدار جو لا انتہا بڑی ہے

اس لئے مم ۰° = ∞

اسی طرح سے قم ۰° = $\frac{\text{وع}}{\text{مع}} = ∞$

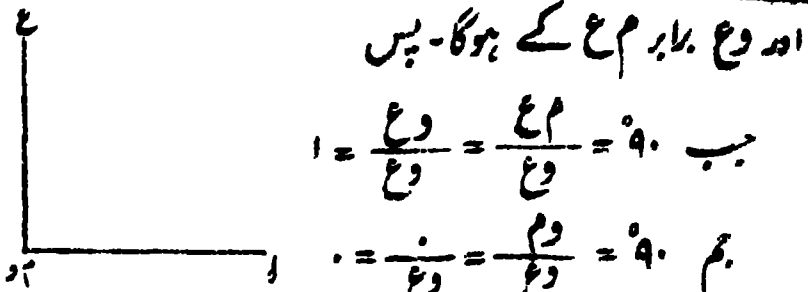
اور قط ۰° = $\frac{\text{وع}}{\text{وم}} = ۱$

۱۴۔ ۹۰° کا زاویہ

ع

و م ا

فرض کرو کہ زاویہ اوع مقدار میں ۹۰° کے نہایت ہی قریب ہے مگر بالکل ۹۰° نہیں ہے۔

جب وع فی الحقیقت ایک قائمہ مرتسم کریگا تو اُس وقت نقطہ م نقطہ و پر منطبق ہوگا یعنی وم فنا ہوگا

اور و ع برابر م ع کے ہوگا۔ پس

$$\text{جب } ۹۰^\circ = \frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} = \frac{\text{و ع}}{\text{و ع}} = ۱$$

$$\text{جم } ۹۰^\circ = \frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \frac{۰}{\text{و ع}} = ۰$$

$$\text{مس } ۹۰^\circ = \frac{\text{م ع}}{\text{و م}} = \frac{\text{مقدار محدود}}{\text{نہایت ہی قلیل مقدار}} = \text{لا انتہا بڑا عدد} = \infty$$

$$\text{مم } ۹۰^\circ = \frac{\text{و م}}{\text{م ع}} = \frac{۰}{\text{م ع}} = ۰$$

$$\text{قط } ۹۰^\circ = \frac{\text{و ع}}{\text{و م}} = \infty$$ (بعینہٖ اُس عمل سے جو مماس کی صورت میں ہوا)

$$\text{اور قم } ۹۰^\circ = \frac{\text{و ع}}{\text{م ع}} = \frac{\text{و ع}}{\text{و ع}} = ۱$$

۴۲۔ اوپر کے زاویوں کی تین مشہور مثلثی نسبتیں یاد رکھنی چاہئیں جو زاویے اکثر استعمال ہوتے ہیں۔ وہ یہ ہیں۔

۰° ، ۳۰° ، ۴۵° ، ۶۰° ، ۹۰°

یاد رہے کہ ان کی جیوب بالترتیب مفصلہ ذیل نسبتوں کے جذروں کے برابر ہیں۔

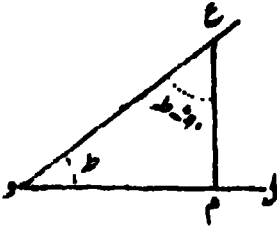
$$\frac{۰}{۴} ، \frac{۱}{۴} ، \frac{۲}{۴} ، \frac{۳}{۴} ، \frac{۴}{۴}$$

اور ان کی جیوب التمام بالترتیب مفصلہ ذیل نسبتوں کے جذروں کے برابر ہیں۔

$$\frac{۴}{۴} ، \frac{۳}{۴} ، \frac{۲}{۴} ، \frac{۱}{۴} ، \frac{۰}{۱}$$

اور مماس زاویہ نسبت جیب ÷ جیب التمام کے برابر ہے۔

۴۳- متمم زاویئے - تعریف۔ اگر دوزاویوں کا مجموعہ ایک قائمہ کے برابر ہو تو ان میں سے ہر ایک کو دوسرے کا متمم کہتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ کوئی زاویہ طہ ہے اس کا متمم زاویہ ۹۰- طہ ہوگا۔

۴۴- دو متمم زاویوں کی مثلثی نسبتوں کے باہمی ارتباطات دریافت کرو

فرض کرو کہ ایک چکر لگانے والا خط وا سے شروع ہوکر مقام وع پر پہنچتا ہے اور اپنے گھماؤ سے زاویہ اوع یعنی زاویہ طہ پیدا کرتا ہے۔ خط دائر وع پر کوئی نقطہ ع مقرر کرو اور اس سے وا پر عمود ع م نکالو۔

اب چونکہ ایک مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہوتا ہے اور چونکہ زاویہ وم ع قائمہ ہے اس لئے معلوم ہوا کہ زاویہ م وع اور زاویہ وع م کا حاصل جمع ایک قائمہ کے برابر ہے۔ پس یہ دونوں زاوئے ایک دوسرے کے متمم ہوئے۔

یعنی زاویہ وع م = ۹۰- طہ

[جس وقت زاویہ وع م زیر بحث ہو تو یاد رہے کہ خط ع م "قاعدہ" ہے اور م و "عمود"]

پس۔

جب (۹۰° - ط) = جب م ع و = م و / ع و = جم او ع = جم ط

جم (۹۰° - ط) = جم م ع و = ع م / ع و = جب او ع = جب ط

مس (۹۰° - ط) = مس م ع و = م و / ع م = مم او ع = مم ط

مم (۹۰° - ط) = مم م ع و = ع م / م و = مس او ع = مس ط

قم (۹۰° - ط) = قم م ع و = ع و / م و = قط او ع = قط ط

قط (۹۰° - ط) = قط م ع و = ع و / ع م = قم او ع = قم ط

اس لئے معلوم ہوا کہ

کسی زاویہ کی جیب = اسکے متمم کی جیب التمام کے

کسی زاویہ کا مماس = اسکے متمم کے مماس التمام کے

کسی زاویہ کا قاطع = اسکے متمم کے قاطع التمام کے

۴۴ - طالب علم کو آگے جانے سے پیشتر جدول ذیل سے بخوبی واقفیت ہو جانا چاہیئے

زاویہ	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
جیب	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱
جیب التمام	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	۰
مماس	۰	$\sqrt{3}$	۱	$\sqrt{3}$	∞
مماس التمام	∞	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰
قاطع التمام	∞	۲	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	۱
قاطع الزاویہ	۱	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	۲	∞

اگر طالب علم صرف اس حصہ کو بخوبی یاد کرلے جو جلی خط کے اندر ہے تو اُس کی مدد سے باقی مثلثی نسبتوں کا حساب بآسانی لگ سکیگا کیونکہ

(۱) جیوب ۶۰° اور ۹۰° بالترتیب جیوب التمام ۳۰° اور ۰° کے برابر ہیں۔

(۲) جیوب التمام ۶۰° اور ۹۰° جیوب ۳۰° اور ۰° کے برابر ہیں اس سے دوسری اور تیسری سطریں معلوم ہوتی ہیں۔

(۳) کسی زاویہ کا مماس جیب کو جیب التمام پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے معلوم ہوا کہ چوتھی سطر کی کوئی مقدار دوسری سطر کی کسی مقدار کو تیسری سطر کی مطابق مقدار پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے

(۴) چونکہ زاویہ کا مماس التمام اس کے مماس کا مقلوب ہوتا ہے اس لئے پانچویں سطر کی مقداریں چوتھی سطر کی مقداروں کے مقلوبوں کے برابر ہیں

(۵) چونکہ قم طہ = $\frac{1}{\text{جب طہ}}$ اس لئے چھٹی سطر دوسری کی مقادیر کو الٹانے سے حاصل ہوتی ہے۔

(۶) اور چونکہ قطہ طہ = $\frac{1}{\text{جم طہ}}$ اس لئے معلوم ہوا کہ ساتویں سطر تیسری سطر کی مقادیر کو الٹانے سے حاصل ہوتی ہے۔

امثلہ نمبری ۷

۱۔ اگر ا = ۳۰° تو تصدیق کرو کہ

(۱) جم ۲ ا = جم^۲ ا ۔ جب^۲ ا = ۲ جم^۲ ا ۔ ۱

(۲) جب ۲ا = ۲ جب ا جم ا

(۳) جم ۳ا = ۴ جم^{3} ا − ۳ جم ا

(۴) جب ۳ا = ۳ جب ا − ۴ جب^{3} ا

(۵) مس ۲ا = $\frac{\text{۲ مس ا}}{\text{۱ − مس}^{2}\text{ ا}}$

۲۔ اگر ا = ۴۵° تو اس کی تصدیق کرو کہ

(۱) جب ۲ا = ۲ جب ا جم ا

(۲) جم ۲ا = ۱ − ۲ جب^{2} ا

(۳) مس ۲ا = $\frac{\text{۲ مس ا}}{\text{۱ − مس}^{2}\text{ ا}}$

اس کی تصدیق کرو کہ

۳۔ جب^{2} ۳۰° + جب^{2} ۴۵° + جب^{2} ۶۰° = $\frac{۳}{۲}$

۴۔ مس^{2} ۳۰° + مس^{2} ۴۵° + مس^{2} ۶۰° = ۴$\frac{۱}{۳}$

۵۔ جب ۳۰° جم ۶۰° + جم ۳۰° جب ۶۰° = ۱

۶۔ جم ۴۵° جم ۶۰° − جب ۴۵° جب ۶۰° = − $\frac{\sqrt{۳} − ۱}{۲\sqrt{۲}}$

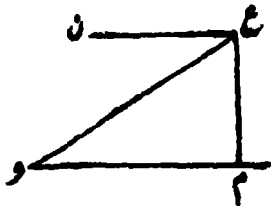
۷۔ $\frac{۴}{۳}$ مم^{2} ۳۰° + ۳ جب^{2} ۶۰° − ۲ قم^{2} ۶۰° − $\frac{۳}{۴}$ مس^{2} ۳۰° = ۳$\frac{۱}{۳}$

۸۔ قم^{2} ۴۵° × قط^{2} ۳۰° × جب^{3} ۹۰° × جم ۶۰° = ۱$\frac{۱}{۳}$

۹۔ ۴ مم^{2} ۴۵° − قط^{2} ۶۰° + جب^{3} ۳۰° = $\frac{۱}{۸}$

باب سوم

بلندیوں اور فاصلوں کے آسان سوالات

۴۶ ۔ علم مثلث کے خاص مقاصد میں سے ایک یہ بھی ۔
کہ اس کی مدد سے اشیاء کی بلندیاں اور مختلف نقاط
کے باہمی فاصلے حقیقی طور پر ناپے بغیر دریافت ہوسکیں ۔
۴۷ ۔ فرض کرو کہ و اور ع دو نقطے ہیں اور ع بہ نسبت و
اونچی سطح پر واقع ہے ۔ نقطہ و سے
ایک خط افقی و م کھینچو جو عمودی
خط ع م کو نقطہ م پر قطع
کرے ۔

اگر مقام و پر کھڑے ہوکر نقطہ ع کی سمت میں دیکھیں تو زاو
م و ع جو خط نظری و ع اور خط افقی و م کے درمیان بنتا ہے
نقطہ ع کا زاویہ ارتفاع یا زاویہ فراز کہلاتا ہے ۔
م و کے متوازی ع ن کھینچو تب نقطہ ع میں سے گزرنے وا
خط افقی ع ن ہوگا ۔ اب اگر مقام ع سے نیچے کی طرف کو نق
و کی سیدھ میں دیکھیں تو زاویہ ن ع و جو خط نظری ع و او

خط اُفقی ع ن کے درمیان بنتا ہے نقطہ و کا زاویہ انخفاض یا زاویہ نشیب کہلاتا ہے۔

۴۸۔ زاویوں کی عملی پیمائش کے لئے دو آلے اکثر استعمال ہوتے ہیں زاویہ بیں (تھیوڈولائیٹ) اور سُدس (سکس ٹنٹ)

زاویہ بیں سے اکثر سطح عمودی میں زاویوں کا اندازہ ہوسکتا ہے اس کی نہایت مساوی صورت یہ ہے۔ ایک دوربین لکڑی کی چپٹی تختی پر قائم کردی جاتی ہے۔ سہارے کے لئے اس تختی کے تین پائے ہوتے ہیں اور ان کو ہموار سطح پر اس طرح رکھتے ہیں کہ تختی اور دوربین دونوں سطح اُفقی میں ہوں۔

فرض کرو کہ یہ تختی مقام و پر متوازی الافق ہے اور دوربین کا رخ ابتدا میں سمت وم میں ہے۔ اب دوربین کو سطح عمودی میں پھراتے جاؤ جبتک کہ اس کا رخ عین نقطہ ع کی سیدھ میں نہ ہوجائے۔ جب ایسا ہو تو ایک درجہ دار پیمانہ سے ہمکو دوربین کے گھماؤ کے زاویہ کی مقدار معلوم ہوجائیگی، یعنی ہمکو زاویہ ارتفاع م و ع معلوم ہوجائے گا۔

اسی طرح سے اگر آلہ مقام ع پر ہو تو زاویہ ن ع و جس میں دوربین سمت اُفقی سے نیچے کی طرف نقطہ و کے محاذی ہونیکے لئے پھرے گی زاویہ انخفاض ن ع و ہوگا۔

اس آلہ کی مدد سے اُن زاویوں کی پیمائش بھی ممکن ہے جو سطح اُفقی میں واقع ہوں۔

۴۹۔ سُدس (سکس ٹنٹ) سے ایسے زاویوں کی پیمائش ہوسکتی ہے جو کسی دو نقاط د اور ع کے خط وصل کے محاذی تیسرے

نقطہ ف پر نہیں۔ اکثر یہ آلہ جہازوں پر استعمال ہوتا ہے اس کی بناوٹ اور اس کا استعمال ذرا پیچیدہ ہے ۔ لہذا ہم اس جگہ اس کا ذکر نہیں کرتے ۔

۵۰۔ اب ہم فاصلوں اور بلندیوں کی چند آسان مثالیں حل کریں گے ۔

مثال ۱۔ سطح ہموار پر ایک علم قائم ہے اس کے پائین سے ۱۵۰ فٹ کے فاصلہ پر ایک مقام سے اسکی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۳۰° مشاہدہ کیا گیا ہے، علم کی بلندی دریافت کرو ۔

فرض کرو کہ م ع (شکل دفعہ ۴۷) علم ہے اور و ایسا نقطہ ہے جس سے زاویہ ارتفاع دیکھا گیا ہے ۔

تب و م = ۱۵۰ فٹ اور زاویہ م و ع = ۳۰°

اب چونکہ ع م و زاویہ قائمہ ہے ۔ اس لئے

$$\frac{\text{م ع}}{\text{و م}} = \text{مس م و ع} = \text{مس } ۳۰° = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \quad (\text{دفعہ } ۳۸)$$

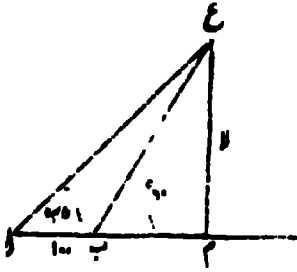
$$\therefore \text{م ع} = \frac{\text{و م}}{\sqrt{۳}} = \frac{۱۵۰}{\sqrt{۳}} = \frac{۱۵۰\sqrt{۳}}{۳} = ۵۰\sqrt{۳}$$

اور استخراج جذر سے $\sqrt{۳}$ = ۱٫۷۳۲۰۵.........

اس لئے م ع = ۵۰ × ۱٫۷۳۲۰۵....... فٹ

= ۸۶٫۶۰۲۵......... فٹ

مثال ۲۔ سطح افقی پر ایک گرجا کا مینار ہے اور ایک شخص اس کی بلندی دریافت کرنا چاہتا ہے ۔ سطح کے کسی مقام سے

اس نے مینار کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۴۵° مشاہدہ کیا اور ۱۰۰ فٹ برج کی سمت میں جانے پر زاویہ ارتفاع ۶۰° دیکھا۔ برج کی بلندی اور پائین برج سے اس کا ابتدائی فاصلہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ مینار کی چوٹی ع ہے اور ا اور ب دو مقامات ہیں جہاں سے زاویوں کے ارتفاع مشاہدہ کئے گئے ہیں۔ اب ممدود پر عمود ع م نکالو اور فرض کرو کہ م ع = لا

ہمیں معلوم ہے اب = ۱۰۰ فٹ

$$\angle \text{م ا ع} = ۴۵^\circ$$

اور $\angle \text{م ب ع} = ۶۰^\circ$

اس سے $\dfrac{\text{ام}}{\text{لا}} = \text{مم}\,۴۵^\circ$

اور $\dfrac{\text{ب م}}{\text{لا}} = \text{مم}\,۶۰^\circ = \dfrac{۱}{\sqrt{۳}}$

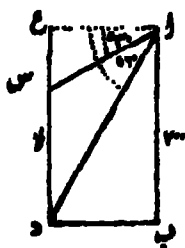
اس لئے ام = لا اور $\text{ب م} = \dfrac{\text{لا}}{\sqrt{۳}}$

$$\therefore ۱۰۰ = \text{ام} - \text{ب م} = \text{لا} - \frac{\text{لا}}{\sqrt{۳}} = \text{لا}\,\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\therefore \text{لا} = \frac{۱۰۰\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-۱} = \frac{۱۰۰\sqrt{۳}(\sqrt{۳}+۱)}{۳-۱} = ۵۰(۳+\sqrt{۳})$$

$$= ۵۰(۳ + ۱٫۷۳۲۰۵\ldots) = ۲۳۶٫۶\ldots \text{ فٹ}$$

نیز ام = لا، اس سے معلوم ہوا کہ ہر دو مطلوبہ فاصلے ۲۳۶٫۶ ... فٹ ہیں

مثال ۳۔ ایک ۲۰۰ فٹ بلند پہاڑ کی چوٹی سے ایک برج کے نقطۂ اسفل اور راس کے انخفاضی زاویے °۶۰ اور °۳۰ مشاہدہ کئے گئے ہیں، برج کی بلندی دریافت کرو

فرض کرو کہ س د برج ہے۔

ا نقطۂ نگاہ اور ب ا پہاڑ کی بلندی۔

خطِ اُفقی ا ع کھینچو تب زاویہ ع ا س = °۳۰

اور زاویہ ع ا د = °۶۰

فرض کرو کہ برج کی بلندی لا فٹ ہے، د س کو اتنا خارج کرو کہ وہ ا ع کو نقطہ ع پر ملے یعنی س ع = ا ب ۔ لا = ۲۰۰ ۔ لا

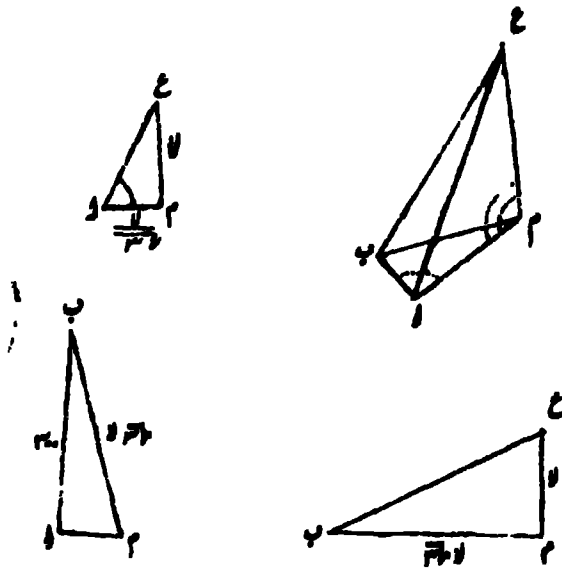
اب چونکہ ∠ ا د ب = ∠ د ا ع = °۶۰ (اقلیدس م ش ۲۹)

$\therefore$ د ب = ا ب مم ا د ب = ۲۰۰ مم °۶۰ = $\frac{۲۰۰}{\sqrt{۳}}$

نیز $\frac{۲۰۰ - لا}{د ب} = \frac{س ع}{ع ا} =$ مس °۳۰ = $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

اس لئے ۲۰۰ ۔ لا = $\frac{د ب}{\sqrt{۳}} = \frac{۲۰۰}{۳}$

پس لا = ۲۰۰ ۔ $\frac{۲۰۰}{۳}$ = ۱۳۳ $\frac{۱}{۳}$

مثال ۴۔ ایک برج کی جانب جنوب میں کسی مقام سے ایک شخص نے برج کا زاویہ ارتفاع °۶۰ دیکھا اس کے بعد ایک سطحِ اُفقی پر وہ ۳۰۰ فٹ مغرب کی طرف گیا اور وہاں زاویہ ارتفاع °۳۰ پایا، برج کی بلندی اور برج سے اُس کا ابتدائی فاصلہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ع برج کی چوٹی ہے اور ع م بلندی۔ نقطہ ا برج کے جنوب میں اور ب نقطہ ا کی جانب مغرب میں واقع ہے۔
زاوئے ع م ا، ع م ب، م ا ب سب قائمے ہیں۔ چونکہ مثلثات ع ا م، ع ب م، ا ب م سب مختلف سطحوں میں واقع ہیں اسلئے سہولت کی خاطر ان کو دوسری، تیسری، چوتھی شکلوں میں جداگانہ موافق ایک مناسب پیمانۂ واحد کے دکھایا گیا ہے۔
ہمیں معلوم ہے کہ ا ب = ۳۰۰ فٹ، اور زاویہ ع ا م = ۶۰°
اور زاویہ ع ب م = ۳۰°

فرض کرو کہ برج کی بلندی لا فٹ ہے۔

دوسری شکل سے $\frac{\text{ام}}{\text{لا}} = \text{مم}\ 90^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

یعنی $\text{ام} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{3}}$

تیسری شکل سے $\frac{\text{بم}}{\text{لا}} = \text{مم}\ 30^\circ = \sqrt{3}$

یعنی $\text{بم} = \sqrt{3} \times \text{لا}$

آخری شکل سے $\text{بم}^2 = \text{ام}^2 + \text{اب}^2$

یعنی $3\ \text{لا}^2 = \frac{1}{3}\ \text{لا}^2 + 300^2$

$\therefore\ 8\ \text{لا}^2 = 3 \times 300^2$

$\therefore\ \text{لا} = \frac{300\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = 150\,\frac{\sqrt{6}}{2} = 75\sqrt{6}$

$= 75 \times 2{,}44949\ldots = 183{,}71\ldots$ فٹ

نیز اس شخص کا برج سے ابتدائی فاصلہ

$= \text{لا مم}\ 60^\circ = \frac{\text{لا}}{\sqrt{3}} = 75 \times \sqrt{2}$

$= 75 \times (1{,}4142\ldots\ldots) = 106{,}065\ldots\ldots$ فٹ

امثلہ نمبری ۸

ا۔ دریا کے ایک کنارے پر کھڑے ہو کر ایک شخص نے

مقابل کے کنارے پر ایک درخت کے محاذی زاویہ ۶۰° مشاہدہ کیا
کنارے سے ۴۰ فٹ پیچھے ہٹنے پر وہی زاویہ ۳۰° دیکھا، درخت کی
اونچائی اور دریا کی چوڑائی دریافت کرو۔

۲۔ کسی خاص مقام سے ایک برج کا زاویہ ارتفاع دیکھا تو
اس کا مماس التمام $\frac{3}{5}$ تھا، برج کی سیدھ میں ۳۲ فٹ جانے پر
پھر وہی زاویہ دیکھا تو اس کا مماس التمام $\frac{4}{5}$ تھا۔ برج کی بلندی
دریافت کرو۔

۳۔ مقام ا سے ایک برج کا زاویہ ارتفاع دیکھا گیا اس وقت
اس کا مماس $\frac{5}{12}$ تھا۔ برج کی طرف ۲۴۰ فٹ جانے پر زاویہ ارتفاع
دوبارہ دیکھا گیا تو اس کا مماس $\frac{3}{4}$ تھا۔ برج کی بلندی دریافت کرو۔

۴۔ ایک ایسے درخت کی بلندی دریافت کرو جبکہ اس کی
جڑ کی سیدھ میں ۱۰۰ فٹ ایک خط افقی پر جانے سے اس کی چوٹی
کا زاویہ ارتفاع ۳۰° سے ۴۵° ہو جائے۔

۵۔ ایک پہاڑ سطح سمندر سے ۲۰۰ فٹ اونچا ہے، اس کی
چوٹی سے کسی شخص نے دو جہازوں کے انخفاضی زاوئے بالترتیب ۴۵°
اور ۳۰° مشاہدہ کئے اگر جہازوں کو ملانے والا خط پہاڑ کے پائین میں سے
گذرے تو جہازوں کا باہمی فاصلہ دریافت کرو۔

۶۔ ایک چٹان کی چوٹی سے کسی شخص نے سمندر میں دو لنگروں
کے انخفاضی زاوئے ۳۹° اور ۲۶° مشاہدہ کئے۔ اگر لنگروں کا
درمیانی فاصلہ ۳۰۰ گز ہو اور ان کو ملانے والا خط چٹان کی جڑ
میں سے گزرے تو چٹان کی بلندی اور سب سے نزدیک لنگر کا فاصلہ

چٹان کے پایئن سے دریافت کرو ۔ معلوم ہے۔

مم ۲۶° = ۲٫۰۵۰۳ اور مم ۳۹° = ۱٫۲۳۴۹

۷۔ ایک درخت کے اوپر کا حصہ آندھی سے ٹوٹکر سطح زمین سے زاویہ ۳۰° بناتا ہے اور جڑ سے فاصلہ اُس نقطے کا جہاں درخت کی چوٹی زمین سے مس کرتی ہے ۵۰ فٹ ہے درخت کی بلندی دریافت کرو۔

۸۔ دو برجوں کے درمیان اُفقی فاصلہ ۶۰ فٹ ہے اور دوسرے برج کی چوٹی سے جو ۱۵۰ فٹ بلند ہے پہلے برج کی چوٹی کا زاویہ انخفاض ۳۰° مشاہدہ کیا گیا ہے، پہلے برج کی بلندی دریافت کرو۔

۹۔ ایک نامکمل برج کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع (۴۵°) ایک ایسے مقام سے مشاہدہ کیاگیاہے جو پایئن برج سے ۱۲۰ فٹ کے فاصلے پر ہے معلوم کرو کہ مینار اور کتنا اونچا کیا جائے کہ اس کا زاویہ ارتفاع اُسی مقام سے ۶۰° ہو۔

۱۰۔ ایک سڑک ۱۰۰ فٹ چوڑی ہے اور اس کے دونوں طرف دو ستون ہیں جن کی اونچائی ایک ہی ہے، ستونوں کے درمیان سڑک کے کسی نقطہ سے ان کی چوٹیوں کے ارتفاع ۶۰° اور ۳۰° مشاہدہ کئے گئے ہیں۔ ستونوں کی بلندی اور نقطہ کا مقام دریافت کرو۔

۱۱۔ ایک برج کے راس کا زاویہ ارتفاع ایک مقام سے ۶۰° دیکھا گیا۔ اُس سے ۴۰ فٹ اونچے مقام پر ارتفاع ۴۵° تھا، برج کی بلندی اور مشاہدہ کرنے والے مقامات سے اسکا اُفقی فاصلہ دریافت کرو۔

۱۲۔ دامنِ کوہ میں کسی مقام سے ایک پہاڑ کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۴۵°

دکھائی دیا جب ایک سطح مائل پر جو اُفق سے ۳۰° کا زاویہ بناتی تھی ایک میل اوپر چڑھے تو وہی زاویہ ارتفاع ۶۰° تھا۔ پہاڑ کی بلندی دریافت کرو۔

۱۳۔ اگر ایک لکڑی کا سایہ اُس کی بلندی کا $\frac{1}{\sqrt{3}}$ گنا ہو تو سورج کا زاویہ ارتفاع دریافت کرو۔

۱۴۔ سطح ہموار پر ایک بُرج ہے۔ جب سورج کا ارتفاع ۳۰° ہو تو بُرج کے سایہ کا طول بہ نسبت اُس صورت کے جبکہ ارتفاع ۴۵° ہو ۶۰ فٹ زیادہ ہوتا ہے ثابت کرو کہ بُرج کی بلندی ۳۰ $(1 + \sqrt{3})$ فٹ ہے۔

۱۵۔ تین مقامات ا، ب، ج سمندر کے سیدھے کنارے پر اس طرح واقع ہیں کہ اب = ب ج = ۲ میل، ایک جہاز کنارے کی عمودی سمت میں مقام ب کی طرف آرہا ہے اور راستہ کے کسی مقام پر طول اج کے محاذی جہاز پر زاویہ ۶۰° بنتا ہے اس کے بعد جہاز دس منٹ کے لئے اُس سمت میں اُسی رفتار سے جاتا ہے اور پھر اج کے محاذی زاویہ ۱۲۰° بنتا ہے۔ معلوم کرو کہ جہاز کس رفتار سے جارہا ہے۔

۱۶۔ دو علم سطح ہموار پر قائم ہیں، علموں کے درمیان اوران کے ملانے والے خط پر ا اور ب دو نقطے ہیں اگر ا سے علموں کے ارتفاعی زاوئے دیکھے جائیں تو وہ ۳۰° اور ۶۰° ہیں اور اگر ب سے دیکھے جائیں تو ۶۰° اور ۴۵° ہیں اگر اب کا طول ۳۰ فٹ ہو تو علموں کی بلندیاں اور ان کا باہمی فاصلہ دریافت کرو۔

۱۷۔ فرض کرو کہ سطح افقی پر ایک مینار ب س ہے، س اُسکا سر اور ب پائیں دو مقامات ا اور ب اُسی سطح میں لئے گئے ہیں، اب = ۳۲ فٹ

اور زاویہ پ اب = ۹۰° نیز یہ معلوم ہے کہ مم س اپ = ۳/۴ اور
مم س ب پ = ۳/۵ مینار کی بلندی دریافت کرو۔

۱۸۔ سطح ہموار پر ایک مربع برج ہے، سطح کے کسی مقام سے برج کے تین کونے دکھائی دیتے ہیں اور وہاں کھڑے ہوکر کونوں کے تین ارتفاعی زاویے ۴۵°، ۶۰°، ۴۵° مشاہدہ کئے گئے ہیں ثابت کرو کہ برج کے ارتفاع کو ہر ایک ضلع کے طول سے وہی نسبت ہے جو ۲√(۱+√۵) کو ۴ سے ہے۔

۱۹۔ ایک روشنی کے مینار کا رخ شمال کی طرف ہے اور اس سے روشنی کی شعاعیں قطاع دائرہ کی شکل میں اسمات شمال مشرق اور شمال مغرب کے درمیانی حصہ میں تبیع ہوتی ہیں۔ ایک جہاز مغرب کی طرف جارہا تھا اس پر ایک مسافر کو روشنی کی شعاعیں سب سے اول اس وقت دکھائی دیں جبکہ جہاز روشنی گھر سے ۵ میل کے فاصلے پر تھا اور وہ شعاعیں ۳۰ء۲۸ منٹ تک دکھائی دیتی رہیں جہاز کی رفتار دریافت کرو۔

۲۰۔ ایک دریا کے کنارے متوازی اور مستقیم ہیں ایک شخص نے ایک کنارے لا ما سے کسی مقام لا پر کھڑے ہوکر دیکھا کہ مقام لا اور مقابل کے کنارے پر کے مقام ے کو ملانے والا خط مستقیم لا ما سے زاویہ ۳۰° بناتا ہے اس کے بعد وہ دریا کے کنارے ۲۰۰ گز مقام ما تک چلا اور اس نے دیکھا کہ زاویہ ے ما لا = ۶۰° دریا کا عرض دریافت کرو۔

۲۱۔ ایک شخص شمال کی طرف جارہا تھا اس نے اپنے ٹھیک مشرق کی طرف ایک غبارہ کو شمال مغرب کی طرف جاتے دیکھا غبارہ کا ارتفاع اس وقت ۶۰° تھا جب وہ ۴۰۰ گز آگے چلا تو غبارہ عین اس کی سمت راس میں تھا اگر غبارہ کا ارتفاع اس اثناء میں یکساں رہا ہو تو اس کی بلندی دریافت کرو۔

باب چہارم

علم مثلث میں علامات جبریہ کا استعمال

۵۱۔ مثبت اور منفی زاویے۔ دفعہ ۸ میں جب ہمنے ایسے زاویوں کا ذکر کیا جن کی مقدار پر کم از قائمہ ہونے کی قید نہ تھی تو ہمنے یہ فرض کر لیا تھا کہ خط دائر ہمیشہ گھڑی کی سوئیوں کی مقابل سمت میں چکر لگاتا ہے جبکہ گھڑی کا رخ اوپر کی طرف ہو' اس سمت کو ہم **مقابل سمت ساعت** کہیں گے اور آیندہ جب کوئی خط دائر اس سمت میں حرکت کرے گا تو ہم اس کو یوں بیان کریں گے کہ یہ مثبت سمت میں چکر لگاتا ہے یا مثبت زاویہ مرتسم کرتا ہے۔

جب خط دائر سمت مذکورۂ بالا کے مخالف یعنی گھڑی کی سوئیوں کی سمت میں حرکت کرے تو اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ یہ منفی سمت میں چکر لگاتا ہے اور منفی زاویہ مرتسم کرتا ہے۔

اس منفی سمت کو **موافق سمت ساعت** بھی کہتے ہیں۔

۵۲۔ فرض کرو کہ خط دائر مقام **و ا** سے شروع ہو کر چکر لگاتا ہوا مقام **و ع** پر پہنچتا ہے جو **و آ** اور **و ب** کے

اور زاویہ پ اب = ۹۰° نیز یہ معلوم ہے کہ م س اپ = ۱/۲ اور
م س ب پ = ۱/۵ ۔مینار کی بلندی دریافت کرو۔

۱۸۔ سطح ہموار پر ایک مربع برج ہے۔سطح کے کسی مقام سے برج کے سر کے تین کونے دکھائی دیتے ہیں اور وہاں کھڑے ہوکر کونوں کے تین ارتفاعی زاویے ۴۵°، ۶۰°، ۴۵° مشاہدہ کئے گئے ہیں۔ثابت کرو کہ برج کے ارتفاع کو ہر ایک ضلع کے طول سے وہی نسبت ہے جو $\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$ کو ۴ سے ہے۔

۱۹۔ ایک روشنی کے مینار کا رخ شمال کی طرف ہے اور اس سے روشنی کی شعاعیں قطاع دائرہ کی شکل میں اسمات شمال مشرق اور شمال مغرب کے درمیانی حصہ میں تسبع ہوتی ہیں۔ایک جہاز مغرب کی طرف جارہا تھا اُس پر ایک مسافر کو روشنی کی شعاعیں سب سے اول اُس وقت دکھائی دیں جبکہ جہاز روشنی گھر سے ۵ میل کے فاصلے پر تھا اور وہ شعاعیں ۳۰ $\frac{1}{2}$ منٹ تک دکھائی دیں۔جہاز کی رفتار دریافت کرو۔

۲۰۔ ایک دریا کے کنارے متوازی اور مستقیم ہیں ایک شخص نے ایک کنارے لاما کے کسی مقام لا پر کھڑے ہوکر دیکھا کہ مقام لا اور مقابل کے کنارے پر کے مقام ے کو ملانے والا خط مستقیم لاما سے زاویہ ۳۰° بناتا ہے۔اس کے بعد وہ دریا کے کنارے ۲۰۰ گز مقام ما تک چلا اور اس نے دیکھا کہ زاویہ ے ما لا = ۶۰°، دریا کا عرض دریافت کرو۔

۲۱۔ ایک شخص شمال کی طرف جارہا تھا اُس نے اپنے ٹھیک مشرق کی طرف ایک غبارہ کو شمال مغرب کی طرف جاتے دیکھا غبارہ کا ارتفاع اس وقت ۶۰° تھا جب وہ ۴۰۰ گز آگے چلا تو غبارہ عین اُس کی سمت راس میں تھا اگر غبارہ کا ارتفاع اس اثنا میں یکساں رہا ہو تو اُس کی بلندی دریافت کرو۔

باب چہارم

علم مثلث میں علامات جبریہ کا استعمال

۵۱۔ مثبت اور منفی زاویے۔ دفعہ ۸ میں جب ہمنے ایسے زاویوں کا ذکر کیا جن کی مقدار ۲ کم از قائمہ ہونے کی قید نہ تھی تو ہمنے یہ فرض کرلیا تھا کہ خط دائر ہمیشہ گھڑی کی سوئیوں کی مقابل سمت میں چکر لگاتا ہے جبکہ گھڑی کا رُخ اوپر کی طرف ہو' اس سمت کو ہم **مقابل سمت ساعت** کہیں گے اور آیندہ جب کوئی خط دائر اس سمت میں حرکت کرے گا تو ہم اس کو یوں بیان کریں گے کہ یہ مثبت سمت میں چکر لگاتا ہے یا مثبت زاویہ مرتسم کرتا ہے۔

جب خط دائر سمت مذکورۂ بالا کے مخالف یعنی گھڑی کی سوئیوں کی سمت میں حرکت کرے تو اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ یہ منفی سمت میں چکر لگاتا ہے اور منفی زاویہ مرتسم کرتا ہے۔

اس منفی سمت کو **موافق سمت ساعت** بھی کہتے ہیں۔

۵۲۔ فرض کرو کہ خط دائر مقام **و ا** سے شروع ہوکر چکر لگاتا ہوا مقام **و ع** پر پہنچتا ہے جو **و ا** اور **و ب** کے

درمیان واقع ہے اور زاویہ اَو بَ کی تنصیف کرتا ہے اب اگر یہ مثبت سمت میں گھومکر اس مقام پر پہنچا ہو تو اس نے ایک مثبت زاویہ + ۲۲۵° مرتسم کیا ہے لیکن اگر اس کی گردش کی سمت منفی تھی تو اس نے ایک منفی زاویہ - ۱۳۵° اپنی حرکت سے پیدا کیا ہے۔

فرض کرو کہ ہمیں صرف یہی معلوم ہے کہ خط وائر مقام مذکورہ پر ہے۔ اب ممکن ہے کہ اس نے ایک، دو، تین،..... پورے چکر لگانے کے بعد ایک مثبت زاویہ + ۲۲۵° مرتسم کیا ہو یا ایک، دو، تین،...... پورے چکر منفی سمت میں لگانے کے بعد ایک منفی زاویہ - ۱۳۵° اپنی گردش سے پیدا کیا ہو۔

صورت اول میں یہ زاویہ مرتسمہ ۲۲۵° ہوگا یا ۳۶۰° + ۲۲۵°، یا ۲ × ۳۶۰° + ۲۲۵°، یا ۳ × ۳۶۰° + ۲۲۵°؛......

یعنی ۲۲۵°، یا ۵۸۵°، یا ۹۴۵°، یا ۱۳۰۵°؛......

صورت دوم میں زاویہ مرتسمہ - ۱۳۵° ہوگا یا - ۳۶۰° - ۱۳۵°؛.....

یا - ۲ × ۳۶۰° - ۱۳۵°، یا - ۳ × ۳۶۰° - ۱۳۵°؛........

یعنی - ۱۳۵° یا - ۴۹۵°، یا - ۸۵۵°، یا - ۱۲۱۵°؛...........

۵۲۔ مثبت اور منفی خطوط۔ اس سے پیشتر کہ ہم زاویہ قائمہ سے بڑے زاویوں کی مثلثی نسبتوں کی تعریفیں لکھیں یہ بیان کرنا ضروری ہوگا کہ مختلف سمتوں میں ناپے ہوئے خطوط کی عددی قیمتوں کے

ماقبل علامات جبریہ + اور − کے تصرف سے ہم ان میں کس طرح امتیاز کر سکتے ہیں۔

مثال۔ ایک شخص مقام ب سے جو مقام ا کے ۹ میل مشرق کی طرف واقع ہے روانہ ہوتا ہے اور ۳ میل فی گھنٹے کے حساب سے مغرب کی طرف جاتا ہے اس کا مقام ۵ گھنٹے کے بعد بلحاظ ا کے دریافت کرو۔

ا گھنٹہ کے بعد اس کا فاصلہ ا کے مشرق کی طرف ۹−۳ میل یعنی ۶ میل ہوگا
۲ " " " " ا " " " ۶−۳ میل یعنی ۳ میل ہوگا

ج		ا		ب

اب دونوں صورتوں میں ہم نے عدد ۳ کو میلوں کی اس تعداد سے تفریق کر دیا ہے بقدر جس کے وہ شخص ہر گھنٹے کے شروع میں ا کے مشرق کی طرف ہوتا ہے اگر اسی عمل کو جاری رکھیں تو ہمیں یہ نتیجے حاصل ہوں گے۔

۳ گھنٹوں کے بعد اس شخص کا فاصلہ ا کے مشرق کی طرف ۳−۳ یعنی صفر میل ہوگا
۴ " " " " " ۰−۳ یعنی −۳ میل ہوگا
۵ " " " " " −۳−۳ یعنی −۶ میل ہوگا

لیکن یہ ظاہر ہے کہ ۳ گھنٹے کی مسافت کے بعد وہ شخص مقام ا پر پہنچ جائے گا اور اگر وہ اپنے سفر کو دو گھنٹے اور جاری رکھے تو وہ مقام ج پر ہوگا جو ا کے ۶ میل مغرب کی طرف واقع ہے۔ اس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ جملہ "ا سے −۶ میل مشرق

کی طرف" کا مطلب وہی ہے جو او سے ۶ میل مغرب کی طرف" کا ہے
اس قسم کی دلائل سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر ایک سمت میں ایک فاصلہ ا سے
تعبیر کیا جائے تو اس کی مخالف سمت میں اس کے مساوی فاصلہ - ا سے تعبیر ہوگا

و ص و ص و'

اگر و سے ایک فاصلہ وا ناپا جائے اور وا = ص تو ـص سے فاصلہ وا
تعبیر ہوگا جہاں اَ ایک ایسا نقطہ اَو ممدودہ پر ہے کہ اَو = وا

۵۴- ترتیب حروف کو ملحوظ رکھنے کی خاص ضرورت

ایک ہندسی خط کی سمت کو اُن حروف کی ترتیب سے تعبیر کرتے ہیں
جو اُسے نامزد کرنے میں استعمال کئے جائیں مثلاً اب سے ایک
ایسا خط تعبیر ہوتا ہے جو ا سے ب کی سمت میں ناپا گیا ہو
لیکن اگر یہی خط ب سے ا کی سمت میں ناپا گیا ہو تو ہم اسکو
ب ا کہیں گے نہ کہ اب۔
اگر ا اور ب دو مقامات ایک دوسرے سے ۱۲ میل کے فاصلہ پر ہوں

ب ــــــ ا

تو اب سے وہ فاصلہ تعبیر ہوگا جو ایک شخص نے ا سے ب تک
چلنے میں طے کیا ہے اور ب ا سے وہ فاصلہ جو ب سے ا تک
چلنے میں طے ہوا ہے۔ اگر پہلے فاصلے کو ۱۲+ سے تعبیر کریں تو دوسرے
کو ۱۲- سے تعبیر کریں گے، اگر کوئی شخص ا سے ب تک چلے اور
پھر واپس ا پر آئے تو اُس کا کل فاصلہ طے کردہ ا سے صفر ہوگا

اور اس بیان کا طریق کتابت یہ ہے ۔

اب + ب ا = ۱۲ + (-۱۲) = ۰

۵۵- جب ایک خط دائر وع مقام ولا سے شروع ہوکر اپنی گردش سے مختلف زاوئے پیدا کرے تو ان زاویوں کی مثلثی نسبتوں کی تعریفات میں قوانین ذیل کا خیال رکھنا چاہئے ۔

جو خطوط ولا پر یا اس کے متوازی ناپے جائیں ان کو ہمیشہ مثبت خیال کرنا چاہیئے اگر وہ سمت والا میں کھینچے جائیں ۔ اور منفی اگر سمتِ مخالف ولاَ میں کھینچے جائیں ۔

اب فرض کرو کہ ولا کو وما زاویہ قائمہ پر قطع کرتا ہے تو وہ سب خطوط جو ولا پر عمود ہوں مثبت کہلائیں گے اگر وہ سمت وما میں کھینچے گئے ہوں اور منفی اگر وہ سمت مخالف وماَ میں کھینچے گئے ہوں ۔

شکل کھینچنے میں یاد رہے کہ ولا کا رُخ دائیں طرف متوازی الافق ہے اور وما سمت راس میں اوپر کی طرف ہے ۔

فاصلوں کے مثبت اور منفی ہونیکے قوانین کو ذیل کی صورت میں یاد رکھنا آسان ہوگا۔
اُفقی فاصلے جو وما کے دائیں طرف کو ناپے جائیں مثبت ہوتے ہیں
" " " " بائیں " " " منفی "
عمودی فاصلے جو وا سے اوپر کی طرف کو ناپے جائیں مثبت ہوتے ہیں
" " " " نیچے " " " منفی "
مثلاً اوپر کی شکل میں اُفقی خطوط وم، ن ع، نَ س سب مثبت ہیں
اور ومَ، ن ق، نَ ر سب منفی ہیں۔
اسی طرح سے عمودی خطوط ون، م ع، مَ ق سب مثبت
ہیں اور ونَ، م س، مَ ر سب منفی ہیں۔

۵۶ - کسی مقدار کے زاویوں کی مثلثی نسبتیں

فرض کرو کہ خط ابتدائی
وا مثبت سمت میں کھینچا گیا ہے
اور واَ کی سمت وا کے
مقابل ہے۔
فرض کرو کہ ب وبَ
خط وا سے زاویہ قائمہ بناتا ہے
اور اس کی مثبت سمت وب ہے
فرض کرو کہ خط دائر وع مقام وا سے شروع ہوکر کسی سمت
(مثبت یا منفی) میں چکر لگاتا ہے اور اپنی گردش سے کوئی زاویہ
پیدا کرتا ہے جس کی مقدار پر کوئی قید نہیں ہے خط دائر پر کسی

نقطہ ع سے او اَ پر عمود ع م نکالو۔

(اوپر کی شکل میں چکر لگانے والے خط کے چار مقامات دکھلائے گئے ہیں ہر ایک ربع میں ایک مقام ہے اور امتیاز کی خاطر اعداد موخرہ ۱، ۲، ۳، ۴ حرف ع سے منسلک کر دیئے گئے ہیں)

پس جب زاویوں کی مقدار پر کم از قائمہ ہونے کی قید نہ ہو تو مثلثی نسبتوں کی تعریفات کسی مقدار کے زاویوں کے لئے مفصلہ ذیل ہوں گی اور یاد رہے کہ زاویہ حادّہ کی صورت میں جو تعریفات ہمنے مثلثی نسبتوں کی دفعہ ۲۵ میں دی ہیں وہ بالکل وہی ہیں جو ہم اب لکھتے ہیں۔

$\frac{\text{م ع}}{\text{و ع}}$ کو زاویہ او ع کی جیب کہتے ہیں

$\frac{\text{و م}}{\text{و ع}}$ ،، ،، ،، جیب التمام ،،

$\frac{\text{م ع}}{\text{و م}}$ ،، ،، ،، کا مماس ،،

$\frac{\text{و م}}{\text{م ع}}$ ،، ،، ،، مماس التمام ،،

$\frac{\text{و ع}}{\text{و م}}$ ،، ،، ،، قاطع ،،

$\frac{\text{و ع}}{\text{م ع}}$ ،، ،، ،، قاطع التمام ،،

مقادیر ۱ ۔ جم او ع اور ۱ ۔ جب او ع کو زاویہ او ع کا بالترتیب سہم (یا جیب معکوس) اور سہم التمام کہتے ہیں۔

۵۷۔ بعینہٖ اس عمل سے جو دفعہ ۲۹ میں ہوا ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ زاویہ ا و ع (= ط) کی تمام قیمتوں کے لئے

جب^2 ط + جم^2 ط = ۱

$\frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط}}$ = مس ط

قط^2 ط = ۱ + مس^2 ط

اور　قم^2 ط = ۱ + مم^2 ط

۵۸۔ مثلثی نسبتوں کی علامات

ربع اول۔ فرض کرو کہ خط دائر ربع اول میں ہے جیسے و ع، چکر لگانے والے خط کو ہمیشہ مثبت خیال کرو۔
اس صورت میں و م$_1$ اور م$_1$ ع$_1$ دونوں مثبت ہیں جس سے معلوم ہوا کہ مثلثی نسبتیں سب مثبت ہیں۔

ربع دوم۔ فرض کرو کہ خطِ دائر و ع$_2$ ربع دوم میں ہے۔
اس صورت میں م$_2$ ع$_2$ مثبت ہے اور و م$_2$ منفی۔
چونکہ جیب زاویہ دو مثبت مقادیر کی باہمی نسبت کے برابر ہے اس لئے وہ مثبت ہے، چونکہ جیب التمام ایک ایسی نسبت کے برابر ہے جس کا شمار کنندہ منفی ہے اور نسب نما مثبت، اس لئے وہ منفی ہے۔
مماس زاویہ ایک ایسی نسبت کے برابر ہے جس کا شمار کنندہ

مثبت ہے اور نسبت نما منفی اس لئے وہ منفی ہے۔
مماس التمام منفی ہے
قاطع التمام مثبت ہے
قاطع زاویہ منفی ہے

ربع سوم۔ فرض کرو کہ خط دائر ربع سوم میں ہے جیسے و ع۳
اس صورت میں م۳ ع۳ اور و م۳ دونوں منفی ہیں۔
جیب زاویہ منفی ہے
جیب التمام منفی ہے
مماس زاویہ مثبت ہے
مماس التمام مثبت ہے
قاطع التمام منفی ہے
قاطع زاویہ منفی ہے

ربع چہارم۔ فرض کرو کہ چکر لگانے والا خط و ع۴ ربع چہارم میں ہے تب م۴ ع۴ منفی ہوگا اور و م۴ مثبت اس لئے
جیب زاویہ منفی ہے
جیب التمام مثبت ہے
مماس زاویہ منفی ہے
مماس التمام منفی ہے
قاطع التمام منفی ہے
قاطع زاویہ مثبت ہے

جدول ذیل میں مثلثی نسبتوں کی علامات اُن تمام صورتوں میں

مندرج ہیں جب خط دائر کسی ایک ربع میں واقع ہو اور کسی زاویہ مجزوہ کا ایک طرف سے احاطہ کرے۔

ب

جب +	جب +
جم −	جم +
مس −	مس +
مم −	مم +
قم +	قم +
قط −	قط +

اَ ـــــ و ـــــ ا

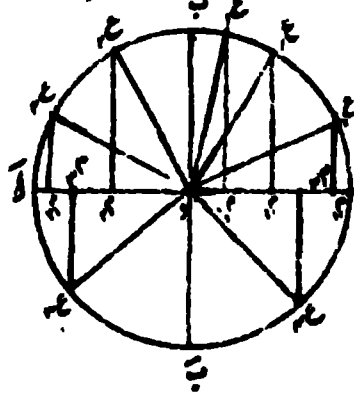
جب −	جب −
جم −	جم +
مس +	مس −
مم +	مم −
قم −	قم −
قط −	قط +

بَ

۵۹ـ جب زاویہ ۰° سے ۳۶۰° تک بڑھے تو اس کی ہر ایک ثلثی نسبت کی مقدار اور علامت کے تغیرات کی تحقیق کرو۔

فرض کرو کہ چکر لگانے والے خط وع کا مستقل طول ا ہے،

جب یہ وا پر منطبق ہوتا ہے تو طول وم، برابر ا کے ہوتا ہے

یہ و ب پر منطبق ہوتا ہے تو نقطہ م۱ نقطہ و پر منطبق ہوتا
ہے۔ و م۱ صفر ہوتا ہے، نیز جب خط دائر و ا سے و ب
ت کرتا ہے تو طول و م۱ کی قیمت ا سے صفر تک گھٹتی ہے
ط دائر دوسرے ربع میں
ے و اَ تک حرکت
، تو طول و م۲ منفی ہوتا ہے
ا صفر سے ا تک بڑھتا ہے
روئے الجبرا صفر سے -ا
ا ہے)
ربع میں طول و م۳ ازروئے الجبرا -ا سے صفر تک بڑھتا
چوتھے ربع میں طول و م۴ صفر سے ا تک بڑھتا ہے۔
ں میں طول م۱ع۱ صفر سے ا تک بڑھتا ہے، م۲ع۲
م میں ا سے صفر تک گھٹتا ہے، ربع سوم میں م۳ع۳
، الجبرا صفر سے -ا تک گھٹتا ہے اور ربع چہارم میں م۴ع۴
، الجبرا -ا سے صفر تک بڑھتا ہے۔
، جیب۔ ربع اول میں جب زاویہ ۰° سے ۹۰° تک
ہے تو اس کی جیب (م۱ع۱/ا) متواتر ۰/ا سے ا/ا تک
فر سے ا تک بڑھتی ہے۔
ے ربع میں جب زاویہ ۹۰° سے ۱۸۰° تک بڑھتا ہے تو
جیب ا/ا سے ۰/ا تک یعنی ا سے صفر تک گھٹتی ہے۔

ربع سوم میں جب زاویہ ۱۸۰° سے ۲۷۰° تک بڑھتا ہے تو اس کی جیب ۰/وا سے -ا/وا تک یعنی صفر سے -۱ تک گھٹتی ہے۔

ربع چہارم میں جب زاویہ ۲۷۰° سے ۳۶۰° تک بڑھتا ہے تو اس کی جیب -ا/وا سے ۰/وا تک یعنی -۱ سے صفر تک گھٹتی ہے۔

۶۱۔ جیب التمام۔ ربع اول میں جیب التمام وم/وا کے برابر ہے اور ا/وا سے ۰/وا یعنی ۱ سے صفر تک گھٹتی ہے۔

ربع دوم میں یہ ۰/وا سے -ا/وا یعنی صفر سے -۱ تک گھٹتی ہے

ربع سوم میں یہ -ا/وا سے ۰/وا تک یعنی -۱ سے صفر تک بڑھتی ہے

ربع چہارم میں یہ ۰/وا سے ا/وا تک یعنی صفر سے ۱ تک بڑھتی ہے

۶۲۔ مماس ربع اول میں ما عا متواتر صفر سے ا تک بڑھتا ہے اور وما متواتر ا سے صفر تک گھٹتا ہے پس نسبت ما عا/وما متواتر بڑھتی ہے (کیونکہ اس کا شمار کنندہ متواتر بڑھتا ہے اور نسب نما متواتر گھٹتا ہے)

جب وا پر وعا منطبق ہوتا ہے تو مماس صفر ہوتا ہے اور جب خط وائر ایک ایسے زاویئے میں گھوم چکتا ہے جو قائمہ سے ذرا کم ہو یعنی جب وعا تقریباً وب پر منطبق ہوتا ہے تو اُس وقت ما عا تقریباً ا کے برابر ہوتا ہے اور طول وما نہایت چھوٹا ہوتا ہے، اُس وقت نسبت ما عا/وما کی قیمت نہایت زیادہ

ہوتی ہے اور وم جتنا قریب وب کے آتا جاتا ہے اُتنا ہی اس نسبت کی مقدار بڑھتی جاتی ہے، اس سے معلوم ہوا کہ خط دائر کو وب کے کافی قریب لانے سے ہم مماس زاویہ کو جتنا چاہیں بڑا بنا سکتے ہیں، اس کو اس طرح بھی بیان کرتے ہیں کہ جب زاویہ ۹۰ ہوتا ہے تو اس کا مماس غیر متناہی ہوتا ہے۔

مقدار غیر متناہی کو تعبیر کرنے کے لئے رمز ∞ استعمال کرتے ہیں۔ پس ربع اول میں مماس صفر سے ∞ تک بڑھتا ہے۔

دوسرے ربع میں جب خط دائر ایک ایسا زاویہ مرتسم کرتا ہے جو قائمہ سے ذرا زیادہ ہو تو اس وقت م۲ع۲ تقریباً ا کے برابر ہوتا ہے اور وم۲ منفی اور نہایت چھوٹا ہوتا ہے یعنی اُس وقت مماس زاویہ ایک منفی، غیر متناہی مقدار کے برابر ہوتا ہے۔

نیز جب خط دائر وب سے وا تک حرکت کرتا ہے تو م۲ع۲ مقدار میں ا سے صفر تک گھٹتا ہے اور وم۲ منفی ہوتا ہے اور صفر سے ۔ا تک گھٹتا ہے پس جب چکر لگانے والا خط وا پر منطبق ہوتا ہے تو مماس زاویہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔

لہٰذا ثابت ہوا کہ ربع دوم میں مماس ۔ ∞ سے صفر تک بڑھتا ہے۔

تیسرے ربع میں م۳ع۳ اور وم۳ دونوں منفی ہوتے ہیں اس لئے ان کی نسبت مثبت ہوتی ہے، نیز جب خط دائر وب پر منطبق ہوتا ہے تو مماس غیر متناہی ہوتا ہے ۔ اس لئے ثابت ہوا کہ ربع سوم میں مماس صفر سے ∞ تک بڑھتا ہے۔

چوتھے ربع میں م ہ ع ہ منفی ہوتا ہے اور و م ہ مثبت اور ان کی نسبت منفی ہوتی ہے، نیز جب خط دائر مقام و ب پر سے ہوکر گذرتا ہے تو مماس زاویہ کی قیمت +∞ سے -∞ تک بدلتی ہے (جیسا اوپر ہمنے مقام و ب پر دیکھا) پس معلوم ہوا کہ ربع چہارم میں مماس -∞ سے صفر تک بڑھتا ہے۔

۶۴۔ مماس التمام۔ جب خط دائر و ا پر منطبق ہوتا ہے تو اُس وقت م ا ع ا نہایت چھوٹا اور و م تقریباً ا کے برابر ہوتا ہے پس مماس التمام (یعنی نسبت $\frac{\text{و م ا}}{\text{م ا ع ا}}$) ابتدا میں ہی غیر متناہی ہوتا ہے اور جب خط دائر و ا سے و ب تک گردش کرتا ہے تو م ا ع ا مقدار میں صفر سے ا تک بڑھتا ہے اور و م کی قیمت ا سے صفر تک گھٹتی ہے، لہذا ربع اول میں مماس التمام ∞ سے صفر تک گھٹتا ہے۔

دوسرے ربع میں م ۲ ع ۲ مثبت ہوتا ہے اور و م ۲ منفی، پس معلوم ہوا کہ مماس التمام صفر سے $\frac{+1}{-}$ تک یعنی صفر سے -∞ تک گھٹتا ہے۔

تیسرے ربع میں مماس التمام مثبت ہوتا ہے اور ∞ سے صفر تک گھٹتا ہے (کیونکہ جب خط دائر مقام و اَ پر سے ہوکر گزرتا ہے تو مماس التمام کی قیمت -∞ سے +∞ تک بدلتی ہے)

ربع چہارم میں مماس التمام منفی ہوتا ہے اور صفر سے -∞ تک گھٹتا ہے۔

۶۵۔ قاطع۔ جب خط دائر و ا پر منطبق ہوتا ہے تو اُس وقت

وم کی قیمت ا ہوتی ہے اس لئے قاطع زاویہ کی قیمت بھی ایک ہوتی ہے۔

جب خط دائر وا سے وب تک گردش کرتا ہے تو وم مقدار میں ا سے صفر تک گھٹتا ہے اور جب چکر لگانے والا خط وب پر منطبق ہوتا ہے تو قاطع زاویہ کی قیمت ۱/۰ یعنی ∞ ہوتی ہے پس معلوم ہوا کہ ربع اول میں قاطع زاویہ ا سے ∞ تک بڑھتا ہے

ربع دوم میں وم منفی ہوتا ہے اور مقدار میں صفر سے -ا تک گھٹتا ہے اس لئے اس ربع میں قاطع زاویہ -∞ سے -ا تک بڑھتا ہے (کیونکہ جب خط دائر مقام وب پر سے ہو کر گزرتا ہے تو مقدار وم کی علامت بدل جاتی ہے اور اس لئے قاطع زاویہ کی قیمت میں تغیر +∞ سے -∞ تک ہوتا ہے)

ربع سوم میں وم ہمیشہ منفی ہوتا ہے اور -ا سے صفر تک بڑھتا ہے اس لئے قاطع -ا سے -∞ تک گھٹتا ہے۔

ربع چہارم میں وم ہمیشہ مثبت ہوتا ہے اور صفر سے ا تک بڑھتا ہے اس لئے اس ربع میں قاطع الزاویہ ∞ سے +ا تک گھٹتا ہے۔

۶۵ - قاطع التمام - اس کے تغیرات کی تحقیق بھی اسی طرح ہو سکتی ہے جیسے قاطع الزاویہ کے تغیرات کی ہوئی۔

ربع اول میں قاطع التمام ∞ سے +ا تک گھٹتا ہے

ربع دوم میں یہ +ا سے +∞ تک بڑھتا ہے

ربع سوم میں یہ -∞ سے -ا تک بڑھتا ہے

ربع چہارم میں یہ -۱ سے -∞ تک گھٹتا ہے

۶۶ - اوپر کے سب نتائج جدول ذیل میں جمع کئے گئے ہیں۔

ربع اول میں	ب ربع دوم میں
جیب ۰ سے ۱ تک بڑھتی ہے	جیب ۱ سے ۰ تک گھٹتی ہے
جیب التمام ۱ سے ۰ تک گھٹتی ہے	جیب التمام ۰ سے -۱ تک گھٹتی ہے
مماس ۰ سے ∞ تک بڑھتا ہے	مماس -∞ سے ۰ تک بڑھتا ہے
مماس التمام ∞ سے ۰ تک گھٹتا ہے	مماس التمام ۰ سے -∞ تک گھٹتا ہے
قاطع ۱ سے ∞ تک بڑھتا ہے	قاطع -∞ سے -۱ تک بڑھتا ہے
قاطع التمام ∞ سے ۱ تک گھٹتا ہے	قاطع التمام ۱ سے ∞ تک گھٹتا ہے

ا و ا

ربع چہارم	ربع سوم
جیب -۱ سے ۰ تک بڑھتی ہے	جیب ۰ سے -۱ تک گھٹتی ہے
جیب التمام ۰ سے ۱ تک بڑھتی ہے	جیب التمام -۱ سے ۰ تک بڑھتی ہے
مماس -∞ سے ۰ تک بڑھتا ہے	مماس ۰ سے ∞ تک بڑھتا ہے
مماس التمام ۰ سے -∞ تک گھٹتا ہے	مماس التمام ∞ سے ۰ تک گھٹتا ہے
قاطع ∞ سے ۱ تک گھٹتا ہے	قاطع -۱ سے -∞ تک گھٹتا ہے
قاطع التمام -۱ سے -∞ تک گھٹتا ہے	قاطع التمام -∞ سے -۱ تک بڑھتا ہے

۶۷ - مثلثی جملوں کے ادوار

جب کوئی زاویہ صفر سے ۳۶۰ قق تک بڑھتا ہے یعنی جب خط دائر ایک پورا چکر لگاتا ہے تو زاویہ کی جیب پہلے صفر سے ۱ تک

بڑھتی ہے پھر ا سے ۔ا تک گھٹتی ہے اور اخیر میں ۔ا سے صفر تک بڑھتی ہے اور اس طرح سے پیشتر اس کے کہ جیب اپنی اصلی قیمت پھر اختیار کرے اس کے سب تغیرات ظہور میں آتے ہیں ۔

اسی طرح سے جب زاویہ ۲ق سے ۴ق تک بڑھتا ہے تو جیب کی قیمت میں وہی تغیرات ظہور پذیر ہوتے ہیں ۔

نیز جب دو زاویوں کا تفاوت ۴ قائموں کے برابر ہوتا ہے تو ان کی جیبیں باہم مساوی ہوتی ہیں، اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ جیب **کا** دور ۲ق ہے

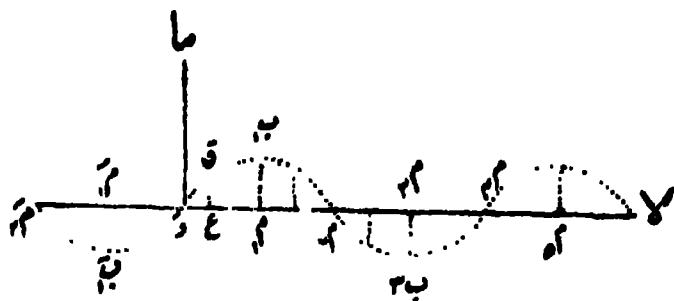
اسی طرح سے جب کوئی زاویہ بقدر ۲ق کے بڑھتا ہے تو اس کی جیب، قاطع اور قاطع التمام کی قیمتوں کے سب تغیرات ایک دفعہ ضرور تکرار پاتے ہیں ۔

لیکن مماس زاویہ کی صورت میں جب زاویہ صفر سے ق تک بڑھتا ہے یعنی جب خط دائرہ دو قائموں میں حرکت کرتا ہے تو اس کے سب تغیرات ایک مرتبہ وقوع میں آتے ہیں اور مماس التمام کی بھی یہی کیفیت ہے ۔

پس معلوم ہوا کہ جیب ، جیب التمام ، قاطع اور قاطع التمام کا دور ۲ق ہے اور مماس اور مماس التمام کا صرف ق ہے

جب کوئی زاویہ بڑھتا ہے تو اس کے مثلثی جملوں کی قیمتیں بار بار تکرار پاتی ہیں اس لئے ان کو **جملات** دوریہ یا جملات مدورہ کہتے ہیں ۔

۶۸ ۔ مثلثی نسبتوں کے تغیرات بذریعۂ اشکال اور خطوط

منحنی اس طرح تعبیر ہو سکتے ہیں۔

جیب کی ترسیم

فرض کرو کہ و لا اور و ما دو خطوط ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتے ہیں اور زاویوں کی مقداریں اُن طولوں سے تعبیر ہوتی ہیں جو زاویوں کے متناسب و لا پر ناپے جائیں۔ نیز فرض کرو کہ

نقاط م۱، م۲، م۳...... خط و لا پر اس طرح واقع ہیں

کہ و م۱ = م۱م۲ = م۲م۳ = ...

اب اگر و م۱ سے ایک قائمہ تعبیر ہو تو و م۲، و م۳، و م۴...... سے دو، تین، چار...... قائمے تعبیر ہوں گے۔

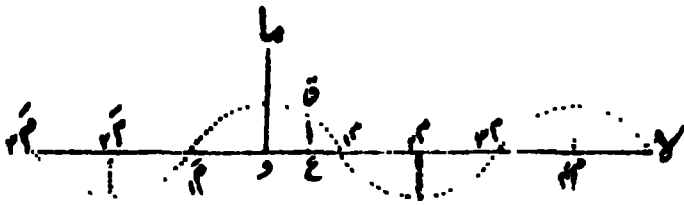
نیز اگر ع کوئی نقطہ و لا پر ہو تو و ع سے ایک ایسا زاویہ تعبیر ہوگا جس کی نسبت ایک قائمہ سے وہی ہوگی جو و ع کی و م۱ سے ہے۔

(مثلاً اگر و ع = $\frac{1}{3}$ و م۱ تو و ع ایک زاویہ قائمہ کے $\frac{1}{3}$ کو تعبیر کریگا اور اگر ع نقطہ تنصیف م۳م۴ کا ہو تو و ع سے $3\frac{1}{2}$ قائمے تعبیر ہوں گے)

وم۱ کو اس طرح منتخب کرو کہ طول کی ایک اکائی ایک زاویہ نیمقطری کو تعبیر کرے۔ اب چونکہ وم۲ سے دو قائمے یعنی π نیمقطری زاوئے تعبیر ہوتے ہیں اس لئے طول وم۲ سے طول کی π اکائیاں یعنی تقریباً $3\frac{1}{7}$ اکائیاں تعبیر ہوں گی۔
اسی طریقے سے منفی زاوئے و کی منفی جانب میں طولوں وم۱′، وم۲′… سے تعبیر ہوں گے۔
ہر ایک نقطہ (ع) پر کا عمود ع ق اُس زاویے کی جیب کے متناسب بناؤ جو وع سے تعبیر ہوتا ہے اگر جیب مثبت ہو تو یہ عمود مثبت سمت میں وما کے متوازی ہوگا اور اگر جیب منفی ہو تو یہ منفی سمت میں ہوگا۔
(مثلاً چونکہ وم۱ ایک قائمہ کو تعبیر کرتا ہے جس کی جیب ۱ ہے اسلئے ہم عمود م۱ب۱ کو طول کی ایک اکائی کے برابر لیں گے، چونکہ وم۲ سے دو قائمے تعبیر ہوتے ہیں اور ان کی جیب صفر ہے اس لئے اس نقطہ پر عمود کا طول صفر ہوگا، چونکہ وم۳ تین قائموں کی مقدار کے متناسب ہے اور ان کی جیب -۱ ہے اس لئے م۳ پر کے عمود کا طول -۱ ہوگا یعنی م۳ب۳ خط ولا کے نیچے کی طرف کھینچا جائے گا اور اس کا طول ایک ہوگا۔ اگر وع، وم۱ کی ایک تہائی کے برابر ہو تو یہ $\frac{1}{3}$ قائمہ یعنی ۳۰° کو تعبیر کرے گا اور اس کی جیب $\frac{1}{2}$ ہوگی پس اس صورت میں ہم نقطہ ع پر ایک عمود ع ق قائم کریں گے جس کا طول پیمانۂ واحد کے طول کا نصف ہوگا)
ان سب خطوط کے سرے ایک خط منحنی پر واقع ہوں گے

جس کی شکل مندرجۂ بالا منحنی کی سی ہوگی۔

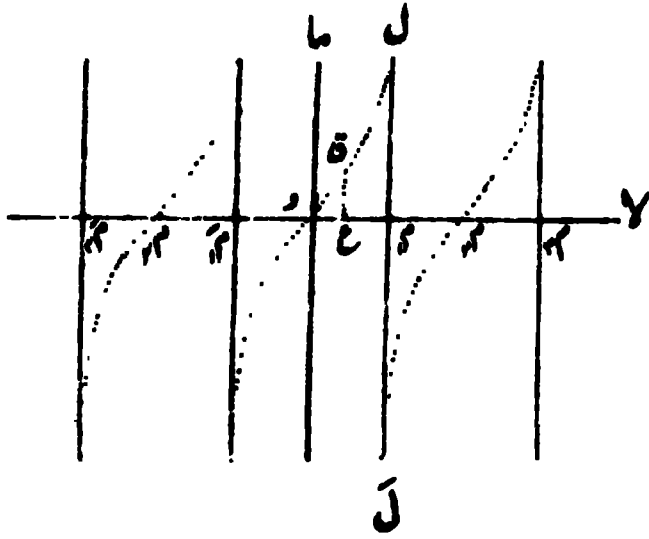
پوری شکل کھینچنے سے معلوم ہوگا کہ خط منحنی کے وہ ام ب ہ م
جیسے اور کئی حصے ہیں اور اس کا یہ مطلب ہے کہ جب کوئی
زاویہ بقدر ۲ π کے بڑھتا ہے تو اس کی جیب کی وہی قیمتیں
تکرار پاتی ہیں۔

۶۹ — جیب التمام کی ترسیم

جیب التمام کی ترسیم بھی اُسی طرح سے حاصل ہوتی ہے جیسی
جیب کی، صرف فرق یہ ہے کہ جیب التمام کی صورت میں عمود
ع ق سے اُس زاویہ کی جیب التمام تعبیر ہوتی ہے جو طول
و ع سے تعبیر ہوتا ہے۔

اگر شکل دفعہ ۶۸ میں نقطہ و حرکت کرکے م پر آجائے
اور وما کا مقام م ب ا سے بدل دیا جائے تو جیب التمام کا خط منحنی
جیب کے بالکل متماثل ہوگا۔

۷۰ — مماس کی ترسیم

چونکہ زاویہ قائمہ کا مماس غیر متناہی ہوتا ہے اور طول و م
ایک قائمہ کو تعبیر کرتا ہے اس لئے جو عمود نقطہ م پر قائم ہوگا

اس کا طول غیر متناہی ہوگا اور مماس کا منحنی م ل کو غیر متناہی فاصلے پر ملے گا۔

اگر زاویہ ایک قائمے سے ذرا زیادہ ہو تو اس کا مماس منفی اور غیر متناہی ہوگا اسلئے خط ل م ل کے عین دائیں طرف مماس کا منحنی ایک ایسے مقام سے شروع ہوگا جو ولا کے نیچے بے انتہا فاصلے پر واقع ہو۔

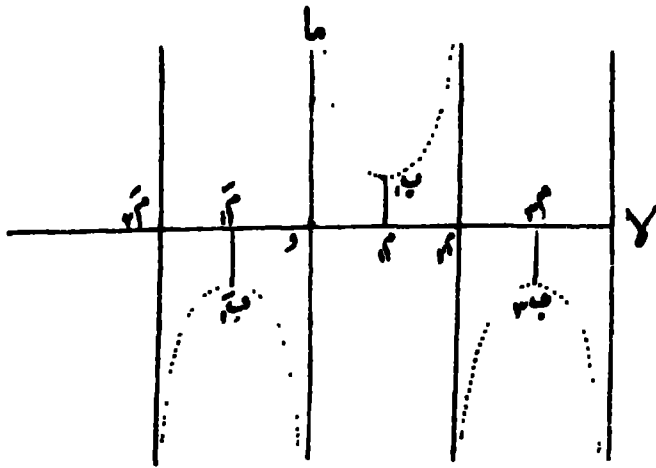
مماس کی ترسیم میں صریحاً بیشمار متماثل اور متوازی حصے شامل ہیں اور ان میں سے ہر ایک حصہ باقی سب سے الگ ہے۔ اس قسم کے خط منحنی کو غیر تسلسل کہتے ہیں، برخلاف اس کے جیب اور جیب التمام ہر دو کے منحنی متسلسل ہیں۔

۷۱ — مماس التمام کی ترسیم

اگر مماس التمام کا خط منحنی کھینچا جائے تو وہ وما کو و کے

اوپر غیر متناہی فاصلے پر ملے گا، یہ خط نقطہ م میں سے گذرے گا اور نقطہ م۲ پر جو عمود ہوگا اس کو و لا کی منفی جانب میں غیر متناہی فاصلے پر مس کرے گا، اس کے بعد م کے عین دائیں طرف یہ خط نقطہ م۲ کے اوپر ایک غیر متناہی فاصلے سے شروع ہوگا اور پہلے حصے کی طرح م۳ میں سے گذرے گا اور م۴ پر کے عمود کو و لا کے نیچے غیر متناہی فاصلے پر مس کرے گا وغیرہ وغیرہ۔

مماس التمام کا منحنی غیر متسلسل ہوگا اور اس کے بیشمار حصے ایک دوسرے کے ساتھ ساتھ ترتیب دیئے ہوئے ہوں گے۔

۴۷ — قاطع التمام کی ترسیم

جب زاویہ صفر ہوتا ہے تو اس کی جیب صفر ہوتی ہے اور اس لئے اس کا قاطع التمام غیر متناہی ہوتا ہے لہذا منحنی و ما کو غیر متناہی فاصلے پر ملتا ہے۔

جب زاویہ ایک قائمہ کے برابر ہوتا ہے تو اس کا قاطع التمام ایک ہوتا ہے اور اس لئے عمود م ب۱ کا طول ایک ہوتا ہے۔

جب زاویہ دو قائموں کے برابر ہوتا ہے تو اس کا قاطع التمام غیر متناہی ہوتا ہے یعنی م پر جو عمود ہو اس کو خط منحنی غیر متناہی فاصلے پر ملتا ہے۔

نیز جب زاویہ دو قائموں سے ذرا کم ہوتا ہے تو اس کا قاطع التمام $+\infty$ ہوتا ہے اور جب زاویہ دو قائموں سے ذرا زیادہ ہوتا ہے تو اس وقت قاطع التمام $-\infty$ ہوتا ہے یعنی جب زاویہ کی قیمت دو قائمے میں سے ہو کر گذرتی ہے تو دفعتہً قاطع الزاویہ کی قیمت $+\infty$ سے $-\infty$ ہو جاتی ہے پس معلوم ہوا کہ م۲ کے عین دائیں طرف خط منحنی و لا کے نیچے غیر متناہی فاصلے سے شروع ہوتا ہے۔

۴۷ ۔ قاطع الزاویہ کی ترسیم

اگر قاطع الزاویہ کا منحنی اسی طرح مرتسم کیا جائے تو اس کی شکل بالکل وہی ہوگی جو قاطع التمام کے منحنی کی ہے صرف وما کو حرکت دیگر م ب۱ پر لے آنا چاہیئے۔

امثلہ متفرقہ نمبری (۹)

۱۔ کسی مثلث کے ایک زاویے میں فرانسیسی درجوں کی تعداد اتنی ہے جتنی کہ دوسرے زاویے میں انگریزی درجوں کی تعداد ہے، اور تیسرے زاویے میں اتنے فرانسیسی ثانئے ہیں جتنے کہ باقی دو کے مجموعہ میں انگریزی

ثانئے ہیں تو ہر ایک زاویے میں نیم قطری زاویوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۔ کسی دائرے کی ۲ فٹ قوس کے محاذی جو مرکزی زاویہ بنتا ہے اس میں انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں کی تعداد دریافت کرو، حالانکہ نصف قطر ۵ فٹ ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ نیم قطری زاویوں کو ثانیوں میں تبدیل کرنے کے لئے ۲۰۶۲۶۵ سے ضرب دینی چاہئے اور ثانیوں کو نیم قطری زاویوں میں منتقل کرنے کے لئے مضروب فیہ ۰۰۰۰۰۴۸۰ ہونا چاہئے۔

۴۔ اگر $\text{جب}\ \text{ط} = \frac{\text{ل}^2 - \text{م}^2}{\text{ل}^2 + \text{م}^2}$ تو جم ط اور مم ط کی قیمتیں دریافت کرو۔

۵۔ اگر $\text{جب}\ \text{ط} = \frac{\text{م}^2 + 2\text{م}\text{ن}}{\text{م}^2 + 2\text{م}\text{ن} + 2\text{ن}^2}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\ \text{ط} = \frac{\text{م}^2 + 2\text{م}\text{ن}}{2\text{م}\text{ن} + 2\text{ن}^2}$$

۶۔ اگر $\text{جم}\ \text{ط} - \text{جب}\ \text{ط} = \sqrt{2}\ \text{جب}\ \text{ط}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم}\ \text{ط} + \text{جب}\ \text{ط} = \sqrt{2}\ \text{جم}\ \text{ط}$$

۷۔ ثابت کرو کہ $\text{قم}^4\text{ع} - \text{مم}^4\text{ع} = 2\ \text{قم}^2\text{ع}\ \text{مم}^2\text{ع} + 1$

۸۔ $2\ \text{قط}^2\text{ا} - \text{قط}^4\text{ا} - 2\ \text{قم}^2\text{ا} + \text{قم}^4\text{ا}$ کو مس ا کی رقوم میں بیان کرو۔

۹۔ مساوات $3\ \text{قم}^2\ \text{ط} = 2\ \text{قط}\ \text{ط}$ کو حل کرو۔

۱۰۔ ایک شخص کسی ٹیلے پر کھڑا ہو کر ایک کشتی کا زاویہ انخفاض 30° مشاہدہ کرتا ہے، کشتی کنارے کے اس مقام کی طرف آرہی ہے جو عین

اُس شخص کے پاؤں کے نیچے ہے، تین منٹ کے بعد کشتی کا زاویہ انخفاض ۴۰° ہوجاتا ہے، معلوم کرو کہ کتنی دیر میں کشتی کنارے پہ آلگے گی۔

۱۱ — ثابت کرو کہ اگر لا حقیقی ہو تو مساوات جب ط = لا + $\frac{۱}{لا}$ ناممکن ہے۔

۱۲ — ثابت کرو کہ مساوات قا^{۲}ط = $\frac{۴ لا ما}{(لا + ما)^{۲}}$ صرف اُسی صورت میں ممکن ہے جبکہ لا = ما

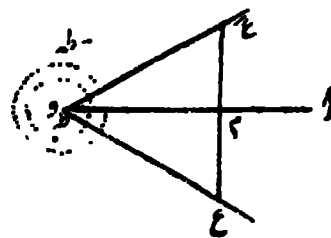
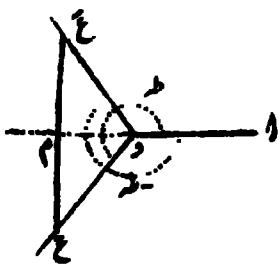
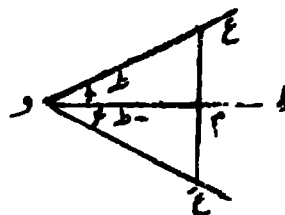
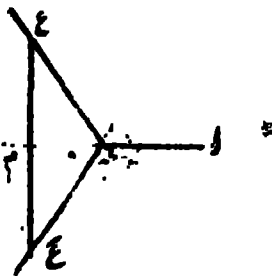
باب پنجم

کسی مقدار اور علامت کے زاویونکی مثلثی نسبتیں

(پہلی مرتبہ اس مضمون کا مطالعہ کرتے وقت طالب علم کو چاہیے
کہ دفعات ۷۴، ۷۵، ۷۶، اور ۷۸ کی چار چار شکلوں میں سے صرف
پہلی شکلوں پر ہی توجہ محدود رکھے)

۷۴ — ایک زاویہ (— ط) کی مثلثی نسبتیں ط کی تمام قیمتوں
کے لئے ط کی رقوم میں دریافت کرو۔

ع　ط　و　م　ا　ع　ع　ع　م　ا

ع　ط　و　م　ا　ع　ط　و　م　ا　ع

فرض کرو کہ خط دائر مقام و ا سے شروع ہوکر چکر لگاتا ہوا مقام و ع پر پہنچتا ہے اور اس طرح سے زاویہ ط مرتسم کرتا ہے۔
و ا یا و ا ممدودہ پر عمود ع م نکالو اور اس کو عَ تک اتنا نکالو کرو کہ ع م اور م عَ باہم برابر ہوں۔
مثلث م و ع اور م و عَ میں اضلاع و م اور م ع، اضلاع و م اور م عَ کے بالترتیب برابر ہیں اور ان کے درمیانی زاویے و م ع اور و م عَ قائمے ہیں اس لئے (بحکم اقلیدس م ا ش ۴)
زاوئے م و ع اور م و عَ برابر ہیں اور و ع، و عَ کے مساوی ہے۔
ان چاروں شکلوں میں زاویہ ا و ع کی مقدار (اگر زاوئے کو گھڑی کی سوئیوں کی مقابل سمت میں ناپا جائے) زاویہ ا و عَ کی مقدار کے برابر ہے (اگر اس زاوئے کو گھڑی کی سوئیوں کی موافق سمت میں ناپا جائے)
نیز م ع اور م عَ مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہیں اسلئے

$$\text{جب}\,(-\text{ط}) = \frac{\text{م عَ}}{\text{و عَ}} = \frac{-\text{م ع}}{\text{و ع}} = -\,\text{جب ط}$$

$$\text{جم}\,(-\text{ط}) = \frac{\text{و م}}{\text{و عَ}} = \frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \text{جم ط}$$

$$\text{مس}\,(-\text{ط}) = \frac{\text{م عَ}}{\text{و م}} = \frac{-\text{م ع}}{\text{و م}} = -\,\text{مس ط}$$

$$\text{مم}\,(-\text{ط}) = \frac{\text{و م}}{\text{م عَ}} = \frac{\text{و م}}{-\text{م ع}} = -\,\text{مم ط}$$

$$\text{قم}\,(-\text{ط}) = \frac{\text{و عَ}}{\text{م عَ}} = \frac{\text{و ع}}{-\text{م ع}} = -\,\text{قم ط}$$

$$\text{قط}\,(-\text{ط}) = \frac{\text{و عَ}}{\text{و م}} = \frac{\text{و ع}}{\text{و م}} = \text{قط ط}$$

[اس دفعہ میں اور آگے کی دفعات میں شکل کا حوالہ دینے کے بغیر پہلی دو مثلثی نسبتوں کی مدد سے آخری چار مثلثی نسبتیں حاصل ہو سکتی ہیں۔

مثلاً مس (- طہ) = جب(- طہ) / جم (- طہ) = - جب طہ / جم طہ = - مس طہ

مم (- طہ) = جم(- طہ) / جب(- طہ) = جم طہ / - جب طہ = - مم طہ

قم (- طہ) = ۱ / جب (- طہ) = ۱ / - جب طہ = - قم طہ

اور قط (- طہ) = ۱ / جم (- طہ) = ۱ / جم طہ = قط طہ]

مثال　جب (- ۳۰°) = - جب ۳۰° = - ½

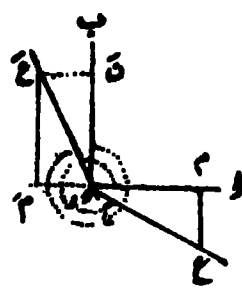
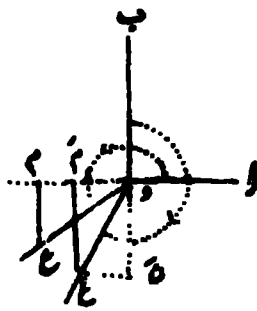
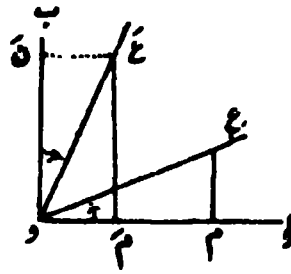
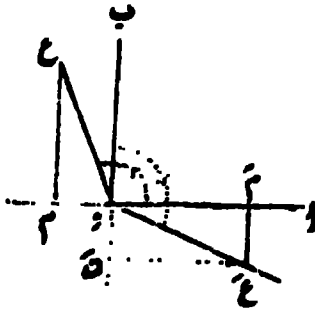
مس (- ۶۰°) = - مس ۶۰° = - √۳

جم (- ۴۵°) = جم ۴۵° = ۱ / √۲

۵۷۔ طہ کی تمام قیمتوں کے لئے زاویہ (۹۰ - طہ) کی مثلثی نسبتوں کو طہ کی رقوم میں دریافت کرو۔

دفعہ ۴۴ میں جہاں زاویہ، قائمہ سے کم تھا ان ارتباطات پر ایک دفعہ بحث ہو چکی ہے۔ فرض کرو کہ خط دائر مقام و ا سے شروع ہو کر زاویہ ا و ع مرتسم کرتا ہے جہاں ا و ع = طہ

زاویہ ۹۰ - طہ حاصل کرنے کے لئے فرض کرو کہ خط دائر ابتدا میں ب تک حرکت کرتا ہے اور اس کے بعد ب سے سمت مخالف میں بقدر زاویہ طہ کے اُلٹا پھرتا ہے اور اُس وقت

اس کا مقام وعؔ ہوتا ہے۔
اوعؔ زاویہ مطلوبہ ۹۰ - ط ہے۔
وعؔ کو وع کے مساوی بناؤ اور عمود عؔمؔ اور ع م خط ابتدائی
و ا یا او ممدودہ پر نکالو، نیز وب یا ب و ممدودہ پر عمود
عؔنؔ کھینچو۔
ہر ایک شکل میں از روئے عمل زاوئے اوع اور ب وعؔ
تعداداً برابر ہیں۔

زاویہ م وع = ∠ نؔ وعؔ = ∠ وعؔ مؔ
چونکہ ہر ایک شکل میں ونؔ اور مؔعؔ متوازی ہیں
لہذا مثلث م وع اور مؔعؔو ہر طرح سے مساوی ہیں
اور اس لئے وم = مؔعؔ تعداداً
اور وم ؔ = م ع تعداداً

نیز ہر ایک شکل میں وم اور مَ عَ متحد العلامت ہیں اور نیز مع اور وَمَ کی علامت ایک ہی ہے۔

یعنی وم = + مَعَ اور وَمَ = + مع

اسلئے جب (۹۰ − ط) = جب ا و عَ = مَعَ / وعَ = وم / وع = جم ط

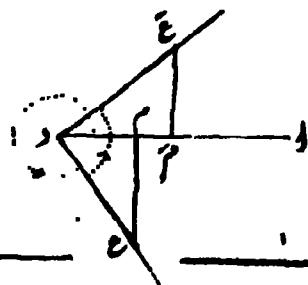
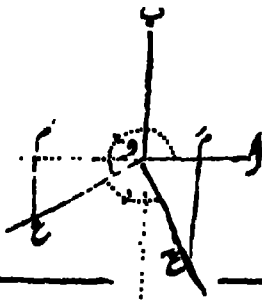
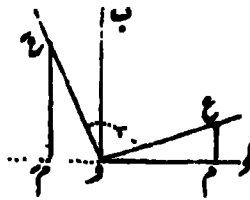
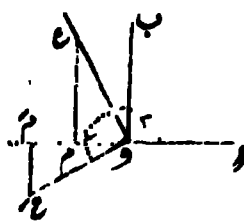
جم (۹۰ − ط) = جم ا و عَ = وَمَ / وعَ = مع / وع = جب ط

مس (۹۰ − ط) = مس ا و عَ = مَعَ / وَمَ = وم / مع = مم ط

مم (۹۰ − ط) = مم ا و عَ = وَمَ / مَعَ = مع / وم = مس ط

قط (۹۰ − ط) = قط ا و عَ = وعَ / وَمَ = وع / مع = قم ط

قم (۹۰ − ط) = قم ا و عَ = وعَ / مَعَ = وع / وم = قط ط

۶۷ — زاویہ (۹۰ + ط) کی مثلثی نسبتوں کو ط کی تمام قیمتوں کے لئے ط کی رقوم میں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ خط دائر و ا سے شروع ہوکر زاویہ ط مرتسم کرتا ہے اور اس وقت اس کا مقام و ع ہوتا ہے یعنی زاویہ ا و ع = ط

فرض کرو کہ اس کے بعد خط دائر و ع سے مقام و عَ تک ایک زاویہ قائمہ میں حرکت کرتا ہے یعنی فرض کرو کہ زاویہ

ا و عَ = (۹۰° + ط)

و عَ کو و ع کے مساوی قطع کرو اور ع م اور عَ مَ عمود ا و یا ا و ممدودہ پر نکالو، ہر ایک شکل میں چونکہ ع و عَ قائمہ ہے اس لئے زاویوں م و ع اور عَ و مَ کا مجموعہ ایک قائمہ کے برابر ہے۔

اس لئے زاویہ م و ع = ۹۰° - ∠ عَ و مَ = ∠ و عَ مَ

لہذا مثلث م و ع اور مَ عَ و ہر طرح سے باہم مساوی ہیں۔

اس لئے و م اور مَ عَ تعداداً مساوی ہیں، اسی طرح سے م ع اور و مَ تعداداً مساوی ہیں

ہر ایک شکل میں و م اور مَ عَ متحد العلامت ہیں لیکن م ع اور و مَ کی علامتیں مختلف ہیں یعنی

مَ عَ = + و م اور و مَ = - م ع

اس لئے

جب (۹۰° + ط) = جب ا و عَ = مَ عَ / و عَ = و م / و ع = جم ط

جم (۹۰° + ط) = جم ا و عَ = و مَ / و عَ = -م ع / و ع = جب ط

مس (۹۰° + ط) = مس ا و عَ = مَ عَ / و مَ = و م / -م ع = -مم ط

مم (۹۰° + طہ) = مم اوعَ = وم / مَعَ = -مع / وم = -مس طہ

قط (۹۰° + طہ) = قط اوعَ = وعَ / ومَ = وع / -مع = -قم طہ

اور قم (۹۰° + طہ) = قم اوعَ = وعَ / مَعَ = وع / وم = قط طہ

امثلہ جب ۱۵۰° = جب (۹۰° + ۶۰°) = جم ۶۰° = ۱/۲

جم ۱۳۵° = جم (۹۰° + ۴۵°) = -جب ۴۵° = -۱/√۲

مس ۱۲۰° = مس (۹۰° + ۳۰°) = -مم ۳۰° = -√۳

۷۷ - زاویاتِ تکملہ

جب دو زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہو تو اُن میں سے ہر ایک کو دوسرے کا تکمِل یا تکملہ کہتے ہیں مثلاً کسی زاویہ طہ کا تکملہ ۱۸۰° - طہ ہے۔

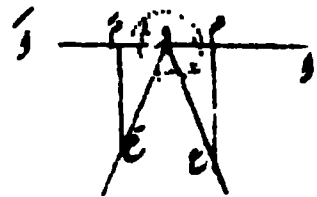
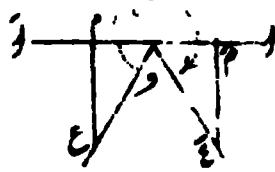
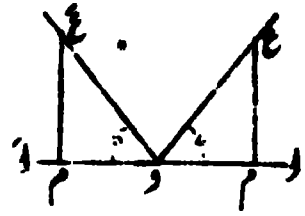
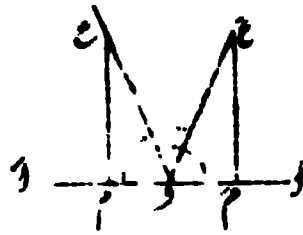
امثلہ ۳۰° کا تکملہ = ۱۸۰° - ۳۰° = ۱۵۰°

۱۲۰° کا تکملہ = ۱۸۰° - ۱۲۰° = ۶۰°

۲۷۵° کا تکملہ = ۱۸۰° - ۲۷۵° = -۹۵°

-۱۲۶° کا تکملہ = ۱۸۰° - (-۱۲۶°) = ۳۰۶°

-۳۱۰° کا تکملہ = ۱۸۰° - (-۳۱۰°) = ۴۹۰°

۷۸ - زاویہ (۱۸۰° - طہ) کی مثلثی نسبتیں طہ کی تمام قیمتوں کے لئے طہ کی رقوم میں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ خط دائر مقام وا سے شروع ہوکر زاویہ ا و ع (= ط)
م کرتا ہے۔
یہ ۱۸۰ - ط حاصل کرنے کے لئے فرض کرو کہ خط دائر وا سے
وع ہوکر دو قائمے مرتسم کرتا ہے اور مقام واَ پر پہنچتا ہے اسکے بعد
ت مخالف میں بقدر زاویہ ط کے حرکت کرکے مقام وعَ پر
ہے اور اس طرح سے ایک ایسا زاویہ اَ و عَ مرتسم کرتا ہے
مقدار میں زاویہ ا و ع کے مساوی لیکن علامت میں اس سے
ف ہوتا ہے۔
ہر ہے کہ زاویہ ا و عَ = ۱۸۰ - ط
عَ کو وع کے برابر قطع کرو اور ا وا َ پر عَ مَ اور ع م عمود نکالو
ئے م وع اور مَ و عَ برابر ہیں اور اس لئے مثلث م وع
مَ و عَ ہر طرح سے مساوی ہیں لہٰذا وم اور ومَ مقدار میں

برابر ہیں اور نیز م ع اور مَ عَ بھی باہم مساوی ہیں۔
پر ایک شکل میں وم اور ومَ مختلف سمتوں میں کھینچے گئے ہیں لیکن م ع اور مَ عَ ایک ہی سمت میں کھینچے گئے ہیں۔ یعنی

ومَ = ــ وم اور مَ عَ = + م ع
اس لئے

جب (۱۸۰ ـ ط) = جب ا و عَ = مَ عَ / و عَ = م ع / و ع = جب ط

جم (۱۸۰ ـ ط) = جم ا و عَ = و مَ / و عَ = ــ و م / و ع = ــ جم ط

مس (۱۸۰ ـ ط) = مس ا و عَ = مَ عَ / و مَ = م ع / ــ و م = ــ مس ط

مم (۱۸۰ ـ ط) = مم ا و عَ = و مَ / مَ عَ = ــ و م / م ع = ــ مم ط

قط (۱۸۰ ـ ط) = قط ا و عَ = و عَ / و مَ = و ع / ــ و م = ــ قط ط

قم (۱۸۰ ـ ط) = قم ا و عَ = و عَ / مَ عَ = و ع / م ع = قم ط

امثلہ جب ۱۲۰ = جب (۱۸۰ ـ ۶۰) = جب ۶۰ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

جم ۱۳۵ = جم (۱۸۰ ـ ۴۵) = ــ جم ۴۵ = ــ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

مس ۱۵۰ = مس (۱۸۰ ـ ۳۰) = ــ مس ۳۰ = ــ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

۷۹ ـــ ط کی تمام قیمتوں کے لئے زاویہ (۱۸۰ + ط) کی مثلثی نسبتیں ط کی رقوم میں دریافت کرو۔

ارتباطات مطلوبہ دفعہ گذشتہ کے موافق بذریعہ اشکال ہندسیہ

حاصل ہو سکتے ہیں، اس مسئلہ کی اشکال کھینچنے میں دقت ہو گی طالبعلم کے لئے وہ برائے مشق چھوڑ دی گئی ہیں۔

نیز تعلقات مذکورہ کا استنباط نتائج دفعہ ۷۶ سے بھی ہو سکتا ہے جو زاویہ کی کسی مقدار کے لئے صحیح ثابت کئے گئے ہیں مثلاً فرض کرو کہ ۹۰° + ط = ب

اس لئے جب (۱۸۰° + ط) = جب (۹۰° + ب) = جم ب (دفعہ ۷۶)

= جم (۹۰° + ط) = − جب ط (دفعہ ۷۶)

اور جم (۱۸۰° + ط) = جم (۹۰° + ب) = − جب ب (دفعہ ۷۶)

= − جب (۹۰° + ط) = − جم ط (دفعہ ۷۶)

نیز مس (۱۸۰° + ط) = مس (۹۰° + ب) = − تم ب

= − تم (۹۰° + ط) = مس ط

اور اسی طرح سے　تم (۱۸۰° + ط) = تم ط

قط (۱۸۰° + ط) = − قط ط

قم (۱۸۰° + ط) = − قم ط

۸۰ — ط کی تمام قیمتوں کے لئے زاویہ (۳۶۰° + ط) کی مثلثی نسبتیں ط کی رقوم میں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ خط دائر کوئی زاویہ ط مرتسم کرنے کے بعد کسی خاص مقام پر واقع ہے، اب اگر یہ مثبت سمت میں ایک پورا چکر لگا لے یعنی زاویہ ۳۶۰° + ط مرتسم کرے تو اس کے مقام میں کوئی فرق نہیں آئے گا، خط دائر بعینہٖ اُسی مقام پر ہو گا جہاں پہلے تھا۔

معلوم ہوا کہ زاویہ ۳۶۰° + ط کی مثلثی نسبتیں وہی ہوتی ہیں جو

زاویہ ط کی ہیں۔

اور اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی زاویہ پر ۳۶۰° یا ۳۶۰° کا کوئی ضعف زیادہ کرنے یا مقدار زاویہ سے ۳۶۰° یا اس کا کوئی ضعف کم کرنے سے اس کی شلثی نسبتوں میں کچھ فرق نہیں آتا۔

۸۱ — اس باب کے مسائل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ بڑے سے بڑے زاویے کی شلثی نسبتوں کی تحویل ایک ایسے زاوئے کی شلثی نسبتوں میں ہوسکتی ہے جو ۰ اور ۴۵° کے درمیان واقع ہو۔

مثلاً جب ۱۶۶۵° = جب (۴ × ۳۶۰° + ۲۲۵°) = جب ۲۲۵° (دفعہ ۸۰)

= جب (۱۸۰° + ۴۵°) = − جب ۴۵° (دفعہ ۷۹)

= − جب (۱۸۰° − ۳۵°) = − جب ۳۵° (دفعہ ۷۸)

سس ۱۱۹۰° = سس (۳ × ۳۶۰° + ۱۱۰°) = سس ۱۱۰° (دفعہ ۸۰)

= سس (۹۰° + ۲۰°) = − مم ۲۰° (دفعہ ۷۶)

اور قم (− ۱۴۶۵°) = − قم ۱۴۶۵° (دفعہ ۷۴)

= − قم (۴ × ۳۶۰° + ۲۵°) = − قم ۲۵° (دفعہ ۸۰)

اسی طرح سے اور زاویوں کی تحویل ہوسکتی ہے، سب سے اول زاویہ مجوزہ سے ۳۶۰° کے اضعاف تفریق کرتے جاؤ جبتک کہ زاویہ ۰ اور ۳۶۰° کے درمیان نہ آجائے، اب اگر یہ ۱۸۰° سے بڑا ہو تو اس میں سے ۱۸۰° منفی کرو، اس کے بعد اگر یہ ۹۰° سے بڑا ہو تو ضوابط دفعہ ۷۶ کو استعمال کرو اور آخرالامر اگر ضرورت ہو تو ضابطہ دفعہ ۷۵ کی مدد لو۔

۸۲ — قائمہ سے بڑے چند مشہور زاویوں کی صورت میں جدول دفعہ ۴۵ کی توسیع اس طرح ہوسکتی ہے۔

زاویہ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
جیب	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
جیب التمام	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
مماس	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
مماس التمام	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞
قاطع التمام	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
قاطع الزاویہ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1

امثلہ نمبری (١٠)

ثابت کرو کہ

١- جب ٤٢٠° جم ٣٩٠° + جم (-٣٠٠°) جب (-٣٣٠°) = ١

٢- جم ٥٧٠° جب ٥١٠° - جب ٣٣٠° جم ٣٩٠° = ٠

٣- مس ٢٢٥° مم ٤٠٥° + مس ٧٦٥° مم ٦٧٥° = ٠

اگر ا کی قیمتیں مفصلہ ذیل ہوں تو جم ا - جب ا اور مس ا + مم ا کی قیمتیں دریافت کرو۔

٤- $\frac{\pi}{3}$　　٥- $\frac{2\pi}{3}$　　٦- $\frac{5\pi}{4}$

٧- $\frac{7\pi}{4}$　　٨- $\frac{11\pi}{3}$

ا کی قیمتیں دریافت کرو جو ٠° اور ٣٦٠° کے درمیان ہوں جبکہ

٩- جب ا = $\frac{1}{\sqrt{2}}$　　١٠- جم ا = $-\frac{1}{2}$

١١- مس ا = -١　　١٢- تم ا = $-\sqrt{3}$

١٣- قط ا = $-\frac{2}{\sqrt{3}}$　　١٤- قم ا = -٢

مقادیر ذیل کو ایک ایسے مثبت زاویہ کی مثلثی نسبتوں کی رقوم میں بیان کرو جو ٤٥° سے کم ہو۔

١٥- جب (-٦٥°)　　١٦- جم (-٩٤°)

١٧- مس ١٣٧°　　١٨- جب ١٦١°

١٩- جم ٢٨٧°　　٢٠- مس (-٢٤٣٦°)

۲۱- جب ۸۴۳° ۲۲- جم (-۹۲۸°)

۲۳- سس ۱۱۴۵° ۲۴- جم ۱۴۱۰°

۲۵- مم (-۱۰۵۴°) ۲۶- قط ۳۲۷°

۲۷- تم (-۷۵۶°)

ا کی مفصلہ ذیل قیمتوں کے لئے جب ا + جم ا کی علامات دریافت کرو

۲۸- ۱۴۰° ۲۹- ۷۷۸° ۳۰- -۳۵۶° ۳۱- -۱۱۲۵°

ا کی مفصلہ ذیل قیمتوں کے لئے جب ا - جم ا کی علامات دریافت کرو۔

۳۲- ۲۱۵° ۳۳- ۸۲۵° ۳۴- -۲۳۳° ۳۵- +۴۵۷°

۳۶- اُن سب زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام دریافت کرو جو پہلے چار ربعوں میں واقع ہوں اور جن کے مماس، جم ۱۳۵° کے برابر ہوں۔

ثابت کرو کہ

۳۷- جب (۲۷۰° + ا) = - جم ا اور سس (۲۷۰° + ا) = - مم ا

۳۸- جم (۲۷۰° - ا) = - جب ا اور مم (۲۷۰° - ا) = سس ا

۳۹- جم ا + جب (۲۷۰° + ا) - جب (۲۷۰° - ا) + جم (۱۸۰° + ا) = ۰

۴۰- قط (۲۷۰° - ا) قط (۹۰° - ا) - سس (۲۷۰° - ا) سس (۹۰° + ا) + ۱ = ۰

۴۱- مم ا + سس (۱۸۰° + ا) + سس (۹۰° + ا) + سس (۳۶۰° - ا) = ۰

باب ششم

جملات عامہ اُن سب زاویوں کے لئے جو ایک مقررہ مثلثی نسبت رکھتے ہوں

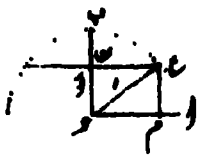
۸۳- ایک چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ بناؤ جس کی جیب ایک کسر واجب اَ کے برابر ہو۔

فرض کرو کہ وا خط ابتدائی ہے اور وب مثبت سمت میں وا پر عمود ہے، وب پر فاصلہ ون برابر اَ کے ناپو۔ [اگر اَ منفی ہو تو نقطہ ن، ب و ممدودہ پر واقع ہوگا۔]

نقطہ ن سے ن ع متوازی وا کے کھینچو اور و کو مرکز مان کر ایک ایسا دائرہ کھینچو جس کا نصف قطر ایک ہو اور جو خط ن ع کو نقطہ ع پر ملے تب اوع زاویہ مطلوبہ ہوگا۔

وا پر عمود ع م نکالو پس

$$\text{جب اوع} = \frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} = \frac{\text{و ن}}{\text{و ع}} = \frac{\text{اَ}}{\text{۱}} = \text{اَ}$$

زاویہ اوع کی جیب مقدار معلومہ کے برابر ہے اسلئے اوع

زاویہ مطلوبہ ہے

۸۴ - ایک چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ بناؤ جسکی جیب التمام ایک کسر واجب ب کے برابر ہو

خط ابتدائی پر ایک فاصلہ وم برابر ب کے قطع کرو اور وا پر عمود م ع نکالو [اگر ب منفی ہو تو م نقطہ و کی دوسری طرف او ممدودہ پر واقع ہوگا]

و کو مرکز مان کر ایک ایسا دائرہ کھینچو جس کا نصف قطر ایک ہو اور جو م ع کو نقطہ ع پر ملے۔

ا و ع زاویہ مطلوبہ ہے کیونکہ

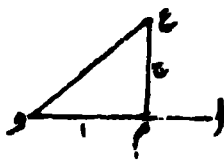
$$\text{جم ا و ع} = \frac{\text{و م}}{\text{و ع}} = \frac{\text{ب}}{\text{۱}} = \text{ب}$$

۸۵ - ایک چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ بناؤ جس کا مماس ج کے برابر ہو۔

خط ابتدائی پر وم برابر ایک کے لو اور نقطہ م پر ایک عمود م ع برابر ج کے قائم کرو۔ تب

$$\text{مس ا و ع} = \frac{\text{م ع}}{\text{و م}} = \text{ج}$$

پس ا و ع زاویہ مطلوبہ ہے

۸۶ - دفعہ ۵۶ کی تعریفات سے ظاہر ہے کہ جب کوئی

زاویہ معلوم ہو تو اس کی جیب بھی معلوم ہوسکتی ہے مگر اس کا عکس درست نہیں ہے کیونکہ ایک سے زیادہ زاویئے ایسے ہوتے ہیں جن کی ایک ہی جیب ہو مثلاً ذیل کے سب زاویوں کی جیب ½ کے برابر ہے۔

۳۰°، ۱۵۰°، ۳۹۰°، ۲۱۰-°، ......

اس سے ظاہر ہے کہ جب کسی زاویہ کی جیب دی ہوئی ہو تو زاویہ کی مقدار صحیح طور پر معلوم نہیں ہوسکتی، صرف اتنا معلوم ہوتا ہے کہ زاویوں کی تعداد کثیر میں سے کوئی ایک زاویہ مطلوبہ زاویہ ہے۔

جب کسی زاویئے کی جیب التمام، مماس یا اور مثلثی نسبتیں معلوم ہوں تو اسی قسم کے بیانات صادق آتے ہیں۔

پس معلوم ہوا کہ اگر کسی زاویئے کی کوئی ایک مثلثی نسبت دی ہوئی ہو تو مقدار زاویہ بغیر اشتباہ کے معلوم نہیں ہوسکتی

۸۷۔ فرض کرو کہ خط دائر وع خط ابتدائی وا پر منطبق ہوتا ہے اس سے ہمیں صرف اتنا معلوم ہوتا ہے کہ خط دائر نے مثبت یا منفی سمت میں ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳، ..... چکر لگائے ہیں۔

لیکن جب خط دائر ایک چکر لگاتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ ۲π نیمقطری زاویوں کے برابر ہوتا ہے، اس لئے جب خط دائر خط ابتدائی وا پر منطبق ہوتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ مثبت یا منفی سمت میں ۲π کا ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳، ... گنا ہوتا ہے یعنی، یا ۲π± ، یا ۴π± ، یا ۶π± ..... ہوتا ہے

اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ جب خط دائر خط ابتدائی پر منطبق ہوتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ ۲ ن π ہوتا ہے جہاں ن مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

۸۸۔ مسئلہ ان سب زاویوں کے لئے جن کی ایک ہی جیب ہو ایک جملہ عامہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ زاویہ اوع (= عہ) کی جیب معلوم ہے۔

وا پر عمود ع م نکالو اور م و کو مَ اتنا خارج کرو کہ وم َ برابر وم کے ہو اور مَ عَ کو متوازی اور مساوی م ع کے بناؤ۔

بموجب دفعہ ۸۷ زاویہ اوعَ = π - عہ

جب خط دائر مقام وع یا وعَ پر (اور صرف انہی دو مقامات پر) ہوتا ہے تو اس کے زاویہ مرتسمہ کی جیب، جیب معلومہ کے برابر ہوتی ہے۔

جب خط دائر مقام وع پر ہو تو ظاہر ہے کہ اس نے چند پورے چکر لگانے کے بعد زاویہ عہ مرتسم کیا ہے یعنی بموجب دفعہ گزشتہ اسنے زاویہ

$$۲ ر \pi + عہ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۱)$$

مرتسم کیا ہے جہاں ر صفر یا کسی مثبت یا منفی صحیح عدد کے برابر ہوسکتی ہے۔

خط دائرہ مقاوم واقع ہوتا ہے... ظاہر ہے کہ اس نے ایک
زاویہ ۲ ل π + ا و ع یعنی ایک زاویہ ۲ ل π + π − عہ

یعنی (۲ ل + ۱) π − عہ .... (۲)

مرتسم کیا ہے جہاں ل صفر یا کسی مثبت یا منفی صحیح عدد کے برابر ہو سکتی ہے۔

اوپر کے سب زاوئے جملہ

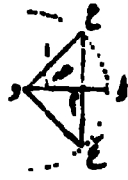
ن π + (−۱)ⁿ ا .... (۳)

میں شامل ہیں جہاں ن صفر یا مثبت یا منفی صحیح عدد کے برابر ہو سکتا ہے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ اگر ن = ۲ ل تو (−۱)^۲ل = +۱ اور جملہ (۳) میں ن کی یہ قیمت مندرج کرنے سے ۲ ل π + عہ حاصل ہوتا ہے اور یہ بعینہ جملہ (۱) ہے

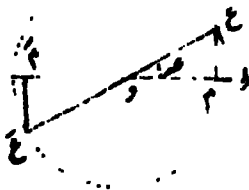
نیز اگر ن = ۲ ل + ۱ تو (−۱)^(۲ل+۱) = −۱ اور جملہ (۳) میں ن کی یہ قیمت رکھنے سے (۲ ل + ۱) π − عہ حاصل ہوتا ہے اور یہ بعینہ جملہ (۲) ہے

نتیجہ صریح۔ اب چونکہ قاطع التمام جیب کا مکافی ہے اسلئے جن زاویوں کی جیوب باہم برابر ہوں اُن کے قاطع التمام بھی برابر ہونگے اور اس لئے جملہ (۳) میں وہ سب زاویے شامل ہیں جن کا قاطع التمام وہی ہو جو عہ کا ہے۔

۸۹ ـ مسئلہ۔ ان سب زاویوں کے لئے جن کی ایک ہی جیب التمام ہو ایک جملہ عامہ دریافت کرو

فرض کرو کہ زاویہ ا و ع کی جیب التمام مقدار معلومہ کے برابر ہے

ناویہ کو عہ سے تعبیر کرو۔
نود ع م نکالو اور اس کو ع َ تک
نا خارج کرو کہ م عَ = ع م
ب خط دائر مقام وع یا وعَ (اور
انہی دو مقامات) پر ہوتا ہے تب
مرتسمہ کی جیب التمام جیب التمام معلومہ کے برابر ہوتی ہے دیکھو دفعہ ۸۴
جب خط دائر مقام وع پر ہو تو اس وقت اس نے چند پورے
انے کے بعد ایک زاویہ عہ مرتسم کیا ہے یعنی اس وقت
نے ایک زاویہ ۲ ن π + عہ مرتسم کیا ہے جہاں ن صفر یا
مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔
جب خط دائر مقام وعَ پر ہو تو اس نے چند پورے چکر لگانے
بعد زاویہ -عہ مرتسم کیا ہے یعنی ایک زاویہ ۲ ن π - عہ مرتسم
ہے۔
اور یہ سب زاویئے جملہ

۲ ن π ± عہ ....(۱)

شامل ہیں جہاں ن صفر یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔
بصر تیح۔ جملہ (۱) میں وہ سب زاویے شامل ہیں جن کا قاطع
ہے جو عہ کا ہے۔
ــہ مسئلہ۔ اُن سب زاویوں کے لئے جن کا ایک ہی
س ہو ایک جملہ عامہ دریافت کرو۔
فرض کرو کہ کوئی زاویہ اوع = عہ اور اس کا ماس، ماس معلوم کے

برابر ہے ع و کو عَ تک خارج
کرو اور وعَ کو وع کے برابر بناؤ
ومَ پر عمود عَ مَ نکالو
بموجب دفعہ ۹۷ مماس زاویہ اوع
مماس زاویہ اوعَ کے مساوی ہے
نیز زاویہ اوعَ = ۲۱ + عہ
جب خط دائر مقام وع پر ہو تو ظاہر ہے کہ اس نے چند پورے چکر
لگانے کے بعد زاویہ عہ مرتسم کیا ہے۔
یعنی اس نے زاویہ

۲ ل ۲۱ + عہ ....(۱)

مرتسم کیا ہے جہاں ل صفر یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے
جب خط دائر مقام وعَ پر ہو تو اس نے زاویہ ۲ل۲۱ + (۲۱ + عہ)

یعنی زاویہ (۲ ل + ۱) ۲۱ + عہ ....(۲)

مرتسم کیا ہے۔
اوپر کے تمام زاویے جملہ

ن ۲۱ + عہ ....(۳)

میں شامل ہیں جہاں ن صفر یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔
اور اس کی وجہ یہ ہے کہ جب ن جفت ہو (یعنی = ۲ ل) تو جملہ
(۳) سے وہی زاویے حاصل ہوتے ہیں جو جملہ (۱) میں شامل
ہیں۔
نیز جب ن طاق ہو: یعنی = ۲ ل + ۱) تو

جملہ (۳) سے وہ سب زاویئے حاصل ہوتے ہیں جو (۲) میں شامل تھے۔
نتیجہ صریح - جملہ (۳) میں وہ سب زاویئے شامل ہیں جنکا ماس اتمام وہی ہو جو عہ کا ہے۔

۹۱ - دفعات ۸۸، ۸۹ اور ۹۰ میں زاویہ عہ کوئی زاویہ ہے جو شرائط معلومہ کو پورا کرتا ہے، مگر عملی مثالوں میں بالعموم بہتر ہوگا کہ عہ چھوٹے سے چھوٹا وہ مثبت زاویہ منتخب کیا جائے جو شرائط سوال کو پورا کرے۔

مثال ۱- اُن سب زاویوں کے لئے ایک جملہ عامہ دریافت کرو۔

(۱) جن کی جیب، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ کے برابر ہو

(۲) جن کی جیب التمام، $-\frac{1}{2}$ کے برابر ہو

(۳) جن کا ماس، $\frac{1}{\sqrt{3}}$ کے برابر ہو

(۱) چھوٹے سے چھوٹا زاویہ جس کی جیب $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہو ۶۰° یعنی $\frac{\pi}{3}$ کے برابر ہوتا ہے، اس لئے بموجب دفعہ ۸۶ اُن سب زاویوں کے لئے جن کی جیب $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہو ایک جملہ عامہ

$$ن \pi + (-1)^{ن} \frac{\pi}{3}$$ ہوگا

(۲) چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ جس کی جیب التمام $-\frac{1}{2}$ ہو ۱۲۰° یعنی $\frac{2\pi}{3}$ کے برابر ہوتا ہے
اس لئے بموجب دفعہ ۸۹ اُن سب زاویوں کے لئے جنکی جیب التمام $-\frac{1}{2}$ ہو ایک جملہ عامہ

$$2 ن \pi \pm \frac{2\pi}{3}$$ ہوگا

(۳) چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ جس کا ماس $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہو ۳۰° یعنی $\frac{\pi}{6}$ کے برابر ہوتا ہے۔

اس لئے بموجب دفعہ ۹۰ اُن سب زاویوں کے لئے جن کا ماس $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہے ایک جملہ عامہ

$ن\pi + \frac{\pi}{6}$ ہوگا

مثال ۲۔ طہ کی قیمت عامہ دریافت کرو جو شرائط مساوات جب^2 طہ $= \frac{1}{4}$ کو پورا کرے۔

اس صورت میں جب طہ $= \pm \frac{1}{2}$

علامت مثبت لینے سے

جب طہ $= \frac{1}{2} =$ جب $\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ طہ $= ن\pi + (-1)^{ن} \frac{\pi}{6}$

علامت منفی لینے سے

جب طہ $= -\frac{1}{2} =$ جب $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore$ طہ $= ن\pi + (-1)^{ن}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

طہ کی قیمت کے دونوں جملوں کو اکٹھا کرنے سے

طہ $= ن\pi + (-1)^{ن} \frac{\pi}{6}$

یا طہ $= ن\pi \pm \frac{\pi}{6}$

مثال ۳۔ طہ کی قیمت عامہ دریافت کرو جو شرائط معادلات جب طہ $= -\frac{1}{2}$ اور مس طہ $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ کو پورا کرے۔

طہ کی قیمتیں جو ۰° اور ۳۶۰° کے درمیان واقع ہیں اور جو شرائط مساوات جب طہ $= -\frac{1}{2}$ کو پورا کرتی ہیں صرف ۲۱۰° اور ۳۳۰° ہیں، اسی طرح

سے طہ کی قیمتیں جبکہ مس طہ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ صرف ۳۰° اور ۲۱۰° ہیں، طہ کی قیمت جو ۰ اور ۳۶۰° کے درمیان واقع ہے اور جو مذکورہ بالا دونوں شرائط کو پورا کرتی ہے صرف ۲۱۰° یعنی $\frac{7\pi}{6}$ ہے

اس لئے طہ کی قیمت عامہ اس زاویہ یعنی $\frac{7\pi}{6}$ پر ۲π قائموں کا کوئی مضعف زیادہ کرنے سے حاصل ہوتی ہے اور اس لئے یہ $2n\pi + \frac{7\pi}{6}$ ہے جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

امثلہ نمبری ۱۱

طہ کی عام سے عام قیمتیں دریافت کرو جو شرائط معادلات ذیل کو پورا کریں

۱۔ جب طہ = $\frac{1}{2}$

۲۔ جب طہ = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳۔ جب طہ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۴۔ جم طہ = $-\frac{1}{2}$

۵۔ جم طہ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۶۔ جم طہ = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

۷۔ مس طہ = $\sqrt{3}$

۸۔ مس طہ = ۱-

۹۔ ظم طہ = ۱

۱۰۔ قطر طہ = ۲

۱۱۔ قم طہ = $\frac{2}{\sqrt{3}}$

۱۲۔ جب^2 طہ = ۱

۱۳۔ جم^2 طہ = $\frac{1}{2}$

۱۴۔ مس^2 طہ = $\frac{1}{3}$

۱۵۔ ۴ جب^2 طہ = ۳

۱۶۔ ۲ ظم^2 طہ = قم^2 طہ

۱۷۔ قط^2 طہ = $\frac{4}{3}$

۱۸۔ طہ کی قیمت عامہ دریافت کرو جو شرائط معادلات جم طہ = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

اور مس طہ = ۱ کو پورا کرے

۱۹- طہ کی قیمت عامہ دریافت کرو جو شرائط معادلات مم طہ = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ اور قط طہ = -۲ کو پورا کرے۔

۲۰- اگر جم (ا - ب) = $\frac{1}{2}$ اور جب (ا + ب) = $\frac{1}{2}$ تو ا اور ب کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمتیں نیز اُن کی عام سے عام قیمتیں دریافت کرو

۲۱- اگر مس (ا - ب) = ۱ اور قط (ا + ب) = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ تو ا اور ب کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمتیں نیز اُن کی عام سے عام قیمتیں دریافت کرو۔

۲۲- °۰ اور °۳۶۰ کے درمیان جن زاویوں کی (۱) جیوب $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہوں (۲) جیوب التمام $-\frac{1}{2}$ ہوں (۳) مماس $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہوں، انکو دریافت کرو

۲۳- اگر صرف اُن زاویوں کو ملحوظ رکھا جائے جو °۰ اور °۱۸۰ کے درمیان واقع ہوں تو معلوم کرو کہ ذیل کی مختلف صورتوں میں لا کی کتنی قیمتیں ہیں (۱) جب لا = $\frac{3}{5}$ (۲) جم لا = $\frac{1}{5}$ (۳) جم لا = $-\frac{4}{5}$ (۴) مس لا = $\frac{5}{12}$ (۵) مم لا = -۷

۲۴- زاویہ لا معلوم ہے، زاویہ ما بناؤ اگر (۱) جب ما = ۲ جب لا (۲) مس ما = ۳ مس لا (۳) جم ما = $\frac{1}{2}$ جم لا اور (۴) قط ما = قم لا

۲۵- ثابت کرو کہ ذیل کے دونوں ضابطوں سے وہی زاویے تعبیر ہوتے ہیں۔ (۱) $(2n - 1)\frac{\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{3}$ اور (۲) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے۔

۲۶- ثابت کرو کہ ذیل کے دو ضابطوں

(۱) $\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \pm \alpha$ اور (۲) $n\pi + (-1)^n\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ سے وہی زاویے تعبیر ہوتے ہیں جہاں ن کوئی عدد صحیح ہے، شکل سے

کی توضیح کرو۔

۱۔ اگر طہ - ھ = ن π + (-۱)^ن بہ تو

کرو کہ طہ = ۲ م π + ھ + بہ یا

= (۲م + ۱) π + ھ - بہ جہاں م اور ن کوئی دو صحیح عدد ہیں۔

۱۔ اگر جم ک طہ + جم ق طہ = ۰ تو ثابت کرو کہ اس مساوات کو

کرنے سے طہ کی مختلف قیمتوں کے دو حسابیہ سلسلے حاصل ہوتے ہیں، جن میں

ایک کا فرقِ مشترک $\frac{۲\pi}{ک+ق}$ ہے اور دوسرے کا $\frac{۲\pi}{ک-ق}$

۱۔ ایک ایسا زاویہ بناؤ جس کی جیب $\frac{۳}{۲+۵\sqrt{}}$ ہو۔

۹۔ جس مساوات میں کسی زاویہ غیر معلومہ کی مثلثی نسبتیں

ل ہوں اس کو مثلثی مساوات کہتے ہیں۔

مساوات کا حل پورے طور پر حاصل نہیں ہوتا جب تک کہ

سب زاویوں کے لئے جو شرائط مساوات کو پورا کرتے ہیں

جملہ عامہ حاصل نہ ہو جائے۔

مثلثی معادلات کی چند آسان مثالیں دفعہ ذیل میں مندرج ہیں۔

۹۔ مثال ۱۔ مساوات ۲ جب² لا + $\sqrt{۳}$ جم لا + ۱ = ۰ کو حل کرو۔

یہ مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

۲ - ۲ جم² لا + $\sqrt{۳}$ جم لا + ۱ = ۰

یعنی ۲ جم² لا - $\sqrt{۳}$ جم لا - ۳ = ۰

یعنی (جم لا - $\sqrt{۳}$) (۲ جم لا + $\sqrt{۳}$) = ۰

معلوم ہوا کہ شرائط مساوات معلومہ، جم لا = $\sqrt{۳}$ یا جم لا = $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ سے پوری

ہوتی ہیں۔

چونکہ کسی زاویئے کی جیب التمام تعداداً ایک سے زیادہ نہیں ہو سکتی اس لئے پہلے جزو ضربی سے کوئی قیمت مساوات حاصل نہیں ہوتی۔

چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ جس کی جیب التمام - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہے ۱۵۰° یعنی $\frac{5\pi}{6}$ ہے۔

اس لئے جس زاویہ کی جیب التمام - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہو اس کی عام سے عام قیمت

۲ ن π ± $\frac{5\pi}{6}$ ہوگی (دفعہ ۸۹)

اور مساوات معلومہ کی قیمت عامہ بھی یہی ہوگی۔

مثال ۲۔ مساوات مس ۵ طہ = مم ۲ طہ کو حل کرو

یہ مساوات اس طرح بھی لکھی جا سکتی ہے

مس ۵ طہ = مس ($\frac{\pi}{2}$ - ۲ طہ)۔

اُس زاویہ کی عام سے عام قیمت جس کا مماس وہی ہو جو $\frac{\pi}{2}$ - ۲ طہ کا ہے بموجب دفعہ ۹۰، ن π + $\frac{\pi}{2}$ - ۲ طہ ہے جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

اس لئے مساوات مجوزہ کا عام سے عام حل

۵ طہ = ن π + $\frac{\pi}{2}$ - ۲ طہ ہے

اس لئے طہ = $\frac{1}{7}$ (ن π + $\frac{\pi}{2}$) جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے۔

امثلہ نمبری ۱۲

معادلات ذیل کو حل کرو

۱۔ جم^2 طہ - جب طہ - $\frac{1}{4}$ = ۰

۲- ۲ جب^۲ طہ + ۳ جم طہ = ۰

۳- ۲ √۳ جم^۲ طہ = جب طہ

۴- جم طہ + جم^۲ طہ = ۱

۵- ۴ جم طہ - ۳ قط طہ = ۲ مس طہ

۶- جب^۲ طہ - ۲ جم طہ + ۱/۴ = ۰

۷- مس^۲ طہ - (۱ + √۳) مس طہ + √۳ = ۰

۸- ظل^۲ طہ + (√۳ + ۱/√۳) ظل طہ + ۱ = ۰

۹- ظل طہ - ا ب مس طہ = ا - ب

۱۰- مس^۲ طہ + ظل^۲ طہ = ۲

۱۱- قط طہ - ۱ = (√۲ - ۱) مس طہ

۱۲- ۳ (قط^۲ طہ + مس^۲ طہ) = ۵

۱۳- ظل طہ + مس طہ = ۲ قتم طہ

۱۴- ۴ جم^۲ طہ + √۳ = ۲ (√۳ + ۱) جم طہ

۱۵- ۳ جب^۲ طہ - ۲ جب طہ = ۱　　۱۶- جب ۵ طہ = ۱/(۲√۲)

۱۷- جب ۹ طہ = جب طہ　　۱۸- جب ۳ طہ = جب ۲ طہ

۱۹- جم م طہ = جم ن طہ　　۲۰- جب ۲ طہ = جم ۳ طہ

۲۱- جم ۵ طہ = جم ۴ طہ　　۲۲- جم م طہ = جب ن طہ

۲۳- ظل طہ = مس ۸ طہ　　۲۴- ظل طہ = مس ن طہ

۲۵- مس ۲ طہ = مس ۲/طہ　　۲۶- مس ۲ طہ مس طہ = ۱

۲۷- مس^۲ ۳ طہ = جم^۲ طہ　　۲۸- مس ۳ طہ = ظل طہ

۲۹- مس ۳ طہ = مس ۲ عہ ۳۰- ۳ مس ۲ طہ = ۱

۳۱- مس م لا + مم ن لا = ۰

۳۲- مس (۱۱ مم طہ) = مم (۱۱ مس طہ)

۳۳- جب (طہ - عہ) = $\frac{۱}{۲}$ اور جم (طہ + عہ) = $\frac{۱}{۲}$

۳۴- جم (۲ لا + ۳ ما) = $\frac{۱}{۲}$ اور جم (۳ لا + ۲ ما) = $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳۵- وہ سب زاوئے دریافت کرو جو ۰° اور ۹۰° کے درمیان واقع ہوں اور جو شرائط مساوات قط ۲ طہ قم ۲ طہ + ۲ قم ۲ طہ = ۸ کو پورا کریں

۳۶- اگر مس ۲ طہ = $\frac{۵}{۴}$ تو سمہ طہ دریافت کرو اور مشتبہ جواب کی وجہ بیان کرو

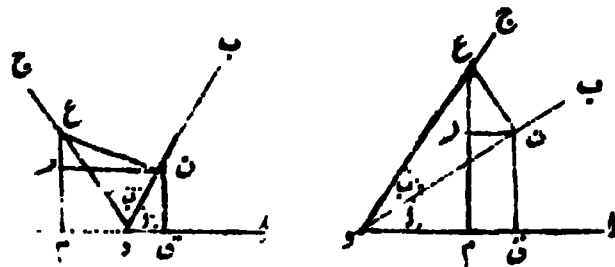
۳۷- اگر کسی زاویہ کا سہم التمام $\frac{۱}{۲}$ ہو تو اس کی جیب التمام اور مماس التمام دریافت کرو-

باب ہفتم

دو زاویوں کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کی مثلثی نسبتیں

۹- مسئلہ- ثابت کرو کہ

جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب

جم (ا + ب) = جم ا جم ب - جب ا جب ب

فرض کرو کہ خط دائر مقام ابتدائی و ا سے شروع ہو کر زاویہ ا و ب (ا) مرتسم کرتا ہے اور اس کے بعد ایک اور زاویہ ب و ج (ب) مرتسم کرتا ہے۔

خط دائر کے آخری مقام و ج پر کوئی نقطہ ع مقرر کرو اور و ا اور

وب پر بالترتیب عمود ع م اور ع ن نکالو
نقطہ ن میں سے ن ر متوازی او کے اس طرح کھینچو کہ وہ م ع
کو نقطہ ر پر قطع کرے اور وا پر عمود ن ق نکالو۔

زاویہ ر ع ن = ۹۰ - ∠ ع ن ر = ∠ ر ن و = ∠ ن و ق = ا

اس لئے جب (ا + ب) = جب ا و ع = م ع / و ع

= (م ر + ر ع) / و ع = ق ن / و ع + ر ع / و ع

= ق ن / و ن × و ن / و ع + ر ع / ن ع × ن ع / و ع

= جب ا جم ب + جم ر ع ن جب ب

∴ جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب

نیز جم (ا + ب) = جم ا و ع = و م / و ع = (و ق - م ق) / و ع

= و ق / و ع - ر ن / و ع = و ق / و ن × و ن / و ع - ر ن / ن ع × ن ع / ر ع

= جم ا جم ب - جب ر ع ن × جب ب

∴ جم (ا + ب) = جم ا جم ب - جب ا جب ب

۹۵۔ دفعہ گزشتہ کی اشکال صرف اُس صورت کے لئے کھینچی گئی ہیں جب دونوں زاویے ا اور ب حادے ہوں لیکن یہی ثبوت ہر مقدار کے زاویوں پر حادی ہوگا اگر اُن سب مقادیر کی علامات کا جو اسکے حسابات میں شامل ہوں خاص لحاظ رکھا جائے

نتائج مندرجہ بالا کی عمومیت سب زاویوں کے لئے بغیر اور اشکال
بنے کے اس طرح ثابت ہو سکتی ہے ۔
فرض کرو کہ ا اور ب دو حادّ ے زاوئے ہیں پس بموجب دفعہ ۹۴ ہم
جانتے ہیں کہ مسئلہ ا اور ب کے لئے صحیح ہے۔
فرض کرو کہ ا' = ۹۰ + ا اسلئے بموجب دفعہ ۷۶
جب ا' = جم ا اور جم ا' = - جب ا
پس جب (ا' + ب) = جب { ۹۰ + (ا + ب) } = جم (ا + ب) موافق دفعہ ۷۶
= جم ا جم ب - جب ا جب ب = جب ا' جم ب + جم ا' جب ب
نیز جم (ا' + ب) = جم { ۹۰ + (ا + ب) } = - جب (ا + ب)
= - جب ا جم ب - جم ا' جب ب
= جم ا' جم ب - جب ا' جب ب
اگر زاویہ ب پر ۹۰° زیادہ کردئے جائیں تو بھی اسی طرح کا عمل ہو سکتا
ہے۔ لہذا ثابت ہوا کہ ضوابط دفعہ ۹۴ اُس صورت میں بھی درست رہتے
ہیں جب مقدار زاویہ ا یا ب پر ۹۰° زیادہ کردئے جائیں یعنی اگر انکے
یعنی زاویوں کی قیمتیں ۰° اور ۱۸۰° کے درمیان واقع ہوں۔
اسی طرح سے ا' کو ۹۰ + ا' کے مساوی رکھنے سے ہم مسائل مذکورہ کی
صداقت کو اُس صورت میں بھی قایم کر سکتے ہیں جب ایک یا دونوں
یعنی زاویوں کی قیمتیں ۰° اور ۲۷۰° کے درمیان واقع ہوں ۔
اسی طرح کا عمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مسائل مذکورہ بالعموم صحیح ہیں۔

۱ ۔ مسئلہ۔ ثابت کرو کہ
جب (ا - ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب

اور جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب

فرض کرو کہ خط دائر خط ابتدائی وا سے شروع ہو کر زاویہ اوب (= ا) مرتسم کرتا ہے اور اس کے بعد سمت مقابل میں حرکت کرنے سے ایک زاویہ ب وج پیدا کرتا ہے جس کی مقدار ب ہے اسلئے

زاویہ اوج = ا - ب

خط دائر کے آخری مقام وج پر کوئی نقطہ ع مقرر کرو اور خطوط وا اور وب پر بالترتیب عمود ع م اور ع ن کھینچو، نقطہ ن سے خطوط وا اور م ع پر بالترتیب عمود ن ق اور ن ر نکالو

زاویہ رع ن = ۹۰ - ع ن ر = رن ب = ق ون = ا

اس لئے

$$\text{جب (ا - ب)} = \text{جب اوج} = \frac{\text{م ع}}{\text{وع}} = \frac{\text{م ر - ع ر}}{\text{وع}}$$

$$= \frac{\text{ق ن}}{\text{وع}} - \frac{\text{ع ر}}{\text{وع}} = \frac{\text{ق ن}}{\text{و ن}} \times \frac{\text{و ن}}{\text{وع}} - \frac{\text{ع ر}}{\text{ع ن}} \times \frac{\text{ع ن}}{\text{وع}}$$

= جب ا جم ب - جم رع ن جب ب

اس لئے جب (ا - ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب

$$\text{نیز جم (ا - ب)} = \frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \frac{\text{وق + ق م}}{\text{وع}} = \frac{\text{وق}}{\text{وع}} + \frac{\text{ن ر}}{\text{وع}}$$

$$= \frac{\text{وق}}{\text{و ن}} \times \frac{\text{و ن}}{\text{وع}} + \frac{\text{ن ر}}{\text{ن ع}} \times \frac{\text{ن ع}}{\text{وع}}$$

= جم ا جم ب + جب ا جب ب

ا لئے جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب

۵۔ دفعہ گزشتہ کے ثبوت ہر مقدار کے زاویوں پر حاوی ہونگے اگر
اوپر زیر بحث کی علامات کا مناسب خیال رکھا جائے۔
اگر حادے زاویوں کی صورت میں نتائج مندرجہ ان لئے جائیں تو بغیر
اشکال کھینچنے کے ان کی صداقت بالعموم اس طرح ثابت ہوسکتی ہے
فرض کرو کہ اَ = ۹۰° + ا　　تب

(چونکہ جب اَ = جم ا اور جم اَ = - جب ا)

ب (اَ - ب) = جب [۹۰° + (ا - ب)] = جم (ا - ب)　　(دفعہ ۷۶)

= جم ا جم ب + جب ا جب ب

= جب اَ جم ب - جم اَ جب ب

م (اَ - ب) = جم [۹۰° + (ا - ب)] = - جب (ا - ب)　　(دفعہ ۷۶)

= - جب ا جم ب + جم ا جب ب

= جم اَ جم ب + جب اَ جب ب

اسی طرح کا عمل ہوسکتا ہے اگر زاویہ ب پر ۹۰° زیادہ کردئے جائیں۔
ایہ مسئلہ اُن سب زاویوں کے لئے صحیح ثابت ہوا جو دو قائموں سے بڑے نہوں۔
اسی طرح اَ کو ۹۰° + اَ کے مساوی رکھنے سے ہم مسائل مذکورہ کو
ن قائموں سے کم مقدار کے زاویوں کے لئے بھی ثابت کرسکتے ہیں اور
ٰ ہذالقیاس، لہذا اسی قسم کے عمل سے مسائل کی عام صداقت کسی مقدار
ے زاویوں کی صورت میں ثابت ہوسکتی ہے۔

۹۸ - مسائل دفعات ۹۴ اور ۹۶ جن کی مدد سے دو زاویوں کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کی مثلثی نسبتیں خود ان زاویوں کی رقوم میں حاصل ہوتی ہیں ان زاویوں کے مسائل جمع و تفریق کہلاتے ہیں

۹۹ - **مثال ۱** - جب ۷۵° اور جم ۷۵° کی قیمتیں دریافت کرو۔

جب ۷۵° = جب (۴۵° + ۳۰°)

= جب ۴۵° جم ۳۰° + جم ۴۵° جب ۳۰°

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

اور جم ۷۵° = جم (۴۵° + ۳۰°)

= جم ۴۵° جم ۳۰° - جب ۴۵° جب ۳۰°

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

مثال ۲ - ثابت کرو کہ جب (ا + ب) جب (ا - ب) = جب^2 ا - جب^2 ب

اور جم (ا + ب) جم (ا - ب) = جم^2 ا - جب^2 ب

دفعات ۹۴ اور ۹۶ کی مدد سے۔

جب (ا + ب) جب (ا - ب)

= (جب ا جم ب + جم ا جب ب) (جب ا جم ب - جم ا جب ب)

= جب^2 ا جم^2 ب - جم^2 ا جب^2 ب

= جب^2 ا (۱ - جب^2 ب) - (۱ - جب^2 ا) جب^2 ب

= جب^2 ا - جب^2 ب

نیز انہی دفعات کی مدد سے

جم (ا + ب) جم (ا - ب)

= (جم ا جم ب - جب ا جب ب) (جم ا جم ب + جب ا جب ب)

= جم^2 ا جم^2 ب - جب^2 ا جب^2 ب

= جم^2 ا (۱ - جب^2 ب) - (۱ - جم^2 ا) جب^2 ب

= جم^2 ا - جب^2 ب

مثال ۳۔ جب (لا + ما) اور جم (لا + ما) کے ضابطوں کو صحیح مان کر اُن سے جلات جب (لا - ما) اور جم (لا - ما) کے ضابطوں کو مستنبط کرو۔

جب لا = جب {(لا - ما) + ما}

= جب (لا - ما) جم ما + جم (لا - ما) جب ما ..... (۱)

اور جم لا = جم {(لا - ما) + ما}

= جم (لا - ما) جم ما - جب (لا - ما) جب ما ..... (۲)

(۱) کو جم ما سے اور (۲) کو جب ما سے ضرب دو اور تفریق کرو

تب جب لا جم ما - جم لا جب ما = جب (لا - ما) {جم^2 ما + جب^2 ما}

= جب (لا - ما)

نیز (۱) کو جب ما سے اور (۲) کو جم ما سے ضرب دو اور جمع کرو تو حاصل ہوگا۔

جب لا جب ما + جم لا جم ما = جم (لا - ما) {جم^2 ما + جب^2 ما}

= جم (لا - ما)

لہٰذا دونوں ضابطے ثابت ہوئے

یہ دونوں ضابطے زاویوں کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہیں کیونکہ جن ضابطوں سے انکا استنباط ہوا ہے وہ سب زاویوں کے لئے بالعموم

صحیح ہیں۔

امثلہ نمبری ۱۳

۱۔ اگر جب عہ = $\frac{۳}{۵}$ اور جم بہ = $\frac{۹}{۴۱}$ تو جب (عہ - بہ) اور جم (عہ + بہ) کی قیمتیں دریافت کرو، نیز شکل اور صحیح پیمائش سے ان کی تصدیق کرو

۲۔ اگر جب عہ = $\frac{۴۵}{۵۳}$ اور جب بہ = $\frac{۳۳}{۶۵}$ تو جب (عہ - بہ) اور جب (عہ + بہ) کی قیمتیں دریافت کرو۔

۳۔ اگر جب عہ = $\frac{۱۵}{۱۷}$ اور جم بہ = $\frac{۱۲}{۱۳}$ تو جب (عہ + بہ)، جم (عہ - بہ) اور مس (عہ + بہ) کی قیمتیں دریافت کرو، نیز شکل اور صحیح پیمائش سے انکی تصدیق کرو۔

ثابت کرو کہ

۴۔ جم (۴۵° - ا) جم (۴۵° - ب) - جب (۴۵° - ا) جب (۴۵° - ب) = جب (ا + ب)

۵۔ جب (۴۵° + ا) جم (۴۵° - ب) + جم (۴۵° + ا) جب (۴۵° - ب) = جم (ا - ب)

۶۔ $\frac{\text{جب (ا - ب)}}{\text{جم ا جم ب}} + \frac{\text{جب (ب - ج)}}{\text{جم ب جم ج}} + \frac{\text{جب (ج - ا)}}{\text{جم ج جم ا}} = ۰$

۷۔ جب ۱۰۵° + جم ۱۰۵° = جم ۴۵°

۸۔ جب ۷۵° - جب ۱۵° = جم ۱۰۵° + جم ۱۵°

۹۔ جم عہ جم (جہ - عہ) - جب عہ جب (جہ - عہ) = جم جہ

۱۰۔ جم (عہ + بہ) جم جہ - جم (بہ + جہ) جم عہ = جب بہ جب (جہ - عہ)

۱۱- جب (ن+۱) ا جب (ن-۱) ا + جم (ن+۱) ا جم (ن-۱) ا = جم ۲ ا

۱۲- جب (ن+۱) ا جب (ن+۲) ا + جم (ن+۱) ا جم (ن+۲) ا = جم ا

۱۰۰- دفعات ۹۴ اور ۹۶ سے ا اور ب کی تمام قیمتوں کے لئے

جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب

جب (ا - ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب

اعمال جمع اور تفریق سے

جب (ا + ب) + جب (ا - ب) = ۲ جب ا جم ب ...... (۱)

جب (ا + ب) - جب (ا - ب) = ۲ جم ا جب ب ...... (۲)

دفعات مذکورہ بالا سے ا اور ب کی تمام قیمتوں کے لئے

جم (ا + ب) = جم ا جم ب - جب ا جب ب

اور جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب

اعمال جمع و تفریق سے

جم (ا + ب) + جم (ا - ب) = ۲ جم ا جم ب .... (۳)

جم (ا - ب) - جم (ا + ب) = ۲ جب ا جب ب .... (۴)

اب فرض کرو کہ ا + ب = ج اور ا - ب = د یعنی

$$ا = \frac{ج + د}{۲} \quad \text{اور} \quad ب = \frac{ج - د}{۲}$$

اوپر کے ضابطوں میں ا اور ب کی یہ قیمتیں مندرج کرنے سے ارتباطات (۱) تا (۴) صور ذیل میں تحویل ہوتے ہیں -

$$جب\,ج + جب\,د = ۲\,جب\,\frac{ج+د}{۲}\,جم\,\frac{ج-د}{۲} \quad ......(۱)$$

$$\text{جب ج} - \text{جب د} = ۲ \text{ جم} \frac{\text{ج} + \text{د}}{۲} \text{ جب} \frac{\text{ج} - \text{د}}{۲} \quad \text{......} (۲)$$

$$\text{جم ج} + \text{جم د} = ۲ \text{ جم} \frac{\text{ج} + \text{د}}{۲} \text{ جم} \frac{\text{ج} - \text{د}}{۲} \quad \text{......} (۳)$$

$$\text{جم ج} - \text{جم د} = ۲ \text{ جب} \frac{\text{ج} + \text{د}}{۲} \text{ جب} \frac{\text{د} - \text{ج}}{۲} \quad \text{......} (۴)$$

(طالب علم کو یاد رکھنا چاہیئے کہ (۴) کے بائیں طرف کا دوسرا جزو ضربی جب $\frac{\text{د} - \text{ج}}{۲}$ ہے نہ کہ جب $\frac{\text{ج} - \text{د}}{۲}$)

۱۰۱ـ ارتباطات (۱) سے (۴) تک نہایت مشہور اور کارآمد ہیں ان کو بڑی احتیاط سے حفظ یاد کر لینا چاہیئے۔ ان کے کثیر الاستعمال ہونے کی وجہ سے ہم ان کا ایک ہندسی ثبوت اُس صورت میں دینگے جب زاوے ج اور د دونوں حادّے ہوں۔

فرض کرو کہ ا و ج زاویہ ج سے اور ا و د زاویہ د سے تعبیر ہوتا ہے، زاویہ ج و د کی تنصیف خط وی سے کرو ایک نقطہ ع خط وی پر مقرر کرو اور وع پر عمود ق ع ر نکالو جو وج اور و د کو بالترتیب نقاط ق اور ر پر قطع کرے۔

وا پر عمود ع ل، ق م، ر ن نکالو اور نقطہ ر سے ع ل یا ق م پر عمود ر س ت کھینچو جو ان کو بالترتیب نقاط س اور ت پر قطع کرے۔

اب چونکہ زاویہ د و ج زاویہ ج ـ د کے برابر ہے اس لئے د وی اور ی و ج میں سے ہر ایک زاویہ $\frac{\text{ج} - \text{د}}{۲}$ کے برابر ہے

اور نیز

زاویہ ادی = زاویہ اود + زاویہ دوی = د + $\frac{ج - د}{۲}$ = $\frac{ج + د}{۲}$

چونکہ مثلث ع ود اور ع دق ہر طرح سے مساوی ہیں

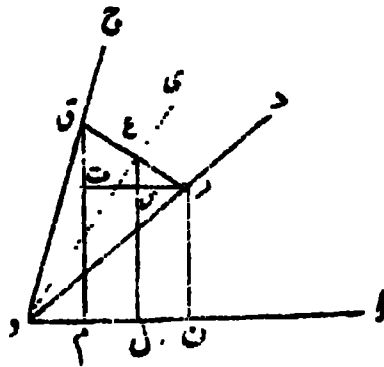
اس لئے وق = ور اور عر = ع ق یعنی رق = ۲ رع

اس لئے ق ت = ۲ ع س اور رت = ۲ رس یعنی م ن = ۲ م ل

اس لئے م ق + ن ر = ت ق + ۲ ل س = ۲ س ع + ۲ ل س = ۲ ل ع

نیز وم + ون = ۲ وم + م ن = ۲ وم + ۲ م ل = ۲ و ل

اس لئے جب ج + جب د = $\frac{م ق}{و ق}$ + $\frac{ن ر}{و ر}$ = $\frac{م ق + ن ر}{و ر}$

= $\frac{۲ ل ع}{و ر}$ = ۲ $\frac{ل ع}{و ع}$ × $\frac{و ع}{و ر}$ = ۲ جب ل وع جم ع ور

= ۲ جب $\frac{ج + د}{۲}$ جم $\frac{ج - د}{۲}$

نیز جب ج - جب د = $\frac{م ق}{و ق}$ - $\frac{ن ر}{و ر}$

$$= \frac{م ف - ن ر}{و ر} = \frac{ت ق}{و ر} = \frac{۲ س ع}{و ر}$$

$$= \frac{۲ س ع}{ر ع} \times \frac{ر ع}{و ر} = ۲ جم س ع ر جب ر و ع$$

$$= ۲ جم \frac{ج + د}{۲} جب \frac{ج - د}{۲}$$

[کیونکہ زاویہ س ع ر = ۹۰° - زاویہ س ع و = زاویہ ل و ع
$= \frac{ج + د}{۲}$]

نیز $جم ج + جم د = \frac{و م}{و ق} + \frac{و ن}{و ر} = \frac{و م + و ن}{و ر}$

$$= ۲ \frac{و ل}{و ر} = ۲ \frac{و ل}{و ع} \times \frac{و ع}{و ر}$$

$$= ۲ جم ل و ع جم ع و ر = ۲ جم \frac{ج + د}{۲} جم \frac{ج - د}{۲}$$

اور آخر میں $جم د - جم ج = \frac{و ن}{و ر} - \frac{و م}{و ق} = \frac{و ن - و م}{و ر}$

$$= \frac{م ن}{و ر} = ۲ \frac{س ر}{و ر} = \frac{۲ س ر}{ع ر} \times \frac{ع ر}{و ر}$$

$$= ۲ جب س ع ر \times جب ع و ر$$

$$= ۲ جب \frac{ج + د}{۲} جب \frac{ج - د}{۲}$$

۱۰۲۔ طالب علم کو خاص ہدایت کی جاتی ہے کہ دفعہ گزشتہ کے ضابطوں سے بخوبی واقف ہو جائے اور ان کے استعمال کی خوب مشق کر لے۔ ان کی کامل واقفیت اس کی آیندہ ترقی

کو نہایت آسان کردے گی۔

یہ ضابطے نہایت کارآمد ہیں کیونکہ ان کی وساطت سے مقادیر کے حاصل جمع اور حاصل تفریق بعض اور مقادیر کے حاصل ضربوں میں تحویل ہو سکتے ہیں اور اغلباً طالب علم کو جبر مقابلہ سے معلوم ہے کہ مقادیر کے حاصل ضرب لوکارتم کی مدد سے بآسانی مختصر صورت میں لائے جا سکتے ہیں

اب ہم ان قوانین کے استعمال کی چند مثالیں دیتے ہیں

مثال ۱۔ $\text{جب } ۶\text{طہ} + \text{جب } ۴\text{طہ} = ۲ \text{ جب } \frac{۶\text{طہ} + ۴\text{طہ}}{۲} \text{ جم } \frac{۶\text{طہ} - ۴\text{طہ}}{۲}$

$= ۲ \text{ جب } ۵\text{طہ جم طہ}$

مثال ۲۔ $\text{جم } ۳\text{طہ} - \text{جم } ۷\text{طہ} = ۲ \text{ جب } \frac{۳\text{طہ} + ۷\text{طہ}}{۲} \text{ جب } \frac{۷\text{طہ} - ۳\text{طہ}}{۲}$

$= ۲ \text{ جب } ۵\text{طہ جب } ۲\text{طہ}$

مثال ۳۔ $$\frac{\text{جب } ۷۵^\circ - \text{جب } ۱۵^\circ}{\text{جم } ۷۵^\circ + \text{جم } ۱۵^\circ} = \frac{۲ \text{ جم } \frac{۷۵^\circ + ۱۵^\circ}{۲} \text{ جب } \frac{۷۵^\circ - ۱۵^\circ}{۲}}{۲ \text{ جم } \frac{۷۵^\circ + ۱۵^\circ}{۲} \text{ جم } \frac{۷۵^\circ - ۱۵^\circ}{۲}}$$

$$= \frac{۲ \text{ جم } ۴۵^\circ \text{ جب } ۳۰^\circ}{۲ \text{ جم } ۴۵^\circ \text{ جم } ۳۰^\circ} = \text{مس } ۳۰^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \ldots\ldots ۵۷۷۳۵ء$$

[ان ضابطوں کے استعمال سے تسہیل عمل کی یہ ایک چھوٹی سی مثال ہے۔ اگر ہم جب ۷۵°، جب ۱۵°، جم ۷۵° اور جم ۱۵° کو لوکارثمی جدولوں سے نکالیں اور اس کے بعد ایک طویل کسر اعشاریہ کو دوسری پر تقسیم کریں تو ظاہر ہے کہ یہ نہایت پریشان کن اور طولانی عمل ہوگا]

مثال ۴- جملہ $\frac{(\text{جم طہ} - \text{جم ۳ طہ})(\text{جب ۸ طہ} + \text{جب ۲ طہ})}{(\text{جب ۵ طہ} - \text{جب طہ})(\text{جم ۴ طہ} - \text{جم ۶ طہ})}$ کو مختصر کرو۔

ضابطہ دفعہ ۱۰۰ کی مدد سے

$$\text{جملہ} = \frac{\text{۲ جب } \frac{\text{طہ} + \text{۳ طہ}}{\text{۲}} \text{ جب } \frac{\text{۳ طہ} - \text{طہ}}{\text{۲}} \times \text{۲ جب } \frac{\text{۸ طہ} + \text{۲ طہ}}{\text{۲}} \text{ جم } \frac{\text{۸ طہ} - \text{۲ طہ}}{\text{۲}}}{\text{۲ جم } \frac{\text{۵ طہ} + \text{طہ}}{\text{۲}} \text{ جب } \frac{\text{۵ طہ} - \text{طہ}}{\text{۲}} \times \text{۲ جب } \frac{\text{۴ طہ} + \text{۶ طہ}}{\text{۲}} \text{ جب } \frac{\text{۶ طہ} - \text{۴ طہ}}{\text{۲}}}$$

$$= \frac{\text{۴} \times \text{جب ۲ طہ جب طہ} \times \text{جب ۵ طہ جم ۳ طہ}}{\text{۴} \times \text{جم ۳ طہ جب ۲ طہ} \times \text{جب ۵ طہ جب طہ}} = \text{۱}$$

امثلہ نمبری ۱۴

ثابت کرو کہ

۱- $\frac{\text{جب ۷ طہ} - \text{جب ۵ طہ}}{\text{جم ۷ طہ} + \text{جم ۵ طہ}} = \text{مس طہ}$

۲- $\frac{\text{جم ۶ طہ} - \text{جم ۴ طہ}}{\text{جب ۶ طہ} + \text{جب ۴ طہ}} = -\text{مس طہ}$

۳- $\frac{\text{جب ا} + \text{جب ۳ ا}}{\text{جم ا} + \text{جم ۳ ا}} = \text{مس ۲ ا}$

۴- $\frac{\text{جب ۷ ا} - \text{جب ا}}{\text{جب ۸ ا} - \text{جب ۲ ا}} = \text{جم ۴ ا قطا ۵ ا}$

۵- $\frac{\text{جم ۲ ب} + \text{جم ۲ ا}}{\text{جم ۲ ب} - \text{جم ۲ ا}} = \text{مم (ا + ب) مم (ا - ب)}$

۶- $\frac{\text{جب ۲ ا} + \text{جب ۲ ب}}{\text{جب ۲ ا} - \text{جب ۲ ب}} = \frac{\text{مس (ا + ب)}}{\text{مس (ا - ب)}}$

۷- (جب ا + جب ۲ ا) / (جم ا − جم ۲ ا) = مم ا/۲

۸- (جب ۵ ا − جب ۳ ا) / (جم ۳ ا + جم ۵ ا) = مس ا

۹- (جم ۲ ب − جم ۲ ا) / (جب ۲ ب + جب ۲ ا) = مس (ا − ب)

۱۰- جم (ا + ب) + جب (ا − ب) = ۲ جب (۴۵° + ا) جم (۴۵° + ب)

۱۱- (جم ۳ ا − جم ا) / (جب ۳ ا − جب ا) + (جم ۲ ا − جم ۴ ا) / (جب ۴ ا − جب ۲ ا) = جب ا / (جم ۲ ا جم ۳ ا)

۱۲- (جب (۴ ا − ۲ ب) + جب (۴ ب − ۲ ا)) / (جم (۴ ا − ۲ ب) + جم (۴ ب − ۲ ا)) = مس (ا + ب)

۱۳- (مس ۵ ط + مس ۳ ط) / (مس ۵ ط − مس ۳ ط) = ۴ جم ۲ ط جم ۴ ط

۱۴- (جم ۳ ط + ۲ جم ۵ ط + جم ۷ ط) / (جم ط + ۲ جم ۳ ط + جم ۵ ط) = جم ۲ ط − جب ۲ ط مس ۳ ط

۱۵- (جب ا + جب ۳ ا + جب ۵ ا + جب ۷ ا) / (جم ا + جم ۳ ا + جم ۵ ا + جم ۷ ا) = مس ۴ ا

۱۶- (جب (ط + ف) − ۲ جب ط + جب (ط − ف)) / (جم (ط + ف) − ۲ جم ط + جم (ط − ف)) = مس ط

۱۷- (جب ا + ۲ جب ۳ ا + جب ۵ ا) / (جب ۳ ا + ۲ جب ۵ ا + جب ۷ ا) = جب ۳ ا / جب ۵ ا

۱۸- $\frac{\text{جب}(\text{ا}-\text{ج})+۲\,\text{جب}\,\text{ا}+\text{جب}(\text{ا}+\text{ج})}{\text{جب}(\text{ب}-\text{ج})+۲\,\text{جب}\,\text{ب}+\text{جب}(\text{ب}+\text{ج})}=\frac{\text{جب}\,\text{ا}}{\text{جب}\,\text{ب}}$

۱۹- $\frac{\text{جب}\,\text{ا}-\text{جب}\,۵\text{ا}+\text{جب}\,۹\text{ا}-\text{جب}\,۱۳\text{ا}}{\text{جم}\,\text{ا}-\text{جم}\,۵\text{ا}-\text{جم}\,۹\text{ا}+\text{جم}\,۱۳\text{ا}}=\text{مم}\,۴\text{ا}$

۲۰- $\frac{\text{جب}\,\text{ا}+\text{جب}\,\text{ب}}{\text{جب}\,\text{ا}-\text{جب}\,\text{ب}}=\text{مس}\,\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۲}\,\text{مم}\,\frac{\text{ا}-\text{ب}}{۲}$

۲۱- $\frac{\text{جم}\,\text{ا}+\text{جم}\,\text{ب}}{\text{جم}\,\text{ب}-\text{جم}\,\text{ا}}=\text{مم}\,\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۲}\,\text{مم}\,\frac{\text{ا}-\text{ب}}{۲}$

۲۲- $\frac{\text{جب}\,\text{ا}+\text{جب}\,\text{ب}}{\text{جم}\,\text{ا}+\text{جم}\,\text{ب}}=\text{مس}\,\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۲}$

۲۳- $\frac{\text{جب}\,\text{ا}-\text{جب}\,\text{ب}}{\text{جم}\,\text{ب}-\text{جم}\,\text{ا}}=\text{مم}\,\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۲}$

۲۴- $\frac{\text{جم}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})+\text{جم}(-\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})+\text{جم}(\text{ا}-\text{ب}+\text{ج})+\text{جم}(\text{ا}+\text{ب}-\text{ج})}{\text{جب}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})+\text{جب}(-\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})-\text{جب}(\text{ا}-\text{ب}+\text{ج})+\text{جب}(\text{ا}+\text{ب}-\text{ج})}=\text{مم}\,\text{ب}$

۲۵- $\text{جم}\,۳\text{ا}+\text{جم}\,۵\text{ا}+\text{جم}\,۷\text{ا}+\text{جم}\,۱۵\text{ا}=۴\,\text{جم}\,۴\text{ا}\,\text{جم}\,۵\text{ا}\,\text{جم}\,۶\text{ا}$

۲۶- $\text{جم}(-\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})+\text{جم}(\text{ا}-\text{ب}+\text{ج})+\text{جم}(\text{ا}+\text{ب}-\text{ج})+\text{جم}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})$

$=۴\,\text{جم}\,\text{ا}\,\text{جم}\,\text{ب}\,\text{جم}\,\text{ج}$

۲۷- $\text{جب}\,۵۰^\circ-\text{جب}\,۷۰^\circ+\text{جب}\,۱۰^\circ=۰$

۲۸- $\text{جب}\,۱۰^\circ+\text{جب}\,۲۰^\circ+\text{جب}\,۴۰^\circ+\text{جب}\,۵۰^\circ=\text{جب}\,۷۰^\circ+\text{جب}\,۸۰^\circ$

۲۹- $\text{جب}\,\text{ھ}+\text{جب}\,۲\text{ھ}+\text{جب}\,۴\text{ھ}+\text{جب}\,۵\text{ھ}=۴\,\text{جم}\,\frac{\text{ھ}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{۳\text{ھ}}{۲}\,\text{جب}\,۳\text{ھ}$

مختصر کرو

۳۰۔ جم {طہ + (ن − ۳/۲) فہ} − جم {طہ + (ن + ۳/۲) فہ} کو

۳۱۔ جب {طہ + (ن − ۱/۲) فہ} + جب {طہ + (ن + ۱/۲) فہ} کو

۱۰۳۔ دفعہ ۱۰۰ کے ضوابط (۱)، (۲)، (۳)، (۴) نہایت کارآمد ہیں ان کو شکل ذیل میں یاد رکھنا چاہیئے۔

۲ جب ا جم ب = جب (ا + ب) + جب (ا − ب) ... (۱)

۲ جم ا جب ب = جب (ا + ب) − جب (ا − ب) ... (۲)

۲ جم ا جم ب = جم (ا + ب) + جم (ا − ب) .... (۳)

۲ جب ا جب ب = جم (ا − ب) − جم (ا + ب) ...... (۴)

ان کو ہم (دفعہ ۱۰۰) کے ضابطوں (۱)، (۲)، (۳)، (۴) کا عکس خیال کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ ۲ جب ۳ طہ جم طہ = جب ۴ طہ + جب ۲ طہ

مثال ۲۔ ۲ جب ۵ طہ جب ۳ طہ = جم ۲ طہ − جم ۸ طہ

مثال ۳۔ ۲ جم ۱۱ طہ جم ۲ طہ = جم ۱۳ طہ + جم ۹ طہ

مثال ۴۔ (جب ۸ طہ جم طہ − جب ۶ طہ جم ۳ طہ) ÷ (جم ۲ طہ جم طہ − جب ۳ طہ جب ۴ طہ) کو مختصر کرو

مندرجہ بالا ضابطوں کی مدد سے

جملہ مجوزہ = (½ [جب ۹ طہ + جب ۷ طہ] - ½ [جب ۹ طہ + جب ۳ طہ]) ÷ (½ [جم ۳ طہ + جم طہ] - ½ [جم طہ - جم ۷ طہ])

= (جب ۷ طہ - جب ۳ طہ) ÷ (جم ۳ طہ + جم ۷ طہ)

= (۲ جم ۵ طہ جب ۲ طہ) ÷ (۲ جم ۵ طہ جم ۲ طہ) ضوابط دفعہ ۱۰۰ کی مدد سے

= مس ۲ طہ

[اس مثال میں سب سے پہلے ہم نے اس دفعہ کے ضابطوں کو استعمال کیا، اس کے بعد مزید اختصار کی خاطر ان کی عکس صورتوں (دفعہ ۱۰۰) سے مدد لی۔ طالب علم کو یہ ترکیب یاد رکھنی چاہئے جملوں کے اختصار میں یہ اکثر کام آتی ہے]

امثلہ نمبری ۱۵

مفصلہ ذیل کو حاصل جمع یا حاصل تفریق کی صورت میں بیان کرو

۱۔ ۲ جب ۵ طہ جب ۷ طہ ۲۔ ۲ جم ۷ طہ جب ۵ طہ

۳۔ ۲ جم ۱۱ طہ جم ۳ طہ ۴۔ ۲ جب ۵۴° جب ۶۶°

ثابت کرو کہ

۵۔ جب (طہ/۲) جب (۷طہ/۲) + جب (۳طہ/۲) جب (۱۱طہ/۲) = جب ۲ طہ جب ۵ طہ

۶۔ جم ۲ طہ جم (طہ/۲) - جم ۳ طہ جم (۹طہ/۲) = جب ۵ طہ جب (۵طہ/۲)

۷۔ جب ا جب (ا + ۲ ب) - جب ب جب (ب + ۲ ا) = جب (ا - ب) جب (ا + ب)

(جب ۳ا + جب ا) جب ا + (جم ۳ا − جم ا) جم ا = ۰

$$\frac{\text{۲ جب (ا − ج) جم ج − جب (ا − ۲ ج)}}{\text{۲ جب (ب − ج) جم ج − جب (ب − ۲ ج)}} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}$$

$$\frac{\text{جب ا جب ۲ا + جب ۳ا جب ۶ا + جب ۴ا جب ۱۳ا}}{\text{جب ا جم ۲ا + جب ۳ا جم ۶ا + جب ۴ا جم ۱۳ا}} = \text{مس ۹ا}$$

$$\frac{\text{جم ۲ا جم ۳ا − جم ۲ا جم ۷ا + جم ا جم ۱۰ا}}{\text{جب ۴ا جب ۳ا − جب ۲ا جب ۵ا + جب ۴ا جب ۷ا}} = \text{مم ۶ا مم ۵ا}$$

جم (۳۶° − ا) جم (۳۶° + ا) + جم (۵۴° + ا) جم (۵۴° − ا) = جم ۲ا

جم ا جب (ب − ج) + جم ب جب (ج − ا) + جم ج جب (ا − ب) = ۰

جب (۴۵° + ا) جب (۴۵° − ا) = ½ جم ۲ ا

سمہ (ا + ب) سمہ (ا − ب) = (جم ا − جم ب)^۲

جب (ب − ج) جم (ع − ل) + جب (ج − ع) جم (ب − ل)

+ جب (ع − ب) جم (ج − ل) = ۰

$$\text{۲ جم }\frac{\pi}{۱۳}\text{ جم }\frac{۹\pi}{۱۳} + \text{ جم }\frac{۳\pi}{۱۳} + \text{ جم }\frac{۵\pi}{۱۳} = ۰$$

۱۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مس (ا + ب)} = \frac{\text{مس ا + مس ب}}{\text{۱ − مس ا مس ب}}$$

$$\text{مس (ا − ب)} = \frac{\text{مس ا − مس ب}}{\text{۱ + مس ا مس ب}}$$

دفعہ ۹۴ ا اور ب کی تمام قیمتوں کے لئے

$$\text{مس (ا + ب)} = \frac{\text{جب (ا + ب)}}{\text{جم (ا + ب)}} = \frac{\text{جب ا جم ب + جم ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب − جب ا جب ب}}$$

شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو جم ا جم ب پر تقسیم کرنے سے

$$= \frac{\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}}{1 - \frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} \times \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}}$$

$$\therefore \text{مس}(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{1 - \text{مس ا مس ب}}$$

نیز بموجب دفعہ ۹۶

$$\text{مس}(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{جب}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جم}(\text{ا}-\text{ب})}$$

$$= \frac{\text{جب ا جم ب} - \text{جم ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب} + \text{جب ا جب ب}}$$

$$= \frac{\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} - \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}}{1 + \frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} \times \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}}$$

[شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو جم ا جم ب پر تقسیم کرنے سے]

$$\therefore \text{مس}(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{مس ا} - \text{مس ب}}{1 + \text{مس ا مس ب}}$$

۱۰۵ — دفعہ گزشتہ کے ضابطوں کا ہندسی ثبوت اشکال دفعہ ۹۴ اور ۹۶ سے حاصل ہو سکتا ہے۔

(۱) شکل دفعہ ۹۴ میں

$$\text{مس}(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{مع}}{\text{وم}} = \frac{\text{قن} + \text{رع}}{\text{وق} - \text{رن}}$$

$$= \frac{\frac{\text{قن}}{\text{وق}} + \frac{\text{رع}}{\text{وق}}}{1 - \frac{\text{رن}}{\text{وق}}} = \frac{\text{مس ا} + \frac{\text{رع}}{\text{وق}}}{1 - \frac{\text{رن}}{\text{رع}} \times \frac{\text{رع}}{\text{وق}}}$$

اب چونکہ زاویے رع ن اور ق و ن برابر ہیں اس لئے مثلث رع ن اور ق و ن متشابہ ہیں

پس $\frac{\text{رع}}{\text{ع ن}} = \frac{\text{وق}}{\text{ون}}$

اور اسلئے $\text{مس ب} = \frac{\text{ع ن}}{\text{ون}} = \frac{\text{رع}}{\text{وق}}$

اس لئے $\text{مس}(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{1 - \text{مس رع ن مس ب}}$

$$= \frac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{1 - \text{مس ا مس ب}}$$

(۲) شکل دفعہ ۹۶ میں

$$\text{مس}(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{مع}}{\text{وم}} = \frac{\text{قن} - \text{عر}}{\text{وق} + \text{نر}}$$

$$= \frac{\frac{\text{قن}}{\text{وق}} - \frac{\text{عر}}{\text{وق}}}{1 + \frac{\text{نر}}{\text{وق}}} = \frac{\text{مس ا} - \frac{\text{عر}}{\text{وق}}}{1 + \frac{\text{نر}}{\text{عر}} \times \frac{\text{عر}}{\text{وق}}}$$

اب چونکہ زاویے ی ع ن اور ن و ق مساوی ہیں

اس لئے $\frac{ی ع}{ع ن} = \frac{و ق}{و ن}$

اور اس لئے $\frac{ع د}{و ق} = \frac{ع ن}{و ن} = $ مس ب

اس لئے مس (ا - ب) $= \frac{\text{مس ا - مس ب}}{\text{ا + مس ی ع ن مس ب}}$

$= \frac{\text{مس ا - مس ب}}{\text{ا + مس ا مس ب}}$

۱۰۶۔ مندرجہ بالا ضابطوں کی چند خاص صورتیں اس طرح حاصل ہوسکتی ہیں۔

فرض کرو کہ ب = ۴۵° تب

مس (ا + ۴۵°) $= \frac{\text{مس ا + ۱}}{\text{ا - مس ا}} = \frac{\text{ا + مس ا}}{\text{ا - مس ا}}$

اور مس (ا - ۴۵°) $= \frac{\text{مس ا - ا}}{\text{ا + مس ا}}$

اسی طرح موافق دفعہ ۱۰۴ عمل کرنے سے ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ

مم (ا + ب) $= \frac{\text{مم ا مم ب - ا}}{\text{مم ا + مم ب}}$

اور مم (ا - ب) $= \frac{\text{مم ا مم ب + ا}}{\text{مم ب - مم ا}}$

۱۰۷۔ مثال ا۔ مس ۷۵° = مس (۴۵° + ۳۰°)

$$= \frac{\text{مس } ۴۵^\circ + \text{مس } ۳۰^\circ}{۱ - \text{مس } ۴۵^\circ \text{ مس } ۳۰^\circ}$$

$$= \frac{۱ + \frac{۱}{\sqrt{۳}}}{۱ - \frac{۱}{\sqrt{۳}}} = \frac{\sqrt{۳} + ۱}{\sqrt{۳} - ۱}$$

$$= \frac{(\sqrt{۳} + ۱)^۲}{۳ - ۱} = \frac{۴ + ۲\sqrt{۳}}{۲}$$

$$= ۲ + \sqrt{۳} = ۲ + ۱٫۷۳۲۰۵ \ldots = ۳٫۷۳۲۰۵ \ldots$$

مثال ۲- $\text{مس } ۱۵^\circ = \text{مس } (۴۵^\circ - ۳۰^\circ)$

$$= \frac{\text{مس } ۴۵^\circ - \text{مس } ۳۰^\circ}{۱ + \text{مس } ۴۵^\circ \text{ مس } ۳۰^\circ}$$

$$= \frac{۱ - \frac{۱}{\sqrt{۳}}}{۱ + \frac{۱}{\sqrt{۳}}} = \frac{\sqrt{۳} - ۱}{\sqrt{۳} + ۱} = \frac{(\sqrt{۳} - ۱)^۲}{۳ - ۱}$$

$$= \frac{۴ - ۲\sqrt{۳}}{۲} = ۲ - \sqrt{۳} = ۲ - ۱٫۷۳۲۰۵ \ldots$$

$$= ۰٫۲۶۷۹۵ \ldots$$

امثلہ نمبری ۱۶

۱- اگر $\text{مس ا} = \frac{۱}{۲}$ اور $\text{مس ب} = \frac{۱}{۳}$ تو مس (۲ا + ب) اور مس (۲ا - ب) کی قیمتیں دریافت کرو

نیز ترسیمی عمل اور صحیح پیمائش سے اس کی تصدیق کرو

۲- اگر مس ا = $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+4}$ اور مس ب = $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-4}$ تو ثابت کرو کہ

مس (ا - ب) = ۰ء۳۷۵

۳- اگر مس ا = $\frac{ن}{ن+1}$ اور مس ب = $\frac{1}{2ن+1}$ تو مس(ا+ب) دریافت کرو

۴- اگر مس عہ = $\frac{5}{6}$ اور مس بہ = $\frac{1}{11}$ تو ثابت کرو کہ عہ + بہ = $\frac{\pi}{4}$ عمل ترسیمی اور صحیح پیمائش سے اس کی تصدیق کرو۔

ثابت کرو کہ

۵- مس ($\frac{\pi}{4}$ + طہ) × مس ($\frac{3\pi}{4}$ + طہ) = -۱

۶- مم ($\frac{\pi}{4}$ + طہ) مم ($\frac{\pi}{4}$ - طہ) = ۱

۷- ۱ + مس ا مس $\frac{ا}{2}$ = مس ا مم $\frac{ا}{2}$ - ۱ = قط ا

۱۰۸- اس باب کے ضابطوں کو استعمال کرنے سے اس قسم کی مثالیں بھی حل ہوسکتی ہیں کہ ہم اُن سب زاویوں کے لئے ایک جملہ عامہ دریافت کریں جن کی جیب یا جیب التمام یا مماس معلوم ہو دفعات ۸۸ تا ۹۰ میں اس کے متعلق بحث ہو چکی ہے۔

اُن سب زاویوں کے لئے جو ایک ہی جیب معلوم رکھتے ہوں ایک قیمت عامہ دریافت کرو

فرض کرو کہ عہ کوئی زاویہ ہے جو جیب معلوم رکھتا ہے اور طہ ایک اور زاویہ ہے جس کی جیب وہی ہے جو عہ کی ہے

پس ہمیں طہ کی ایک ایسی عام سے عام قیمت معلوم کرنی ہے جو شرائط مساوات جب طہ = جب عہ یعنی جب طہ - جب عہ = ۰ کو پورا کرے، یہ مساوات اس طرح بھی لکھی جا سکتی ہے۔

$$۲ \text{ جم } \frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{۲} = ۰$$

اور اس لیئے اس کی شرائط معادلات ذیل سے پوری ہونگی

$$\text{جم } \frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{۲} = ۰ \quad \text{اور جب } \frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{۲} = ۰$$

اس لیئے لازماً $\frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{۲} = \frac{\pi}{۲}$ کے کسی طاق ضعف کے

اور $\frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{۲} = \pi$ کے کسی ضعف کے

یعنی طہ = - عہ + π کا کوئی طاق ضعف

اور طہ = عہ + π کا کوئی جفت ضعف

یعنی لازماً طہ = $(-۱)^{\text{ن}}$ عہ + ن π جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

کیونکہ جب ن طاق ہو تو جملہ عامہ سے جملہ (۱) حاصل ہوتا ہے اور جب ن جفت ہو تو جملہ (۲) حاصل ہوتا ہے

۱۰۹۔ اُن سب زاویوں کے لیئے جن کی ایک ہی جیب التمام ہو ایک قیمت عامہ دریافت کرو۔

اس صورت میں مساوات

جم طہ = جم عہ

یعنی　جم طہ - جم عہ = ۰

یعنی　۲ جب $\frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{۲}$ جب $\frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{۲}$ = ۰ کو حل کرنا مطلوب ہے

شرائط مساوات مذکورہ

جب $\frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{۲}$ = ۰ سے اور جب $\frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{۲}$ = ۰ سے پوری ہوتی ہیں

اس سے ظاہر ہے کہ $\frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{۲}$ = π کے کسی ضعف کے

اور　$\frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{۲}$ = π کے کسی ضعف کے

یعنی　طہ = - عہ + ۲ π کا کوئی ضعف

اور　طہ = عہ + ۲ π کا کوئی ضعف

دونوں نظام ان قیمتوں کے جملہ طہ = ۲ ن π ± عہ میں شامل ہیں جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے

۱۱۰ - ان سب زاویوں کے لئے جو ایک ہی مماس معلوم رکھتے ہوں ایک جملہ عامہ دریافت کرو۔

اس صورت میں مساوات

مس طہ - مس عہ = ۰

یعنی　جب طہ جم عہ - جم طہ جب عہ = ۰

یعنی　جب (طہ - عہ) = ۰

کو حل کرنا مطلوب ہے۔

∴　طہ - عہ = π کے کسی ضعف کے

= ن π جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد

۱ سلئے مساوات کا عام سے عام حل ط = ن π + ع ہے

امثلہ نمبری ۱۶ (۱)

۱۔ دو حادّے زاوئے بناؤ جن کے مماس $\frac{۱}{۲}$ اور $\frac{۱}{۳}$ ہوں اور پیمائش سے تصدیق کرو کہ ان کا مجموعہ ۴۵° ہے

۲۔ دو حادّے زاویوں کے مماس بالترتیب ۳ اور ۲ ہیں، عمل ترسیمی سے ثابت کرو کہ ان کے تفاوت کا مماس $\frac{۱}{۷}$ ہے

۳۔ ایک حادّے زاوئے کی جیب ۶ء ہے اور ایک اور زاوئے کی جیب التمام ۵ء ہے، عمل ترسیمی سے، نیز حساب لگانے سے ثابت کرو کہ ان کے حاصل تفریق کی جیب قریب قریب ۳۹ء ہے

۴۔ ایک ایسا زاویہ بناؤ جس کی جیب التمام ۴ء ہو اور حساب اور پیمائش دونوں سے ثابت کرو کہ ایک ایسے زاوئے کی جیب اور جیب التمام جو زاویہ مذکورہ سے بقدر ۴۵° کے زیادہ ہو تقریباً ۹۳ء اور -۳۶۵ء ہیں

۵۔ ایک زاویہ حادّہ بناؤ جس کا مماس ۷ ہو اور ایک اور زاویہ حادہ بناؤ جس کی جیب ۷ء ہو، حساب اور پیمائش دونوں سے ثابت کرو کہ ان کے تفاوت کی جیب قریب قریب ۶۱ء ہے۔

باب ہشتم

اضعافی اور کسری زاویوں کی مثلثی نسبتیں

۱۱۱ — زاویہ ۲ا کی مثلثی نسبتوں کو زاویہ ا کی نسبتوں کی رقوم میں دریافت کرو۔

اگر دفعہ ۹۴ کے ضابطوں میں ہم فرض کریں کہ ب = ا تو حاصل ہوگا

جب ۲ ا = جب ا جم ا + جم ا جب ا = ۲ جب ا جم ا

جم ۲ ا = جم ا جم ا − جب ا جب ا = جم^{2} ا − جب^{2} ا

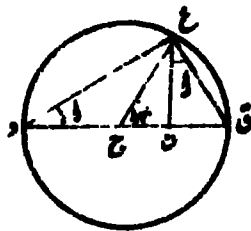
= (۱ − جب^{2} ا) − جب^{2} ا = ۱ − ۲ جب^{2} ا

اور نیز = جم^{2} ا − (۱ − جم^{2} ا) = ۲ جم^{2} ا − ۱

اور مس ۲ ا = (مس ا + مس ا) ÷ (۱ − مس ا مس ا) = ۲ مس ا ÷ (۱ − مس^{2} ا)

اب دفعہ ۹۴ کے ضابطے ا اور ب کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ہیں اس لئے جو صورتیں اُن سے مستنبط ہوتی ہیں وہ بھی زاویوں کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہیں اور بالخصوص مندرجہ بالا ضابطے ا کی تمام قیمتوں کے لئے

درست ہیں۔

۱۱۲۔ جب زاویہ ا قائمہ سے کم ہو تو دفعہ گزشتہ کے ضابطوں کا ہندسی ثبوت اس طرح بلا واسطہ حاصل ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ق ج ع زاویہ ۲ ا کے برابر ہے، مرکز ج اور نصف قطر ج ع پر ایک دائرہ بناؤ اور فرض کرو کہ ق ج ممدودہ دائرہ مذکورہ کو نقطہ و پر ملتا ہے، و ع اور ع ق کو ملاؤ اور و ق پر عمود ع ن نکالو۔

بحکم اقلیدس م ۳ ش ۲۰

زاویہ ق و ع = $\frac{1}{2}$ $\angle$ ق ج ع = ا

اور زاویہ ن ع ق = $\angle$ ق و ع = ا

اس لئے جب ۲ ا = $\frac{\text{ن ع}}{\text{ج ع}}$ = $\frac{\text{۲ ن ع}}{\text{۲ ج ق}}$ = ۲ $\frac{\text{ن ع}}{\text{و ق}}$

= ۲ $\frac{\text{ن ع}}{\text{و ع}}$ × $\frac{\text{و ع}}{\text{و ق}}$

= ۲ جب ن و ع جم ع و ق چونکہ و ع ق زاویہ قائمہ ہے

$$= \text{۲ جب ا جم ا}$$

$$\text{نیز}\quad \text{جم ۲ا} = \frac{\text{ج ن}}{\text{ج ع}} = \frac{\text{۲ ج ن}}{\text{۲ ج ع}}$$

$$= \frac{\text{۲ ج ن}}{\text{و ق}} = \frac{(\text{و ج} + \text{ج ن}) - (\text{و ج} - \text{ج ن})}{\text{و ق}}$$

$$= \frac{\text{و ن} - \text{ن ق}}{\text{و ق}} = \frac{\text{و ن}}{\text{و ع}} \times \frac{\text{و ع}}{\text{و ق}} - \frac{\text{ن ق}}{\text{ع ق}} \times \frac{\text{ع ق}}{\text{و ق}}$$

$$= \text{جم}^2\text{ا} - \text{جب}^2\text{ا}$$

$$\text{اور}\quad \text{مس ۲ا} = \frac{\text{ن ع}}{\text{ج ن}} = \frac{\text{۲ ن ع}}{\text{و ن} - \text{ن ق}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{۲ ن ع}}{\text{و ن}}}{\text{۱} - \dfrac{\text{ن ق}}{\text{ع ن}} \times \dfrac{\text{ع ن}}{\text{و ن}}}$$

$$= \frac{\text{۲ مس ا}}{\text{۱} - \text{مس}^2\text{ا}}$$

مثال - جب °۱۵ اور جم °۱۵ کی قیمتیں دریافت کرو

فرض کرو کہ زاویہ ۲ا برابر °۳۰ کے ہے یعنی ا = °۱۵

نیز فرض کرو کہ نصف قطر دائرہ ج ع برابر ۲ر کے ہے اسلئے حاصل ہوگا

$$\text{ج ن} = \text{۲ر جم °۳۰} = \text{ر}\sqrt{\text{۳}}$$

$$\text{اور}\quad \text{ن ع} = \text{۲ر جب °۳۰} = \text{ر}$$

اس لئے   ون = وج + ج ن = ر (۲ + √۳)

اور   ن ق = ج ق − ج ن = ر (۲ − √۳)

∴   وع² = ون × وق = ر (۲ + √۳) × ۴ ر (اقلیدس م ۶ ش ۸)

یعنی   وع = ر √۲ (√۳ + ۱)

اور   عق² = ق ن × ق و = ر (۲ − √۳) × ۴ ر

یعنی   ع ق = ر √۲ (√۳ − ۱)

اس لئے   جب ۱۵° = عق / وق = √۲ (√۳ − ۱) / ۴ = (√۳ − ۱) / ۲√۲

اور   جم ۱۵° = وع / وق = √۲ (√۳ + ۱) / ۴ = (√۳ + ۱) / ۲√۲

۱۱۳ — زاویہ ۳ا کی مثلثی نسبتوں کو زاویہ ا کی نسبتوں کی رقوم میں دریافت کرو۔

دفعہ ۹۴ میں ب کیجگہ ۲ا رکھنے سے حاصل ہوگا

جب ۳ا = جب (ا + ۲ا) = جب ا جم ۲ا + جم ا جب ۲ا

= جب ا (۱ − ۲ جب² ا) + جم ا × ۲ جب ا جم ا [بموجب دفعہ ۱۱۱]

= جب ا (۱ − ۲ جب² ا) + ۲ جب ا (۱ − جب² ا)

اس لئے جب ۳ا = ۳ جب ا − ۴ جب³ ا ......(۱)

اسی طرح سے جم ۳ا = جم (ا + ۲ا) = جم ا جم ۲ا − جب ا جب ۲ا

= جم ا (۲ جم² ا − ۱) − جب ا × ۲ جب ا جم ا

= جم ا (۲ جم² ا − ۱) − ۲ جم ا (۱ − جم² ا)

اس لئے $\text{جم}\,3\text{ا} = 4\,\text{جم}^3\text{ا} - 3\,\text{جم}\,\text{ا}$ .... (۲)

نیز $\text{مس}\,3\text{ا} = \text{مس}(\text{ا} + 2\text{ا}) = \dfrac{\text{مس}\,\text{ا} + \text{مس}\,2\text{ا}}{1 - \text{مس}\,\text{ا}\,\text{مس}\,2\text{ا}}$

$$= \dfrac{\text{مس}\,\text{ا} + \dfrac{2\,\text{مس}\,\text{ا}}{1 - \text{مس}^2\text{ا}}}{1 - \text{مس}\,\text{ا} \times \dfrac{2\,\text{مس}\,\text{ا}}{1 - \text{مس}^2\text{ا}}}$$

$$= \dfrac{\text{مس}\,\text{ا}(1 - \text{مس}^2\text{ا}) + 2\,\text{مس}\,\text{ا}}{(1 - \text{مس}^2\text{ا}) - 2\,\text{مس}^2\text{ا}}$$

اس لئے $\text{مس}\,3\text{ا} = \dfrac{3\,\text{مس}\,\text{ا} - \text{مس}^3\text{ا}}{1 - 3\,\text{مس}^2\text{ا}}$

[طالب علم کو شاید مندرجہ بالا ضابطوں (۱) اور (۲) کو یاد رکھنے میں وقت ہو، ان صورتوں میں کچھ مشابہت ہے مگر ترتیب علامات میں اختلاف اگر کسی قسم کا شک ہو تو طالب علم کو ان ضابطوں کی خاص صورتوں کے تصدیق کر لینی چاہیئے، مثلاً صورت (۱) میں فرض کرو کہ $\text{ا} = 90^\circ$ اور (۲) میں $\text{ا} = 0^\circ$]

۱۱۴ — دفعہ گزشتہ کے موافق عمل کرنے سے طہ کے کسی اعلیٰ ضعف کی مثلثی نسبتیں طہ کی نسبتوں کی رقوم میں بیان ہو سکتی ہیں مگر یہ طریقہ طولانی اور پریشان کن ہوگا آگے چل کر آیندہ باب میں اس سے اچھی ترکیبیں دیجائیں گی۔

تمثیلاً فرض کرو کہ جم ۵ طہ کو جم طہ کی رقوم میں بیان کرنا مطلوب ہے۔

جم ۵ طہ = جم (۳ طہ + ۲ طہ)

= جم ۳ طہ جم ۲ طہ − جب ۳ طہ جب ۲ طہ

= (۴ جم^{3} طہ − ۳ جم طہ) (۲ جم^{2} طہ − ۱)

− (۳ جب طہ − ۴ جب^{3} طہ) × ۲ جب طہ جم طہ

= (۸ جم^{5} طہ − ۱۰ جم^{3} طہ + ۳ جم طہ)

− ۲ جم طہ × جب^{2} طہ (۳ − ۴ جب^{2} طہ)

= (۸ جم^{5} طہ − ۱۰ جم^{3} طہ + ۳ جم طہ)

− ۲ جم طہ (۱ − جم^{2} طہ) (۴ جم^{2} طہ − ۱)

= (۸ جم^{5} طہ − ۱۰ جم^{3} طہ + ۳ جم طہ)

− ۲ جم طہ (۵ جم^{2} طہ − ۴ جم^{4} طہ − ۱)

= ۱۶ جم^{5} طہ − ۲۰ جم^{3} طہ + ۵ جم طہ

امثلہ نمبری ۱۷

۱۔ جب ۲ عہ کی قیمت دریافت کرو جبکہ

(۱) جم عہ = $\frac{۳}{۵}$ (۲) جب عہ = $\frac{۱۲}{۱۳}$ اور (۳) مس عہ = $\frac{۱۶}{۶۳}$

۲۔ جم ۲ عہ کی قیمت دریافت کرو جبکہ

(۱) جم عہ = $\frac{۱۵}{۱۷}$ (۲) جب عہ = $\frac{۴}{۵}$ اور (۳) مس عہ = $\frac{۵}{۱۲}$،

ہرایک صورت میں ترسیم اور صحیح پیمائش سے تصدیق کرو

۳۔ اگر مس طہ = $\frac{ب}{ا}$ تو ا جم ۲ طہ + ب جب ۲ طہ کی قیمت دریافت کرو

ثابت کرو کہ

۴- $\frac{\text{جب ۲ا}}{\text{۱ + جم ۲ا}} = \text{مس ا}$

۵- $\frac{\text{جب ۲ا}}{\text{۱ - جم ۲ا}} = \text{مم ا}$

۶- $\frac{\text{۱ - جم ۲ا}}{\text{۱ + جم ۲ا}} = \text{مس}^2\text{ا}$

۷- $\text{مس ا + مم ا = ۲ قم ۲ا}$

۸- $\text{مس ا - مم ا = -۲ مم ۲ا}$

۹- $\text{قم ۲ا + مم ۲ا = مم ا}$

۱۰- $\frac{\text{۱ - جم ا + جم ب - جم (ا + ب)}}{\text{۱ + جم ا - جم ب - جم (ا + ب)}} = \text{مس}\frac{\text{ا}}{\text{۲}}\text{ مم}\frac{\text{ب}}{\text{۲}}$

۱۱- $\frac{\text{جم ا}}{\text{۱} \mp \text{جب ا}} = \text{مس}\left(\text{۴۵}^\circ \pm \frac{\text{ا}}{\text{۲}}\right)$

۱۲- $\frac{\text{قط ۸ا - ۱}}{\text{قط ۴ا - ۱}} = \frac{\text{مس ۸ا}}{\text{مس ۲ا}}$

۱۳- $\frac{\text{۱ + مس}^2(\text{۴۵}^\circ\text{ - ا})}{\text{۱ - مس}^2(\text{۴۵}^\circ\text{ - ا})} = \text{قم ۲ا}$

۱۴- $\frac{\text{جب عہ + جب بہ}}{\text{جب عہ - جب بہ}} = \frac{\text{مس}\frac{\text{عہ + بہ}}{\text{۲}}}{\text{مس}\frac{\text{عہ - بہ}}{\text{۲}}}$

۱۵- $\frac{\text{جب}^2\text{ا - جب}^2\text{ب}}{\text{جب ا جم ا - جب ب جم ب}} = \text{مس (ا + ب)}$

۱۶- $\text{مس}\left(\frac{\pi}{\text{۴}}\text{ + طہ}\right)\text{ - مس}\left(\frac{\pi}{\text{۴}}\text{ - طہ}\right) = \text{۲ مس ۲طہ}$

۱۷- $\frac{\text{جم ا + جب ا}}{\text{جم ا - جب ا}} - \frac{\text{جم ا - جب ا}}{\text{جم ا + جب ا}} = \text{۲ مس ۲ا}$

۱۸- $\text{مم (ا + ۱۵}^\circ\text{) - مس (ا - ۱۵}^\circ\text{)} = \frac{\text{۴ جم ۲ا}}{\text{۱ + ۲ جب ۲ا}}$

۱۹- $\frac{\text{جب ط + جب ۲ط}}{\text{۱ + جم ط + جم ۲ط}}$ = مس ط　　۲۰- $\frac{\text{۱ + جب ط − جم ط}}{\text{۱ + جب ط + جم ط}}$ = مس $\frac{\text{ط}}{\text{۲}}$

۲۱- $\frac{\text{جب (ن + ۱) ا − جب (ن − ۱) ا}}{\text{جم (ن + ۱) ا + ۲ جم ن ا + جم (ن − ۱) ا}}$ = مس $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$

۲۲- $\frac{\text{جب (ن + ۱) ا + ۲ جب ن ا + جب (ن − ۱) ا}}{\text{جم (ن − ۱) ا − جم (ن + ۱) ا}}$ = مم $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$

۲۳- جب (۲ن + ۱) ا جب ا = جب^{2} (ن + ۱) ا − جب^{2} ن ا

۲۴- $\frac{\text{جب (ا + ۳ب) + جب (۳ا + ب)}}{\text{جب ۲ا + جب ۲ب}}$ = ۲ جم (ا + ب)

۲۵- جب ۳ا + جب ۲ا − جب ا = ۴ جب ا جم $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ جم $\frac{\text{۳ا}}{\text{۲}}$

۲۶- مس ۲ا = (قط ۲ا + ۱) $\sqrt{\text{قط}^{2}\text{ ا − ۱}}$

۲۷- جم^{3} ۲ط + ۳ جم ۲ط = ۴ (جم^{6} ط − جب^{6} ط)

۲۸- ۱ + جم^{2} ۲ط = ۲ (جم^{4} ط + جب^{4} ط)

۲۹- قط^{2} ا (۱ + قط ۲ا) = ۲ قط ۲ا

۳۰- قم ا − ۲ مم ۲ا جم ا = ۲ جب ا

۳۱- مم ا = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ (مم $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ − مس $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$)

۳۲- جب عہ جب (۶۰° − عہ) جب (۶۰° + عہ) = $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$ جب ۳عہ

۳۳- جم عہ جم (۶۰° − عہ) جم (۶۰° + عہ) = $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$ جم ۳عہ

۳۴- مم عہ + مم (۶۰° + عہ) − مم (۶۰° − عہ) = ۳ مم ۳عہ

۳۵- $\text{جم}\,۲۰^\circ\ \text{جم}\,۴۰^\circ\ \text{جم}\,۶۰^\circ\ \text{جم}\,۸۰^\circ = \frac{۱}{۱۶}$

۳۶- $\text{جب}\,۲۰^\circ\ \text{جب}\,۴۰^\circ\ \text{جب}\,۶۰^\circ\ \text{جب}\,۸۰^\circ = \frac{۳}{۱۶}$

۳۷- $\text{جم}\,۴\,\text{عہ} = ۱ - ۸\,\text{جم}^۲\,\text{عہ} + ۸\,\text{جم}^۴\,\text{عہ}$

۳۸- $\text{جب}\,۴\,\text{ا} = ۴\,\text{جب}\,\text{ا}\,\text{جم}^۳\,\text{ا} - ۴\,\text{جم}\,\text{ا}\,\text{جب}^۳\,\text{ا}$

۳۹- $\text{جم}\,۶\,\text{عہ} = ۳۲\,\text{جم}^۶\,\text{عہ} - ۴۸\,\text{جم}^۴\,\text{عہ} + ۱۸\,\text{جم}^۲\,\text{عہ} - ۱$

۴۰- $\text{مس}\,۳\,\text{ا}\ \text{مس}\,۲\,\text{ا}\ \text{مس}\,\text{ا} = \text{مس}\,۳\,\text{ا} - \text{مس}\,۲\,\text{ا} - \text{مس}\,\text{ا}$

۴۱- $\frac{۲\,\text{جم}\,۲^{\text{ن}}\,\text{طہ} + ۱}{۲\,\text{جم}\,\text{طہ} + ۱} = (۲\,\text{جم}\,\text{طہ} - ۱)(۲\,\text{جم}\,۲\,\text{طہ} - ۱)(۲\,\text{جم}\,۲^۲\,\text{طہ} - ۱)$

$\cdots\cdots\cdots (۲\,\text{جم}\,۲^{\text{ن}-۱}\,\text{طہ} - ۱)$

کسری زاویے

۱۱۵- چونکہ دفعہ ۱۱۱ کے تعلقات ا کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہیں اس لئے اگر ہم ا کی بجائے $\frac{\text{ا}}{۲}$ اور اس لئے ۲ا کی بجائے $۲ \times \frac{\text{ا}}{۲}$ یعنی ا رکھدیں تو بھی وہ درست رہینگے اس طرح سے ہمیں ذیل کے ارتباط حاصل ہونگے۔

$$\text{جب}\,\text{ا} = ۲\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲} \quad \cdots\cdots\cdots (۱)$$

$$\text{جم}\,\text{ا} = \text{جم}^۲\,\frac{\text{ا}}{۲} - \text{جب}^۲\,\frac{\text{ا}}{۲}$$

$$= ۲\,\text{جم}^۲\,\frac{\text{ا}}{۲} - ۱ = ۱ - ۲\,\text{جب}^۲\,\frac{\text{ا}}{۲}$$

اور $\text{مس}\,\text{ا} = \frac{۲\,\text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲}}{۱ - \text{مس}^۲\,\frac{\text{ا}}{۲}}$

(۱) سے نیز ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\text{جب } ا = \frac{۲ \text{ جب } \frac{ا}{۲} \text{ جم } \frac{ا}{۲}}{\text{جم}^۲ \frac{ا}{۲} + \text{جب}^۲ \frac{ا}{۲}}$$

$$= \frac{۲ \text{ مس } \frac{ا}{۲}}{۱ + \text{مس}^۲ \frac{ا}{۲}}$$ شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $\text{جم}^۲ \frac{ا}{۲}$ پر تقسیم کرنے سے

اسی طرح سے $$\text{جم } ا = \frac{\text{جم}^۲ \frac{ا}{۲} - \text{جب}^۲ \frac{ا}{۲}}{\text{جم}^۲ \frac{ا}{۲} + \text{جب}^۲ \frac{ا}{۲}}$$

$$= \frac{۱ - \text{مس}^۲ \frac{ا}{۲}}{۱ + \text{مس}^۲ \frac{ا}{۲}}$$

۱۱۶۔ زاویہ $\frac{ا}{۲}$ کی مثلثی نسبتوں کو جم ا کی رقوم میں بیان کرو

دفعہ گزشتہ کی مساوات (۲) کے مطابق

$$\text{جم } ا = ۱ - ۲ \text{ جب}^۲ \frac{ا}{۲}$$

یعنی $$۲ \text{ جب}^۲ \frac{ا}{۲} = ۱ - \text{جم } ا$$

اور اس لئے $$\text{جب } \frac{ا}{۲} = \pm \sqrt{\frac{۱ - \text{جم } ا}{۲}} \quad \text{.......... (۱)}$$

نیز $$\text{جم } ا = ۲ \text{ جم}^۲ \frac{ا}{۲} - ۱$$

یعنی $$۲ \text{ جم}^۲ \frac{ا}{۲} = ۱ + \text{جم } ا$$

اوراس لئے جم $\frac{ا}{۲} = \pm \sqrt{\frac{۱ + جم ا}{۲}}$ .... (۲)

اسلئے مس $\frac{ا}{۲} = \frac{جب \frac{ا}{۲}}{جم \frac{ا}{۲}} = \pm \sqrt{\frac{۱ - جم ا}{۱ + جم ا}}$ .... (۳)

۱۱۷ - مندرجہ بالا ضابطوں میں سے ہرایک میں ایک مشتبہ علامت ہے، کسی خاص صورت میں مناسب علامت اس طرح معلوم ہو سکتی ہے، دیکھو امثلہ ذیل

مثال ۱ - معلوم ہے جم °۴۵ = $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$، جب $°۲۲\frac{۱}{۲}$ اور جم $°۲۲\frac{۱}{۲}$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

اگر دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) میں ا برابر °۴۵ رکھیں تو حاصل ہوگا۔

$$جب °۲۲\frac{۱}{۲} = \pm \sqrt{\frac{۱ - جم °۴۵}{۲}} = \pm \sqrt{\frac{۱ - \frac{۱}{\sqrt{۲}}}{۲}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{۲ - \sqrt{۲}}{۴}} = \pm \frac{۱}{۲}\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$$

اب جب $°۲۲\frac{۱}{۲}$ لازماً مثبت ہے اس لئے اوپر کی علامت لینی چاہیئے

$$اس لئے \quad جب °۲۲\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$$

اسی طرح سے

$$جم °۲۲\frac{۱}{۲} = \pm \sqrt{\frac{۱ + جم °۴۵}{۲}} = \sqrt{\frac{۲ + \sqrt{۲}}{۴}}$$

$$= \pm \frac{۱}{۲}\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}$$

نیز جم $°۲۲\frac{۱}{۲}$ مثبت ہے۔

$$\text{جم } ۲۲\tfrac{۱}{۲}^\circ = \sqrt{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}}$$

مثال ۲۔ اگر جم ۳۳۰° = $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ تو جب ۱۶۵° اور جم ۱۶۵° کی قیمتیں دریافت کرو

مساوات (۱) سے حاصل ہوگا۔

$$\text{جب } ۱۶۵^\circ = \pm\sqrt{\frac{۱-\text{جم } ۳۳۰^\circ}{۲}} = \pm\sqrt{\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{۴-۲\sqrt{۳}}{۸}} = \pm\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲\sqrt{۲}}$$

$$\text{نیز جم } ۱۶۵^\circ = \pm\sqrt{\frac{۱+\text{جم } ۳۳۰^\circ}{۲}} = \pm\sqrt{\frac{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{۴+۲\sqrt{۳}}{۸}} = \pm\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲\sqrt{۲}}$$

اب زاویہ ۱۶۵°، ۹۰° اور ۱۸۰° کے درمیاں واقع ہے یعنی بموجب دفعہ ۵۸ اس کی جیب مثبت ہے اور جیب التمام منفی

$$\text{اس لئے جب } ۱۶۵^\circ = \frac{\sqrt{۳}-۱}{۲\sqrt{۲}}$$

$$\text{اور جم } ۱۶۵^\circ = -\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲\sqrt{۲}}$$

اوپر کی مثالوں سے ظاہر ہے کہ جب زاویہ ا اور اس کی جیب التمام دونوں معلوم ہوں تو زاویہ $\frac{ا}{۲}$ کی مثلثی نسبتیں بغیر مشتبہ علامت کے معلوم ہوسکتی ہیں لیکن جب صرف جم ا معلوم ہو تو جب $\frac{ا}{۲}$ اور جم $\frac{ا}{۲}$ کو دریافت کرنے میں ہمیشہ مشتبہ علامات واقع ہوں گی اس اشتباہ کی وجہ دفعہ ذیل میں مندرج ہے

۱۱۸- جب ہم جم ا/۲ اور جب ا/۲ کو جم ا کی رقوم میں دریافت کرتے ہیں تو معلوم کرو کہ جواب میں مشتبہ علامت کیوں واقع ہوتی ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر ن کوئی صحیح عدد ہو تو

جم ا = جم (۲ ن π ± ا) = ک (فرض کرو)

اس لئے ظاہر ہے کہ جس ضابطے سے ہمکو جم ا/۲ کی قیمت ک کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اسی ضابطے سے (۲ ن π ± ا)/۲ کی جیب التمام بھی حاصل ہوگی۔

اب جم (۲ ن π ± ا)/۲ = جم (ن π ± ا/۲)

= جم ن π جم ا/۲ ∓ جب ن π جب ا/۲

= جم ن π جم ا/۲ = ± جم ا/۲

جہاں مثبت علامت لینی چاہیے اگر ن جفت ہو اور منفی اگر ن طاق ہو

اسی طرح جس ضابطے سے ہمکو جب ا/۲ کی قیمت ک کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے۔ اسی صورت سے ضرور ہے کہ (۲ ن π ± ا)/۲ کی جیب بھی حاصل ہو۔

نیز جب (۲ ن π ± ا)/۲ = جب (ن π ± ا/۲)

= جب ن π جم ا/۲ ± جم ن π جب ا/۲

$$= \pm \text{جم ن ۳ جب } \frac{ا}{۲} = \pm \text{ جب } \frac{ا}{۲}$$

پس معلوم ہوا کہ ہر ایک صورت میں ہمیں جم $\frac{ا}{۲}$ اور جب $\frac{ا}{۲}$ کی دو قیمتیں ملنی چاہئیں اور یہی تعداد دفعہ ۱۱۶ کے ضابطوں سے حاصل ہوتی ہے۔

{طالب علم اس دفعہ کی ہندسی توضیح زوایا $\frac{۲ ن ۳ \pm ا}{۲}$ یعنی ن ۳ $\pm \frac{ا}{۲}$ کو شکل میں کھینچنے سے کرسکتا ہے، ان زاویوں کو احاطہ کرنے والے خط کے چار مقامات ہونگے ان میں سے دو مقام خط ابتدائی کی مثبت سمت سے زاویے $\frac{ا}{۲}$ اور $-\frac{ا}{۲}$ بنائیں گے اور دو مقام خط ابتدائی کی سمت منفیہ سے زاویے $\frac{ا}{۲}$ اور $-\frac{ا}{۲}$ بنائیں گے، شکل سے ظاہر ہوگا کہ جم $\frac{ا}{۲}$ کی دو قیمتیں ہیں اور ایسے ہی جب $\frac{ا}{۲}$ کی دو قیمتیں ہیں}

۱۱۹۔ زاویہ $\frac{ا}{۲}$ کی مثلثی نسبتوں کو جب ا کی رقوم میں بیان کرو۔

دفعہ ۱۱۵ کی مساوات (۱) سے

$$\text{۲ جب } \frac{ا}{۲} \text{ جم } \frac{ا}{۲} = \text{ جب ا} \quad \text{.........(۱)}$$

نیز

$$\text{جب}^۲ \frac{ا}{۲} + \text{جم}^۲ \frac{ا}{۲} = ۱ \quad \text{.........(۲)}$$

سب سے اول ان مساواتوں کو جمع کرو اور پھر (۱) کو (۲) سے تفریق کرو، تو حاصل ہوگا

$$\text{جب}^۲ \frac{ا}{۲} + \text{۲ جب } \frac{ا}{۲} \text{ جم } \frac{ا}{۲} + \text{جم}^۲ \frac{ا}{۲} = ۱ + \text{ جب ا}$$

اور

$$\text{جب}^۲ \frac{ا}{۲} - \text{۲ جب } \frac{ا}{۲} \text{ جم } \frac{ا}{۲} + \text{جم}^۲ \frac{ا}{۲} = ۱ - \text{ جب ا}$$

یعنی

$$\left(\text{جب } \frac{ا}{۲} + \text{جم } \frac{ا}{۲}\right)^۲ = ۱ + \text{ جب ا}$$

اور (جب ا/۲ - جم ا/۲)^۲ = ۱ - جب ا

پس جب ا/۲ + جم ا/۲ = ± √(۱ + جب ا) ....(۳)

اور جب ا/۲ - جم ا/۲ = ± √(۱ - جب ا) ....(۴)

معادلات (۳) اور (۴) کو جمع کرنے اور تفریق کرنے سے

۲ جب ا/۲ = ± √(۱ + جب ا) ± √(۱ - جب ا) ...(۵)

اور ۲ جم ا/۲ = ± √(۱ + جب ا) ∓ √(۱ - جب ا) ....(۶)

زاویہ ا/۲ کی باقی مثلثی نسبتیں بآسانی حاصل ہوسکتی ہیں۔

۱۲۰ ۔ ضوابط (۵) اور (۶) میں دو مشتبہ علامات ہیں۔ امثلہ ذیل سے معلوم ہوگا کہ کسی خاص صورت میں یہ اشتباہ کس طرح دور ہوسکتا ہے۔

مثال ۱ ۔ جب ۳۰° کی قیمت ۱/۲ معلوم ہے، جب ۱۵° اور جم ۱۵° کی قیمتیں دریافت کرو۔

اگر ا = ۳۰° تو معادلات (۳) اور (۴) سے حاصل ہوگا۔

جب ۱۵° + جم ۱۵° = ± √(۱ + جب ۳۰°) = ± √۳/√۲

جب ۱۵° - جم ۱۵° = ± √(۱ - جب ۳۰°) = ± ۱/√۲

اب چونکہ جب ۱۵° اور جم ۱۵° دونوں مثبت ہیں اور جم ۱۵° بہ نسبت جب ۱۵° کے بڑی ہے اس لئے جملات جب ۱۵° + جم ۱۵° اور جب ۹۵ جم ۹۵ بالترتیب مثبت اور منفی ہیں اس لئے معلوم ہوا کہ

جب ۱۵° + جم ۱۵° = + √۳/√۲

اور جب 15° - جم 15° = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

اس لئے جب 15° = $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

اور جم 15° = $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

مثال ۲۔ اگر جب 570° = $-\frac{1}{2}$ تو جب 285° اور جم 285° کی قیمتیں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ا = 570° تو حاصل ہوگا

جب 285° + جم 285° = $\pm\sqrt{1 + \text{جب } 570^\circ} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

اور جب 285° - جم 285° = $\pm\sqrt{1 - \text{جب } 570^\circ} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

شکل سے معلوم ہوگا کہ جب 285° منفی ہے اور جم 285° مثبت ہے نیز زاویہ 285° کی جیب تعداداً جیب التمام سے بڑی ہے اس لئے جب 285° + جم 285° منفی ہے اور جب 285° - جم 285° بھی منفی ہے

$\therefore$ جب 285° + جم 285° = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

اور جب 285° - جم 285° = $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

اس لئے جب 285° = $-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

اور جم 285° = $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

۱۲۱۔ جب ہم جم $\frac{ا}{۲}$ اور جب $\frac{ا}{۲}$ کو جب ا کی رقوم میں بیان کرتے ہیں تو معلوم کرو کہ جواب میں مشتبہ علامت کیوں واقع ہوتی ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر ن کوئی صحیح عدد ہو تو

جب $\{ن\pi + (-1)^ن ا\}$ = جب ا = ک (فرض کرو) ..... (دفعہ ۸۸)

اس سے ظاہر ہے کہ جس ضابطے سے ہمکو جب $\frac{ا}{۲}$ کی قیمت ک کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اُسی ضابطے سے $\frac{ن\pi + (-۱)^{ن} ا}{۲}$ کی جیب کی قیمت بھی حاصل ہوگی

صورت اول۔ فرض کرو کہ ن جفت ہے اور ۲م کے برابر ہے تو جب $\frac{ن\pi + (-۱)^{ن} ا}{۲}$ = جب $(م\pi + \frac{ا}{۲})$

= جب م π جم $\frac{ا}{۲}$ + جم م π جب $\frac{ا}{۲}$ = جم م π جب $\frac{ا}{۲}$

= ± جب $\frac{ا}{۲}$ جہاں علامت مثبت لینی چاہیئے اگر م جفت ہو اور منفی اگر طاق ہو

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ن طاق ہے اور = ۲ع + ۱ تب

جب $\frac{ن\pi + (-۱)^{ن} ا}{۲}$ = جب $\frac{۲ع\pi + \pi - ا}{۲}$

= جب $\{ع\pi + \frac{\pi - ا}{۲}\}$

= جب ع π جم $\frac{\pi - ا}{۲}$ + جم ع π جب $\frac{\pi - ا}{۲}$

= جم ع π جم $\frac{ا}{۲}$ = ± جم $\frac{ا}{۲}$ اس میں علامت مثبت لو اگر ع جفت ہو اور منفی اگر ع طاق ہو

پس معلوم ہوا کہ جس ضابطے سے ہمکو جب $\frac{ا}{۲}$ کی قیمت جب ا کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اسی ضابطے سے علاوہ اس کے جب $\frac{ا}{۲}$، ہم $\frac{ا}{۲}$، - جم $\frac{ا}{۲}$ کی قیمتیں یعنی کل چار قیمتیں حاصل ہونی چاہیئں۔ اور ضوابط دفعہ ۱۱۹ میں مشتبہ علامات کے تمام مختلف اجتماع لینے سے قیمتوں کی یہی تعداد حاصل ہوتی ہے

اسی قسم کے عمل سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر جم $\frac{ا}{۲}$ کو جب ا کی رقوم میں دریافت کیا جائے تو چار قیمتیں حاصل ہونگی!-

[اگر ایک شکل ہندسیہ میں زاویے $\frac{ن\pi + (-۱)^{ن} ا}{۲}$ یعنی ن $\frac{\pi}{۲}$ + $(-۱)^{ن}$ $\frac{ا}{۲}$ اُس صورت میں کھینچے جائیں جہاں $\frac{ا}{۲}$ زاویہ قائمہ سے کم ہو تو معلوم ہوگا کہ احاطہ کرنے والے خط کے چار مقامات ہیں؛ اُن میں سے دو، ربع اول میں خط ابتدائی سے زاویے $\frac{ا}{۲}$ اور $\frac{\pi}{۲} - \frac{ا}{۲}$ بناتے ہیں اور دو ربع سوم میں خط ابتدائی کی منفی سمت سے زاویے $\frac{ا}{۲}$ اور $\frac{\pi}{۲} - \frac{ا}{۲}$ بناتے ہیں، شکل سے ظاہر ہوگا کہ ہمیں چار قیمتیں جب $\frac{ا}{۲}$ کی اور چار قیمتیں جم $\frac{ا}{۲}$ کی حاصل ہونی چاہئیں اور زاویہ $\frac{ا}{۲}$ کی باقی قیمتوں کی بھی یہی کیفیت ہے]

۱۲۲- کسی صورت عامہ میں ہم دفعہ ۱۱۹ کے ارتباطات (۳) اور (۴) کی مشتبہ علامات اس طرح دور کر سکتے ہیں-

$$\text{جب}\,\frac{ا}{۲} + \text{جم}\,\frac{ا}{۲} = \sqrt{۲}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\,\text{جب}\,\frac{ا}{۲} + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\,\text{جم}\,\frac{ا}{۲}\right)$$

$$= \sqrt{۲}\left[\text{جب}\,\frac{ا}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\pi}{۴} + \text{جم}\,\frac{ا}{۲}\,\text{جب}\,\frac{\pi}{۴}\right]$$

$$= \sqrt{۲}\,\text{جب}\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{ا}{۲}\right)$$

اور $\sqrt{۲}$ جب $\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{ا}{۲}\right)$ مثبت ہوگا اگر $\frac{\pi}{۴} + \frac{ا}{۲}$ ،
۲ن π اور ۲ن $\pi + \pi$ کے درمیان واقع ہو

یعنی اگر $\frac{ا}{۲}$ ، ۲ن $\pi - \frac{\pi}{۴}$ اور ۲ن $\pi + \frac{۳\pi}{۴}$ کے درمیان واقع ہو

اسلئے جملہ جب $\frac{ا}{۲}$ + جم $\frac{ا}{۲}$ مثبت ہوگا اگر زاویہ $\frac{ا}{۲}$

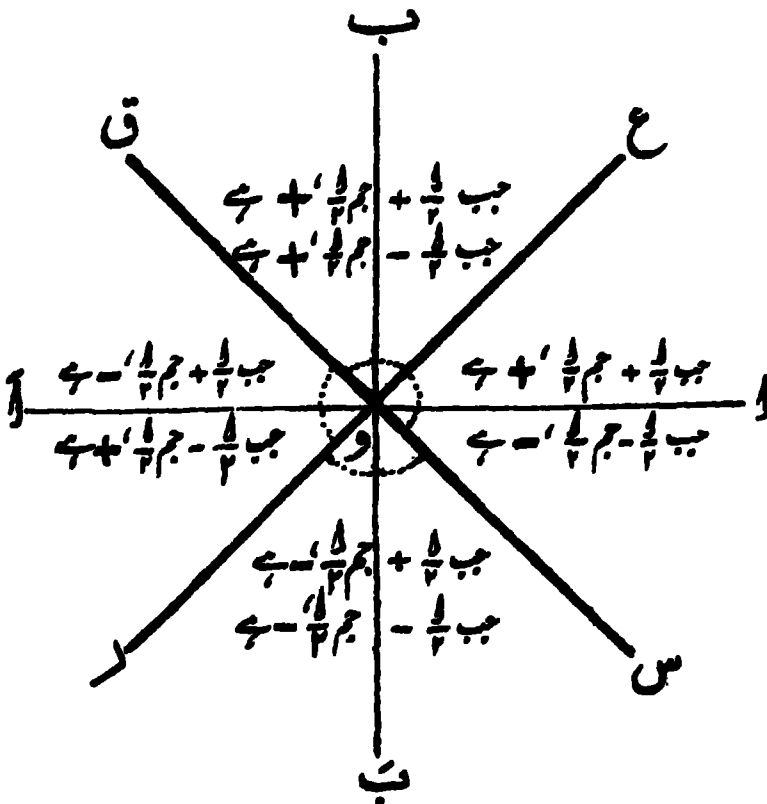
$۲ن\pi - \frac{\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi + \frac{۳\pi}{۴}$ کے درمیان واقع ہو
ورنہ یہ منفی ہوگا۔

اور اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$جب \frac{ا}{۲} - جم \frac{ا}{۲} = \sqrt{۲}\ جب \left(\frac{ا}{۲} - \frac{\pi}{۴}\right)$$

اس لئے جب $\frac{ا}{۲}$ − جم $\frac{ا}{۲}$ مثبت ہوگا اگر زاویہ $\left(\frac{ا}{۲} - \frac{\pi}{۴}\right)$، $۲ن\pi$ اور $۲ن\pi + \pi$ کے درمیان واقع ہو، یعنی اگر زاویہ $\frac{ا}{۲}$، $۲ن\pi + \frac{\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi + \frac{۵\pi}{۴}$ کے درمیان واقع ہو ورنہ یہ منفی ہوگا

اس دفعہ کے نتائج کی توضیح ترسیمی طور پر شکل ذیل میں کی گئی ہے

ب
ق　ع
جب $\frac{ا}{۲}$ + جم $\frac{ا}{۲}$، + ہے
جب $\frac{ا}{۲}$ − جم $\frac{ا}{۲}$، + ہے
جب $\frac{ا}{۲}$ + جم $\frac{ا}{۲}$، − ہے　جب $\frac{ا}{۲}$ + جم $\frac{ا}{۲}$، + ہے
اَ　و　ا
جب $\frac{ا}{۲}$ − جم $\frac{ا}{۲}$، + ہے　جب $\frac{ا}{۲}$ − جم $\frac{ا}{۲}$، − ہے
جب $\frac{ا}{۲}$ + جم $\frac{ا}{۲}$، − ہے
جب $\frac{ا}{۲}$ − جم $\frac{ا}{۲}$، − ہے
ر　س
بَ

وا خط ابتدائی ہے اور خطوط وع، وق، ود، وس بالترتیب ربع اول، دوم، سوم، چہارم کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں

مثال عددی۔ اگر ۲ جب $\frac{ا}{۲}$ = - $\sqrt{۱ + \text{جب} ا}$ - $\sqrt{۱ - \text{جب} ا}$ تو دریافت کرو کہ زاویہ $\frac{ا}{۲}$ کو کن حدود کے درمیان واقع ہونا چاہیئے۔

اس صورت میں دفعہ ۱۱۹ کے ضابطے لازماً ہونے چاہئیں۔

$$\text{جب}\frac{ا}{۲} + \text{جم}\frac{ا}{۲} = -\sqrt{۱ + \text{جب} ا} \quad ....(۱)$$

$$\text{جب}\frac{ا}{۲} - \text{جم}\frac{ا}{۲} = -\sqrt{۱ - \text{جب} ا} \quad ....(۲)$$

کیونکہ ان دونوں ضابطوں کو جمع کرنے سے ضابطہ معلومہ حاصل ہوتا ہے مساوات (۱) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جو خط زاویہ $\frac{ا}{۲}$ کا احاطہ کرتا ہے اسکو خطوط وق اور ود کے درمیان یا ود اور وس کے درمیان واقع ہونا چاہیئے اور مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ خط دائر کو خطوط ود اور وس یا وس اور وع کے درمیان واقع ہونا چاہیئے۔

اور یہ دونوں شرائط پوری ہوتی ہیں جب خط دائر ود اور وس کے درمیان واقع ہو یعنی جب زاویہ $\frac{ا}{۲}$،

۲ ن ۱۱ - $\frac{۳\pi}{۴}$ اور ۲ ن ۱۱ - $\frac{\pi}{۴}$ کے درمیان واقع ہو

۱۲۳ - زاویہ $\frac{ا}{۲}$ کی مثلثی نسبتوں کو مس ا کی رقوم میں بیان کرو۔

مساوات (۳) دفعہ ۱۱۵ سے

$$\text{مس} ا = \frac{۲\,\text{مس}\frac{ا}{۲}}{۱ - \text{مس}^۲\frac{ا}{۲}}$$

$$\therefore\quad ۱ - \text{مس}^۲\frac{\text{ا}}{۲} = \frac{۲}{\text{مس ا}}\,\text{مس}\frac{\text{ا}}{۲}$$

$$\text{یعنی}\quad \text{مس}^۲\frac{\text{ا}}{۲} + \frac{۲}{\text{مس ا}}\,\text{مس}\frac{\text{ا}}{۲} = ۱$$

طرفین پر $\frac{۱}{\text{مس}^۲\,\text{ا}}$ زیادہ کرنے سے حاصل ہوگا

$$\text{مس}^۲\frac{\text{ا}}{۲} + \frac{۲}{\text{مس ا}}\,\text{مس}\frac{\text{ا}}{۲} + \frac{۱}{\text{مس}^۲\,\text{ا}} = ۱ + \frac{۱}{\text{مس}^۲\,\text{ا}} = \frac{۱+\text{مس}^۲\,\text{ا}}{\text{مس}^۲\,\text{ا}}$$

$$\therefore\quad \text{مس}\frac{\text{ا}}{۲} + \frac{۱}{\text{مس ا}} = \pm\frac{\sqrt{۱+\text{مس}^۲\,\text{ا}}}{\text{مس ا}}$$

$$\therefore\quad \text{مس}\frac{\text{ا}}{۲} = \frac{\pm\sqrt{۱+\text{مس}^۲\,\text{ا}} - ۱}{\text{مس ا}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

۱۲۴۔ مساوات (۱) کی مشتبہ علامت صرف اُس صورت میں دور ہوسکتی ہے جب ہمیں ا کی مقدار کے متعلق کچھ معلوم ہو۔

مثال۔ اگر مس ۱۵° = ۲ − $\sqrt{۳}$ تو مس $۷\frac{۱}{۲}$° دریافت کرو

دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) فرض کروکہ ا = ۱۵°

$$\text{مس}\,۷\tfrac{۱}{۲}^\circ = \frac{\pm\sqrt{۱+(۲-\sqrt{۳})^۲} - ۱}{۲-\sqrt{۳}}$$

$$= \frac{\pm\sqrt{۸-۴\sqrt{۳}} - ۱}{۲-\sqrt{۳}} \quad \ldots\ldots (۱)$$

اب چونکہ مس $۷\frac{۱}{۲}$° مثبت ہے اسلئے ہمیں اوپر کی علامت لینی چاہیئے۔

$$\text{اس لئے}\quad \text{مس}\,۷\tfrac{۱}{۲}^\circ = \frac{+(\sqrt{۶}-\sqrt{۲}) - ۱}{۲-\sqrt{۳}}$$

= (√۶ − √۲ − ۱)(۲ + √۳)

= √۶ − √۳ + √۲ − ۲ = (√۳ − √۲)(√۲ − ۱)

چونکہ مس ۱۵° = مس ۱۹۵° اس لئے جس مساوات سے ہمکو مس $\frac{۱۵}{۲}$° کی قیمت مس ۱۵° کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اُسی مساوات سے ہمکو مس $\frac{۱۹۵}{۲}$° کی قیمت مس ۱۹۵° کی رقوم میں حاصل ہونے کی توقع رکھنی چاہیئے' دراصل جو قیمت مساوات (۱) میں علامت جذر کے ماقبل منفی علامت لینے سے حاصل ہوتی ہے وہ مس $\frac{۱۹۵}{۲}$° کی قیمت ہے

لہذا مس $\frac{۱۹۵}{۲}$° = (− √(۸ − ۴√۳) − ۱) / (√۳ − ۲)

= (−(√۶ − √۲) − ۱) / (√۳ − ۲) = (− √۶ + √۲ − ۱)(۲ + √۳)

= −(√۳ + √۲)(√۲ + ۱)

اس لئے مس ۹۷$\frac{۱}{۲}$° = − مم ۷$\frac{۱}{۲}$°

= −(√۳ + √۲)(√۲ + ۱)

۱۲۵ ـ اس امر کی تحقیق کرو کہ جب ہم مس $\frac{ا}{۲}$ کو مس ا کی رقوم میں دریافت کرتے ہیں تو جواب میں مشتبہ علامت کیوں واقع ہوتی ہے؟

دفعہ ۹۰ سے ہمکو معلوم ہے کہ اگر ن کوئی عدد صحیح ہو تو

مس (ن π + ا) = مس ا = ک (فرض کرو)

اس سے معلوم ہوا کہ جس مساوات سے ہمکو مس $\frac{ا}{۲}$ کی قیمت ک کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اُسی مساوات سے

مس $\frac{ن \pi + ا}{۲}$ کی قیمت بھی حاصل ہونی چاہیئے۔

صورت اول۔ فرض کرو کہ ن جفت ہے اور ۲ م کے برابر ہے۔

تب مس $\frac{ن \pi + ا}{۲}$ = مس $\frac{۲ م \pi + ا}{۲}$

= مس (م π + $\frac{ا}{۲}$) = مس $\frac{ا}{۲}$ بموجب دفعہ ۹۰

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ن طاق ہے اور = ۲ع + ۱

تب مس $\frac{ن \pi + ا}{۲}$ = مس $\frac{(۲ع + ۱) \pi + ا}{۲}$

= مس (ع π + $\frac{\pi + ا}{۲}$) = مس $\frac{\pi + ا}{۲}$ (دفعہ ۹۰)

= ۔ مم $\frac{ا}{۲}$ (دفعہ ۷۶)

اس سے معلوم ہوا کہ جس ضابطے سے ہمکو مس $\frac{ا}{۲}$ کی قیمت حاصل ہوگی اُسی ضابطے سے ۔ مم $\frac{ا}{۲}$ کی قیمت بھی حاصل ہونی چاہیئے۔

اس کی توضیح دفعہ گزشتہ کی ایک مثال میں ہوچکی ہے۔

امثلہ نمبری ۱۸

۱۔ اگر جب ط = $\frac{۱}{۲}$ اور جب ف = $\frac{۱}{۳}$ تو جب (ط + ف) اور جب (۲ط + ۲ف) کی قیمتیں دریافت کرو۔

۲۔ کسی زاویہ کا مماس ۲٫۴ ہے، اس کا قاطع التمام، اس کے نصف زاویہ کا قاطع التمام اور اس کے دوچند زاویہ کے تکملہ کا قاطع التمام دریافت کرو۔

۳- اگر جم عہ = $\frac{۱۱}{۱۴}$ اور جیب بہ = $\frac{۴}{۵}$ تو جیب $\frac{عہ - بہ}{۲}$ اور جم $\frac{عہ + بہ}{۲}$ کی قیمتیں دریافت کرو، دونوں زاویئے عہ اور بہ مثبت اور حادے ہیں۔

۴- اگر جم عہ = $\frac{۳}{۵}$ اور جم بہ = $\frac{۴}{۵}$ تو جم $\frac{عہ - بہ}{۲}$ کی قیمت دریافت کرو دونوں زاویئے عہ اور بہ مثبت اور حادے ہیں -

۵- معلوم ہے قطا طہ = $\frac{۱}{۴}$ ۱، دریافت کرو مس $\frac{طہ}{۲}$ اور مس طہ، ترسیمی عل سے اس کی تصدیق کرو

۶- اگر جم ا = ۰۲۸ تو مس $\frac{ا}{۲}$ کی قیمت دریافت کرو اور جواب میں مشتبہ علامت کی وجہ بیان کرو -

۷- مفصلہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو۔ (۱) جیب $\frac{۱}{۲}$ ۷° (۲) جم $\frac{۱}{۲}$ ۷° (۳) مس $\frac{۱}{۲}$ ۲۲° (۴) مس $\frac{۱}{۲}$ ۱۱°

۸ - اگر جیب طہ + جیب فہ = ا اور جم طہ + جم فہ = ب تو مس $\frac{طہ - فہ}{۲}$ کی قیمت دریافت کرو۔

ثابت کرو کہ

۹- $(جم عہ + جم بہ)^۲ + (جیب عہ - جیب بہ)^۲ = ۴ جم^۲ \frac{عہ + بہ}{۲}$

۱۰- $(جم عہ + جم بہ)^۲ + (جیب عہ + جیب بہ)^۲ = ۴ جم^۲ \frac{عہ - بہ}{۲}$

۱۱- $(جم عہ - جم بہ)^۲ + (جیب عہ - جیب بہ)^۲ = ۴ جیب^۲ \frac{عہ - بہ}{۲}$

۱۲- $جیب ا = \frac{۲ مس \frac{ا}{۲}}{۱ + مس^۲ \frac{ا}{۲}}$ ۱۳- $جم ا = \frac{۱ - مس^۲ \frac{ا}{۲}}{۱ + مس^۲ \frac{ا}{۲}}$

۱۴- $قطا (\frac{π}{۴} + طہ) قطا (\frac{π}{۴} - طہ) = ۲ قطا ۲ طہ$

۱۵- $مس (۴۵° + \frac{ا}{۲}) = \sqrt{\frac{۱ + جیب ا}{۱ - جیب ا}} = قطا ا + مس ا$

۱۶- $\text{جب}^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\text{ا}}{2}\right)-\text{جب}^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\text{ا}}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{جب ا}$

۱۷- $\text{جم}^2\,\text{ع}+\text{جم}^2(\text{ع}+120^\circ)+\text{جم}^2(\text{ع}-120^\circ)=\frac{3}{2}$

۱۸- $\text{جم}^2\frac{\pi}{8}+\text{جم}^2\frac{3\pi}{8}+\text{جم}^2\frac{5\pi}{8}+\text{جم}^2\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$

۱۹- $\text{جب}^2\frac{\pi}{8}+\text{جب}^2\frac{3\pi}{8}+\text{جب}^2\frac{5\pi}{8}+\text{جب}^2\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$

۲۰- $\text{جم}\,2\text{ط}\;\text{جم}\,2\text{ف}+\text{جب}^2(\text{ط}-\text{ف})-\text{جب}^2(\text{ط}+\text{ف})=\text{جب}(2\text{ط}+2\text{ف})$

۲۱- $(\text{مس}\,4\text{ا}+\text{مس}\,2\text{ا})(1-\text{مس}^2\,3\text{ا}\;\text{مس}^2\,\text{ا})=2\,\text{مس}\,3\text{ا}\;\text{قط}^2\,\text{ا}$

۲۲- $\left(1+\text{مس}\frac{\text{ع}}{2}-\text{قط}\frac{\text{ع}}{2}\right)\left(1+\text{مس}\frac{\text{ع}}{2}+\text{قط}\frac{\text{ع}}{2}\right)=\text{جب ع}\;\text{قط}^2\frac{\text{ع}}{2}$

ذیل کی تین صورتوں میں علامات جذر کے ماقبل جو مناسب علامات جبریہ لکھی جانی چاہئیں اُنہیں دریافت کرو۔

۲۳- $2\,\text{جم}\frac{\text{ا}}{2}=\pm\sqrt{1-\text{جب ا}}\pm\sqrt{1+\text{جب ا}}$ جہاں $\frac{\text{ا}}{2}=278^\circ$

۲۴- $2\,\text{جب}\frac{\text{ا}}{2}=\pm\sqrt{1-\text{جب ا}}\pm\sqrt{1+\text{جب ا}}$ جہاں $\frac{\text{ا}}{2}=\frac{19\pi}{11}$

۲۵- $2\,\text{جم}\frac{\text{ا}}{2}=\pm\sqrt{1-\text{جب ا}}\pm\sqrt{1+\text{جب ا}}$ جہاں $\frac{\text{ا}}{2}=-140^\circ$

۲۶- اگر $\text{ا}=340^\circ$ تو ثابت کرو کہ

$$2\,\text{جب}\frac{\text{ا}}{2}=-\sqrt{1+\text{جب ا}}+\sqrt{1-\text{جب ا}}$$

اور $$2\,\text{جم}\frac{\text{ا}}{2}=-\sqrt{1+\text{جب ا}}-\sqrt{1-\text{جب ا}}$$

۲۷- اگر $\text{ا}=460^\circ$ تو ثابت کرو کہ

$$2\,\text{جم}\frac{\text{ا}}{2}=-\sqrt{1+\text{جب ا}}+\sqrt{1-\text{جب ا}}$$

- اگر ا = ۵۸۰° تو ثابت کرو کہ

$$۲\,\text{جب}\,\frac{ا}{۲} = -\sqrt{۱ + \text{جب}\,ا} - \sqrt{۱ - \text{جب}\,ا}$$

- کن حدود کے درمیان $\frac{ا}{۲}$ کو واقع ہونا چاہیئے کہ

(۱) $۲\,\text{جب}\,\frac{ا}{۲} = \sqrt{۱ + \text{جب}\,ا} + \sqrt{۱ - \text{جب}\,ا}$

(۲) $۲\,\text{جب}\,\frac{ا}{۲} = -\sqrt{۱ + \text{جب}\,ا} + \sqrt{۱ - \text{جب}\,ا}$

(۳) $۲\,\text{جب}\,\frac{ا}{۲} = +\sqrt{۱ + \text{جب}\,ا} - \sqrt{۱ - \text{جب}\,ا}$

(۴) $۲\,\text{جم}\,\frac{ا}{۲} = \sqrt{۱ + \text{جب}\,ا} - \sqrt{۱ - \text{جب}\,ا}$

- کن حدود کے درمیان $\frac{ا}{۲}$ کو واقع ہونا چاہیئے کہ ضابطہ

$$۲\,\text{جم}\,\frac{ا}{۲} = \pm\sqrt{۱ + \text{جب}\,ا} \pm \sqrt{۱ - \text{جب}\,ا}$$

میں (۱) دونوں علامات مثبت لیجا سکیں

(۲) دونوں علامات منفی لیجا سکیں

(۳) پہلی علامت منفی ہو اور دوسری مثبت

- اگر ن کوئی عدد صحیح ہو اور کوئی زاویہ $۲ن\pi - \frac{۳\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi + \frac{\pi}{۴}$ کے
ن واقع ہو تو ثابت کرو کہ اس کی جیب از روئے الجبرا جیب التمام سے
ی-

- اگر جب $\frac{ا}{۳}$ کی قیمت مساوات

$$\text{جب}\,ا = ۳\,\text{جب}\,\frac{ا}{۳} - ۴\,\text{جب}^{۳}\,\frac{ا}{۳}$$

دریافت کی جائے تو ثابت کرو کہ اس کے علاوہ اسی مساوات سے ہمکو
$\frac{\pi - ا}{۳}$ اور $-\text{جب}\,\frac{\pi + ا}{۳}$ کی قیمتیں حاصل کرنے کی توقع رکھنی چاہیئے

ہندسی طریق سے اس کی توضیح کرو۔

۳۳۔ اگر جم ا/۳ کی قیمت مساوات

جم ا = ۴ جم^{۳} ا/۳ − ۳ جم ا/۳

سے دریافت کی جائے تو ثابت کرو کہ علاوہ اس کے اُسی مساوات سے ہمکو

جم (۲π − ا)/۳ اور جم (۲π + ا)/۳ کی قیمتیں حاصل کرنے کی

توقع رکھنی چاہیئے۔

ہندسی طریق سے اس کی توضیح کرو

۱۲۶۔ اس باب کے ضابطوں کے استعمال سے اب ہم چند مشہور زاویوں کی مثلثی نسبتیں دریافت کرسکتے ہیں۔

زاویہ ۱۸° کی مثلثی نسبتیں دریافت کرو

فرض کرو کہ ط = ۱۸° پس ۲ ط = ۳۶° اور ۳ ط = ۵۴°

نیز ۲ ط = ۹۰° − ۳ ط

اس لئے جب ۲ ط = جب (۹۰° − ۳ ط) = جم ۳ ط

∴ ۲ جب ط جم ط = ۴ جم^{۳} ط − ۳ جم ط (دفعات ۱۱۱ اور ۱۱۳)

اس سے معلوم ہوا کہ جم ط = ۰ جس سے ط = ۹۰°

یا ۲ جب ط = ۴ جم^{۲} ط − ۳ = ۱ − ۴ جب^{۲} ط

∴ ۴ جب^{۲} ط + ۲ جب ط = ۱

اس مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے حاصل ہوگا

جب ط = (± √۵ − ۱)/۴

مگر اس صورت میں جب طہ لازماً ایک مثبت مقدار ہے
اس لئے ہمکو مثبت علامت لینی چاہیئے - پس

$$\text{جب } ۱۸^\circ = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۴}$$

اور $$\text{جم } ۱۸^\circ = \sqrt{۱ - \text{جب}^۲\, ۱۸^\circ} = \sqrt{۱ - \frac{۶ - ۲\sqrt{۵}}{۱۶}}$$

$$= \sqrt{\frac{۱۰ + ۲\sqrt{۵}}{۱۶}} = \frac{\sqrt{۱۰ + ۲\sqrt{۵}}}{۴}$$

اب زاویہ ۱۸° کی باقی مثلثی نسبتیں بآسانی معلوم ہوسکتی ہیں
چونکہ زاویہ ۱۸° کا متمم ۷۲° ہے اسلئے زاویہ ۷۲° کی مثلثی نسبتیں
دفعہ ۷۵ کی اعانت سے بآسانی معلوم ہوسکتی ہیں -

۱۲۷ - زاویہ ۳۶° کی مثلثی نسبتیں دریافت کرو۔

چونکہ $\text{جم } ۲\,\text{طہ} = ۱ - ۲\,\text{جب}^۲\,\text{طہ}$ (دفعہ ۱۱۱)

$$\therefore \text{جم } ۳۶^\circ = ۱ - ۲\,\text{جب}^۲\, ۱۸^\circ = ۱ - ۲\left(\frac{۶ - ۲\sqrt{۵}}{۱۶}\right) = ۱ - \frac{۳ - \sqrt{۵}}{۴}$$

پس $$\text{جم } ۳۶^\circ = \frac{\sqrt{۵} + ۱}{۴}$$

اس لئے $$\text{جب } ۳۶^\circ = \sqrt{۱ - \text{جم}^۲\, ۳۶^\circ} = \sqrt{۱ - \frac{۶ + ۲\sqrt{۵}}{۱۶}} = \frac{\sqrt{۱۰ - ۲\sqrt{۵}}}{۴}$$

اب زاویہ ۳۶° کی باقی مثلثی نسبتیں معلوم ہوسکتی ہیں
نیز چونکہ زاویہ ۳۶° کا متمم ۵۴° ہے اس لئے ۵۴° کی مثلثی نسبتیں
بھی دفعہ ۷۵ کی مدد سے بآسانی معلوم ہوسکتی ہیں -

۱۲۸ - جب ۱۸° اور جم ۳۶° کی قیمتیں بطریق ہندسیہ اس طرح

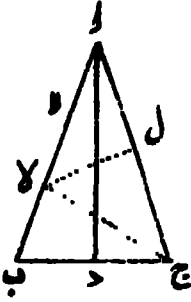
حاصل ہوسکتی ہیں۔

بموجب اقلیدس م ۶ ش ۱۰ ایک مثلث ا ب ج بناؤ یعنی مثلث کے زاویوں ب اور ج میں سے ہر ایک زاویہ ا کا دوچند ہو۔ تب

$$۱۸۰^\circ = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = \text{ا} + ۲\text{ا} + ۲\text{ا}$$

اس لئے $\text{ا} = ۳۶^\circ$

پس اگر ب ج پر عمود ا د نکالا جائے تو

$$\angle\, \text{ب ا د} = ۱۸^\circ$$

اب اقلیدس کے عمل سے ہم جانتے ہیں کہ ب ج برابر الا کے ہے جہاں لا ایسا نقطہ ا ب پر ہے کہ

$$\text{اب} \times \text{ب لا} = (\text{الا})^۲$$

فرض کرو کہ $\text{اب} = \text{ما}$ اور $\text{الا} = \text{لا}$

اوپر کے ربط سے حاصل ہوگا

$$\text{ما}(\text{ما} - \text{لا}) = \text{لا}^۲$$

یعنی $\text{لا}^۲ + \text{ما لا} = \text{ما}^۲$

یعنی $\text{لا} = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}\,\text{ما}$

اس لئے $\text{جب}\ ۱۸^\circ = \text{جب ب ا د} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب ا}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{\text{ب ج}}{\text{ب ا}}$

$$= \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۴}$$

نیز بموجب اقلیدس م ۶ ش ۱۰، الا اور لا ج باہم مساوی ہیں۔

اس لیے اگر اج پر عمود لال نکالا جائے تو اج کی تنصیف نقطہ ل پر ہوگی۔

اس لئے $\text{جم}\,36^\circ = \frac{\text{ال}}{\text{لا}} = \frac{\text{ما}}{2} \div \text{لا} = \frac{1}{\sqrt{5}-1}$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

۱۲۹ — زاویہ ۹° کی مثلثی نسبتیں دریافت کرو

چونکہ جب ۹° اور جم ۹° دونوں مثبت ہیں اسلئے ربط (۳) دفعہ ۱۱۹ سے حاصل ہوگا۔

$$\text{جب}\,9^\circ + \text{جم}\,9^\circ = \sqrt{1 + \text{جب}\,18^\circ}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}-1}{4}} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2} \quad \text{.......} \quad (1)$$

نیز چونکہ جم ۹° مقدار میں جب ۹° سے بڑا ہے (دفعہ ۵۹) اسلئے جملہ جب ۹° − جم ۹° منفی ہے لہذا ربط ۴ دفعہ (۱۱۹) سے حاصل ہوگا

$$\text{جب}\,9^\circ - \text{جم}\,9^\circ = -\sqrt{1 - \text{جب}\,18^\circ}$$

$$= -\sqrt{1 - \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

$$= -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2} \quad \text{.......} \quad (2)$$

(۱) اور (۲) کو جمع کرنے سے

$$\text{جب}\,9^\circ = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$$

نیز (۲) کو (۱) سے تفریق کرنے سے

$$\text{جم}\ ۹^\circ = \frac{\sqrt{۳+\sqrt{۵}}+\sqrt{۵-\sqrt{۵}}}{۴}$$

اب زاویہ ۹° کے باقی جملے دریافت ہو سکتے ہیں
نیز چونکہ ۸۱° زاویہ ۹° کا متمم ہے اسلئے دفعہ ۷۵ کی مدد سے ۸۱° کی مثلثی نسبتیں معلوم ہوسکتی ہیں۔

امثلہ نمبری ۱۹

ثابت کروکہ

۱- $\text{جب}^۲\ ۷۲^\circ - \text{جب}^۲\ ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۸}$

۲- $\text{جم}^۲\ ۴۸^\circ - \text{جب}^۲\ ۱۲^\circ = \frac{\sqrt{۵}+۱}{۸}$

۳- $\text{جم}\ ۱۲^\circ + \text{جم}\ ۶۰^\circ + \text{جم}\ ۸۴^\circ = \text{جم}\ ۲۴^\circ + \text{جم}\ ۴۸^\circ$ عمل ترسیمی سے اس کی تصدیق کرو۔

۴- $\text{جب}\ \frac{\pi}{۵}\ \text{جب}\ \frac{۲\pi}{۵}\ \text{جب}\ \frac{۳\pi}{۵}\ \text{جب}\ \frac{۴\pi}{۵} = \frac{۵}{۱۶}$

۵- $\text{جب}\ \frac{\pi}{۱۰} + \text{جب}\ \frac{۱۳\pi}{۱۰} = -\frac{۱}{۲}$

۶- $\text{جب}\ \frac{\pi}{۱۰}\ \text{جب}\ \frac{۱۳\pi}{۱۰} = -\frac{۱}{۴}$

۷- $\text{مس}\ ۶^\circ\ \text{مس}\ ۴۲^\circ\ \text{مس}\ ۶۶^\circ\ \text{مس}\ ۷۸^\circ = ۱$

۸- $\text{جم}\ \frac{\pi}{۱۵}\ \text{جم}\ \frac{۲\pi}{۱۵}\ \text{جم}\ \frac{۳\pi}{۱۵}\ \text{جم}\ \frac{۴\pi}{۱۵}\ \text{جم}\ \frac{۵\pi}{۱۵}\ \text{جم}\ \frac{۶\pi}{۱۵}\ \text{جم}\ \frac{۷\pi}{۱۵} = \frac{۱}{۲^۷}$

۹- $۱۶\ \text{جم}\ \frac{۲\pi}{۱۵}\ \text{جم}\ \frac{۴\pi}{۱۵}\ \text{جم}\ \frac{۸\pi}{۱۵}\ \text{جم}\ \frac{۱۴\pi}{۱۵} = ۱$

۱۰- ایک دائرہ کے دو متوازی وتر مرکز کی ایک ہی جانب میں واقع ہیں اور اُن کے محاذی دائرہ کے مرکز پر زاوئے ۷۲° اور ۱۴۴° بالترتیب بنتے ہیں، ثابت کرو کہ وتروں کے درمیان عمودی فاصلہ دائرہ کے نصف قطر کے برابر ہے۔

۱۱- ثابت کرو کہ کسی دائرہ کا ایک وتر جس کے محاذی ۱۰۸° کا زاویہ مرکز پر بنتا ہے دو ایسے وتروں کے مجموعہ کے برابر ہوگا جن کے مقابل مرکز پر زاوئے ۳۶° اور ۶۰° بنتے ہیں۔

۱۲- ایک ایسا زاویہ بناؤ جس کی جیب التمام اُس کے ماس کے برابر ہو۔

۱۳- مساوات ذیل کو حل کرو۔

جب ۵ طہ جم ۳ طہ = جب ۹ طہ جم ۷ طہ

باب نہم

متماثلات اور مثلثی معادلات

۱۳۰- ضوابط دفعہ ۹۴ اور ۹۶ کی مدد سے دو سے زیادہ زاویوں کے حاصل جمع کی مثلثی نسبتیں حاصل ہوسکتی ہیں، مثلاً

جب (ا + ب + ج) = جب (ا + ب) جم ج + جم (ا + ب) جب ج

= (جب ا جم ب + جم ا جب ب) جم ج

+ (جم ا جم ب - جب ا جب ب) جب ج

= جب ا جم ب جم ج + جم ا جب ب جم ج

+ جم ا جم ب جب ج - جب ا جب ب جب ج،

اسی طرح سے

جم (ا + ب + ج) = جم (ا + ب) جم ج - جب (ا + ب) جب ج

= (جم ا جم ب - جب ا جب ب) جم ج

- (جب ا جم ب + جم ا جب ب) جب ج

= جم ا جم ب جم ج - جم ا جب ب جب ج - جب ا جم ب جب ج

- جب ا جب ب جم ج

نیز مس (ا + ب + ج) = $\frac{\text{مس (ا + ب) + مس ج}}{\text{ا - مس (ا + ب) مس ج}}$

$$= \frac{\dfrac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{۱ - \text{مس ا مس ب}} + \text{مس ج}}{۱ - \dfrac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{۱ - \text{مس ا مس ب}} \times \text{مس ج}}$$

$$= \frac{\text{مس ا} + \text{مس ب} + \text{مس ج} - \text{مس ا مس ب مس ج}}{۱ - \text{مس ب مس ج} - \text{مس ج مس ا} - \text{مس ا مس ب}}$$

۱۳۱ - دفعہ گذشتہ کا آخری ضابطہ ایک ایسے مسئلہ عامہ کی خاص صورت ہے جس کی مدد سے زاویوں کی کسی تعداد کے مجموعہ کا مماس خود اُن زاویون کے مماسون کی رقوم میں دریافت ہو سکتا ہے مسئلہ مذکورہ یہ ہے

$$\text{مس}\left(\text{ا}_{۱} + \text{ا}_{۲} + \text{ا}_{۳} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}\right) = \frac{\text{ص}_{۱} - \text{ص}_{۳} + \text{ص}_{۵} - \text{ص}_{۷} + \cdots}{۱ - \text{ص}_{۲} + \text{ص}_{۴} - \text{ص}_{۶} + \cdots} \quad \cdots\cdots (۱)$$

جہاں $\text{ص}_{۱} = \text{مس ا}_{۱} + \text{مس ا}_{۲} + \text{مس ا}_{۳} + \cdots + \text{مس ا}_{\text{ن}}$

= مختلف زاویوں کے مماسوں کا مجموعہ

$\text{ص}_{۲} = \text{مس ا}_{۱}\,\text{مس ا}_{۲} + \text{مس ا}_{۱}\,\text{مس ا}_{۳} + \cdots\cdots$

= دو دو مماسون کے حاصل ضرب کا مجموعہ

$\text{ص}_{۳} = \text{مس ا}_{۱}\,\text{مس ا}_{۲}\,\text{مس ا}_{۳} + \text{مس ا}_{۱}\,\text{مس ا}_{۲}\,\text{مس ا}_{۴} + \cdots\cdots$

= تین تین ماسوں کے حاصل ضرب کا مجموعہ

اور علیٰ ہذا القیاس

مان لو کہ ن زاویوں کے لئے ربط (۱) درست ہے۔

ایک اور زاویہ $\text{ا}_{\text{ن}+1}$ کا اضافہ کرو

تب $\text{مس}(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\text{ا}_3+\dots+\text{ا}_{\text{ن}+1})$

$$=\text{مس}\left[(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\text{ا}_3+\dots+\text{ا}_\text{ن})+\text{ا}_{\text{ن}+1}\right]$$

$$=\frac{\text{مس}(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\text{ا}_3+\dots+\text{ا}_\text{ن})+\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}}{1-\text{مس}(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\text{ا}_3+\dots+\text{ا}_\text{ن})\times\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}}$$

$$=\frac{\dfrac{\text{ص}_1-\text{ص}_3+\text{ص}_5-\text{ص}_7+\dots}{1-\text{ص}_2+\text{ص}_4-\dots}+\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}}{1-\dfrac{\text{ص}_1-\text{ص}_3+\text{ص}_5-\text{ص}_7+\dots}{1-\text{ص}_2+\text{ص}_4-\dots}\,\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}}$$

فرض کرو کہ $\text{مس}\,\text{ا}_1$، $\text{مس}\,\text{ا}_2$، $\text{مس}\,\text{ا}_3$ ..... $\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+1}$ کو ہم بالترتیب م_1، م_2، م_3 ..... $\text{م}_{\text{ن}+1}$ سے تعبیر کرتے ہیں

تب $\text{مس}(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\text{ا}_3+\dots+\text{ا}_{\text{ن}+1})$

$$=\frac{(\text{ص}_1-\text{ص}_3+\text{ص}_5-\dots)+\text{م}_{\text{ن}+1}(1-\text{ص}_2+\text{ص}_4-\dots)}{(1-\text{ص}_2+\text{ص}_4-\dots)-(\text{ص}_1-\text{ص}_3+\text{ص}_5-\dots)\text{م}_{\text{ن}+1}}$$

$$=\frac{(\text{ص}_1+\text{م}_{\text{ن}+1})-(\text{ص}_3+\text{ص}_2\text{م}_{\text{ن}+1})+(\text{ص}_5+\text{ص}_4\text{م}_{\text{ن}+1})+\dots}{1-(\text{ص}_2+\text{ص}_1\text{م}_{\text{ن}+1})+(\text{ص}_4+\text{ص}_3\text{م}_{\text{ن}+1})-(\text{ص}_6+\text{ص}_5\text{م}_{\text{ن}+1})\dots}$$

لیکن $\text{ص}_1 + \text{م}_{\text{ن}+1} = (\text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3 + \ldots\ldots + \text{م}_{\text{ن}}) + \text{م}_{\text{ن}+1}$

= (ن + ۱) مماسوں کا مجموعہ

$\text{ص}_2 + \text{ص}_1 \text{م}_{\text{ن}+1} = (\text{م}_1\text{م}_2 + \text{م}_2\text{م}_3 + \ldots) + (\text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3 + \ldots)\,\text{م}_{\text{ن}+1}$

= (ن + ۱) مماسوں میں سے دو دو کے حاصل ضرب کا مجموعہ

$\text{ص}_3 + \text{ص}_2 \text{م}_{\text{ن}+1} = (\text{م}_1\text{م}_2\text{م}_3 + \text{م}_2\text{م}_3\text{م}_4 + \ldots) + (\text{م}_1\text{م}_2 + \text{م}_2\text{م}_3 + \ldots) \times \text{م}_{\text{ن}+1}$

= (ن + ۱) مماسوں میں سے تین تین کے حاصل ضرب کا مجموعہ

اور علیٰ ہذا القیاس

اس سے معلوم ہوا کہ (ن + ۱) زاویوں کے لئے بھی وہی قانون درست ہے جو ن زاویوں کے لئے ہے، اس لئے اگر مسئلہ ن زاویوں کے لئے صحیح ہو تو یہ (ن + ۱) زاویوں کے لئے بھی صحیح ہوتا ہے، لیکن بموجب دفعات ۱۰۴ اور ۱۳۰ یہ ۲ اور ۳ زاویوں کے لئے صحیح ہے، اس لئے ۴ زاویوں کے لئے صحیح ہے، اس لئے ۵ زاویوں کے لئے، ....

اس لئے ثابت ہوا کہ یہ بالعموم صحیح ہے،

نتیجہ صریح ۔ اگر کل زاوئے تعداد میں ن ہوں اور ان میں سے ہر ایک ط کے برابر ہو تو

$\text{ص}_1 = \text{ن} \times \text{مس ط}$ ، $\text{ص}_2 = \text{ج}^{\text{ن}}_2\, \text{مس}^2\text{ط}$ ، $\text{ص}_3 = \text{ج}^{\text{ن}}_3\, \text{مس}^3\text{ط}$ ، .....

مثال ۔ مس ۴ ط کی قیمت دریافت کرو۔

یہاں $\text{مس ۴ ط} = \dfrac{\text{ص}_1 - \text{ص}_3}{1 - \text{ص}_2 + \text{ص}_4}$

$$= \frac{4\,\text{مس ط} - \text{ج}^4_3\,\text{مس}^3\text{ط}}{1 - \text{ج}^4_2\,\text{مس}^2\text{ط} + \text{ج}^4_4\,\text{مس}^4\text{ط}}$$

= (۴ مس ط − ۴ مس^{3} ط) ÷ (۱ − ۶ مس^{2} ط + مس^{4} ط)

مثال - ثابت کرو کہ مس ۵ط = (۵ مس ط − ۱۰ مس^{3} ط + مس^{5} ط) ÷ (۱ − ۱۰ مس^{2} ط + ۵ مس^{4} ط)

۱۳۲ - ترکیب دفعہ گذشتہ کے موافق ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ

جب (ا$_{1}$ + ا$_{2}$ + ا$_{3}$ + ... + ا$_{n}$)

= جم ا$_{1}$ جم ا$_{2}$ جم ا$_{3}$ ...... جم ا$_{n}$ (ص$_{1}$ − ص$_{3}$ + ص$_{5}$ − ...)

اور جم (ا$_{1}$ + ا$_{2}$ + ا$_{3}$ + ... + ا$_{n}$)

= جم ا$_{1}$ جم ا$_{2}$ جم ا$_{3}$ ...... جم ا$_{n}$ (۱ − ص$_{2}$ + ص$_{4}$ − ......)

جہاں ص$_{1}$، ص$_{2}$، ص$_{3}$، .... کی وہی قیمتیں ہیں جو دفعہ گذشتہ میں بیان ہوئیں۔

۱۳۳ - مثلث کے زاویوں کی مثلثی نسبتوں کے باہمی ارتباطات

جب تین زاوئے ا، ب، ج ایسے ہوں کہ ان کا مجموعہ ۱۸۰° ہو تو ان کی مثلثی نسبتوں کے کئی ایک باہمی تعلقات بآسانی حاصل ہوسکتے ہیں ترکیب ثبوت کی توضیح امثلہ ذیل سے ہوگی۔

مثال ۱ - اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

جب ۲ا + جب ۲ب + جب ۲ج = ۴ جب ا جب ب جب ج

اور جب ۲ا + جب ۲ب + جب ۲ج

= ۲ جب (ا + ب) جم (ا − ب) + ۲ جب ج جم ج

ا + ب + ج = ۱۸۰°

ا + ب = ۱۸۰° - ج

لئے جب (ا + ب) = جب ج

جم (ا + ب) = - جم ج ..... (دفعہ ۷۶)

جملہ = ۲ جب ج جم (ا - ب) + ۲ جب ج جم ج

= ۲ جب ج [جم (ا - ب) + جم ج]

= ۲ جب ج [جم (ا - ب) - جم (ا + ب)]

= ۲ جب ج × ۲ جب ا جب ب

= ۴ جب ا جب ب جب ج

۲ — اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

جم ا + جم ب - جم ج = -۱ + ۴ جم ا/۲ جم ب/۲ جب ج/۲

جملہ = جم ا + (جم ب - جم ج)

= ۲ جم² ا/۲ - ۱ + ۲ جب (ب + ج)/۲ جب (ج - ب)/۲

اب ب + ج = ۱۸۰° - ا

یعنی (ب + ج)/۲ = ۹۰° - ا/۲

لئے جب (ب + ج)/۲ = جم ا/۲

جم (ب + ج)/۲ = جب ا/۲

جملہ = ۲ جم² ا/۲ - ۱ + ۲ جم ا/۲ جب (ج - ب)/۲

= ۲ جم ا/۲ [جم ا/۲ + جب (ج - ب)/۲] - ۱

= ۲ جم ا/۲ {جب (ب + ج)/۲ + جب (ج - ب)/۲} - ۱

= ۲ جم ا/۲ × ۲ جب ج/۲ جم ب/۲ - ۱

= - ۱ + ۴ جم ا/۲ جم ب/۲ جب ج/۲

مثال ۳ — اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

جب² ا + جب² ب + جب² ج = ۲ + ۲ جم ا جم ب جم ج

فرض کرو کہ ص = جب² ا + جب² ب + جب² ج

تب ۲ ص = ۲ جب² ا + ۱ - جم ۲ب + ۱ - جم ۲ج

= ۲ جب² ا + ۲ - ۲ جم (ب + ج) جم (ب - ج)

= ۲ - ۲ جم² ا + ۲ - ۲ جم (ب + ج) جم (ب - ج)

اس لئے ص = ۲ + جم ا [جم (ب - ج) + جم (ب + ج)]

چونکہ جم ا = جم [۱۸۰° - (ب + ج)] = - جم (ب + ج)

∴ ص = ۲ + جم ا × ۲ جم ب جم ج

= ۲ + ۲ جم ا جم ب جم ج

مثال ۴ — اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

مس ا + مس ب + مس ج = مس ا مس ب مس ج

بموجب دفعہ ۱۳۰ ضابطہ تین میں

ب + ج) = $\frac{\text{مس ا + مس ب + مس ج - مس ا مس ب مس ج}}{\text{۱ - (مس ب مس ج + مس ج مس ا + مس ا مس ب)}}$

ں (ا + ب + ج) = مس ۱۸۰° = ۰

س ا + مس ب + مس ج - مس ا مس ب مس ج = ۰

س ا + مس ب + مس ج = مس ا مس ب مس ج

ں کو براہ راست اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں

ا + ب) = مس (۱۸۰° - ج) = - مس ج

$\frac{\text{ا + مس ب}}{\text{مس ا مس ب}}$ = - مس ج

ں ا + مس ب = - مس ج + مس ا مس ب مس ج

س ا + مس ب + مس ج = مس ا مس ب مس ج

۵ — اگر لا + ما + ی = لا ما ی تو ثابت کرو کہ

$\frac{\text{۲ما}}{\text{۱-ما}^2} + \frac{\text{۲ی}}{\text{۱-ی}^2} = \frac{\text{۲لا}}{\text{۱-لا}^2} \times \frac{\text{۲ما}}{\text{۱-ما}^2} \times \frac{\text{۲ی}}{\text{۱-ی}^2}$

کہ لا = مس ا، ما = مس ب اور ی = مس ج

ں ہوگا

س ا + مس ب + مس ج = مس ا مس ب مس ج

$\frac{\text{مس ا + مس ب}}{\text{-مس ا مس ب}}$ = - مس ج

س (ا + ب) = مس (π - ج) .... (دفعہ ۷۸)

ا + ب + ج = ن π + π

∴ ۲لا/(۱-لا^۲) + ۲ما/(۱-ما^۲) + ۲ی/(۱-ی^۲) = ۲مس ا/(۱-مس^۲ ا) + ۲مس ب/(۱-مس^۲ ب) + ۲مس ج/(۱-مس^۲ ج)

= مس ۲ا + مس ۲ب + مس ۲ج = مس ۲ا مس ۲ب مس ۲ج

(اسی قسم کے عمل سے جو آخری مثال میں ہوا)

= ۲لا/(۱-لا^۲) × ۲ما/(۱-ما^۲) × ۲ی/(۱-ی^۲)

اشغلہ نمبر ۲۰

اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

۱ — جب ۲ا + جب ۲ب - جب ۲ج = ۴ جم ا جم ب جب ج

۲ — جم ۲ا + جم ۲ب + جم ۲ج = -۱-۴ جم ا جم ب جم ج

۳ — جم ۲ا + جم ۲ب - جم ۲ج = ۱-۴ جب ا جب ب جم ج

۴ — جب ا + جب ب + جب ج = ۴ جم (ا/۲) جم (ب/۲) جم (ج/۲)

۵ — جب ا + جب ب - جب ج = ۴ جب (ا/۲) جب (ب/۲) جم (ج/۲)

۶ — جم ا + جم ب + جم ج = ۱ + ۴ جب (ا/۲) جب (ب/۲) جب (ج/۲)

۷ — جب^۲ ا + جب^۲ ب - جب^۲ ج = ۲ جب ا جب ب جم ج

۸ — جم^۲ ا + جم^۲ ب + جم^۲ ج = ۱ - ۲ جم ا جم ب جم ج

۹ — جم^۲ ا + جم^۲ ب - جم^۲ ج = ۱ - ۲ جب ا جب ب جم ج

۱۰ — جب^۲ (ا/۲) + جب^۲ (ب/۲) + جب^۲ (ج/۲) = ۱ - ۲ جب (ا/۲) جب (ب/۲) جب (ج/۲)

۱۱ـ جب² ا/۲ + جب² ب/۲ − جب² ج/۲ = ۱ − ۲ جم ا/۲ جم ب/۲ جب ج/۲

۱۲ـ مس ا/۲ مس ب/۲ + مس ب/۲ مس ج/۲ + مس ج/۲ مس ا/۲ = ۱

۱۳ـ مم ا/۲ + مم ب/۲ + مم ج/۲ = مم ا/۲ مم ب/۲ مم ج/۲

۱۴ـ مم ب مم ج + مم ج مم ا + مم ا مم ب = ۱

۱۵ـ جب (ب + ۲ج) + جب (ج + ۲ا) + جب (ا + ۲ب)

= ۴ جب (ب − ج)/۲ جب (ج − ا)/۲ جب (ا − ب)/۲

۱۶ـ جب ا/۲ + جب ب/۲ + جب ج/۲ − ۱ = ۴ جب (π − ا)/۴ جب (π − ب)/۴ جب (π − ج)/۴

۱۷ـ جم ا/۲ + جم ب/۲ − جم ج/۲ = ۴ جم (π + ا)/۴ جم (π + ب)/۴ جم (π − ج)/۴

۱۸ـ (جب ۲ا + جب ۲ب + جب ۲ج) / (جب ا + جب ب + جب ج) = ۸ جب ا/۲ جب ب/۲ جب ج/۲

۱۹ـ جب (ب + ج − ا) + جب (ج + ا − ب) + جب (ا + ب − ج)

= ۴ جب ا جب ب جب ج

اگر ا + ب + ج = ۲ص تو ثابت کرو کہ

۲۰ـ جب (ص − ا) جب (ص − ب) + جب ص جب (ص − ج) = جب ا جب ب

۲۱ـ ۴ جب ص جب (ص − ا) جب (ص − ب) جب (ص − ج)

= ۱ − جم² ا − جم² ب − جم² ج + ۲ جم ا جم ب جم ج

۲۲ـ جب (ص − ا) + جب (ص − ب) + جب (ص − ج) − جب ص

= ۴ جب ا/۲ جب ب/۲ جب ج/۲

۲۳ — جم² ص + جم² (ص - ا) + جم² (ص - ب) + جم² (ص - ج)
= ۲ + ۲ جم ا جم ب جم ج

۲۴ — جم² ا + جم² ب + جم² ج + ۲ جم ا جم ب جم ج
= ۱ + ۴ جم ص جم (ص - ا) جم (ص - ب) جم (ص - ج)

۲۵ — اگر عہ + بہ + جہ + لہ = ۲ π تو ثابت کرو کہ

(۱) جم عہ + جم بہ + جم جہ + جم لہ + ۴ جم $\frac{عہ + جہ}{۲}$ جم $\frac{عہ + بہ}{۲}$ جم ...

(۲) جیب عہ - جیب بہ + جیب جہ - جیب لہ + ۴ جم $\frac{عہ + بہ}{۲}$ جیب $\frac{عہ + جہ}{۲}$ جم ...

اور (۳) مس عہ + مس بہ + مس جہ + مس لہ
= مس عہ مس بہ مس جہ مس لہ (مم عہ + مم بہ + مم جہ + مم ...

۲۶ — اگر چار زاویوں کا مجموعہ ۱۸۰ ہو تو ثابت کرو کہ ان کی جیوب میں سے دو دو کے حاصل ضرب کا مجموعہ ان کی جیوب میں سے ... کے حاصل ضرب کے مجموعہ کے برابر ہوگا۔

۲۷ — اگر عہ + بہ + جہ = ۰ تو ثابت کرو کہ

جیب ۲ عہ + جیب ۲ بہ + جیب ۲ جہ
= ۲ (جیب عہ + جیب بہ + جیب جہ) (۱ + جم عہ + جم بہ + جم جہ)

۲۸ — اس کی تصدیق کرو کہ

جیب³ ا جیب (ب - ج) + جیب³ ب جیب (ج - ا) + جیب³ ج جیب (ا ...
+ جیب (ا + ب + ج) جیب (ب - ج) جیب (ج - ا) جیب (ا - ب) ...

اگر ا، ب، ج، د، کوئی زاویے ہوں تو ثابت کرو کہ

۲۹ — جیب ا جیب ب جیب (ا - ب) + جیب ب جیب ج جیب (ب ...
+ جیب ج جیب ا جیب (ج - ا) + جیب (ا - ب) جیب (ب - ج) جیب ...

۳۰۔ جب(ا ـ ب) جم(ا + ب) + جب(ب ـ ج) جم(ب + ج)
+ جب(ج ـ د) جم(ج + د) + جب(د ـ ا) جم(د + ا) = ۰

۳۱۔ جب(ا + ب ـ ۲ ج) جم ب ـ جب(ا + ج ـ ۲ ب) جم ج
= جب(ب ـ ج) [جم(ب + ج ـ ا) + جم(ج + ا ـ ب) + جم(ا + ب ـ ج)]

۳۲۔ جب(ا + ب + ج + د) + جب(ا + ب ـ ج ـ د) + جب(ا + ب ـ ج + د)
+ جب(ا + ب + ج ـ د) = ۴ جب(ا + ب) جم ج جم د

۳۳۔ اگر کوئی مسئلہ ا، ب، ج کی ایسی قیمتوں کے لئے درست ہو جو مساوات ا + ب + ج = ۱۸۰° کو پورا کریں تو ثابت کرو کہ مسئلہ مذکورہ ا، ب، ج کی جگہ مقادیر ذیل کو مندرج کرنے سے بھی درست رہے گا۔

(۱) ۹۰° ـ ا/۲ ، ۹۰° ـ ب/۲ اور ۹۰° ـ ج/۲

(۲) ۱۸۰° ـ ۲ا ، ۱۸۰° ـ ۲ب اور ۱۸۰° ـ ۲ج

اس طرح مثال ۱۶ کو مثال ۶ سے اور مثال ۱۷ کو مثال ۵ سے مستنبط کرو۔

اگر لا + ما + ی = لا ما ی تو ثابت کرو کہ

۳۴۔ (۳ لا ـ لا³)/(۱ ـ ۳ لا²) + (۳ ما ـ ما³)/(۱ ـ ۳ ما²) + (۳ ی ـ ی³)/(۱ ـ ۳ ی²)

= (۳ لا ـ لا³)/(۱ ـ ۳ لا²) × (۳ ما ـ ما³)/(۱ ـ ۳ ما²) × (۳ ی ـ ی³)/(۱ ـ ۳ ی²)

اور ۳۵۔ لا(۱ ـ ما²)(۱ ـ ی²) + ما(۱ ـ ی²)(۱ ـ لا²) + ی(۱ ـ لا²)(۱ ـ ما²) = ۴ لا ما ی

۱۳۴۔ زاویوں کے مسائل جمع و تفریق کی مدد سے خاص قسم کی مثلثی معادلات حل ہو سکتی ہیں

مثال۔ مساوات ذیل کو حل کرو

جب لا + جب ۵ لا = جب ۳ لا

بموجب ضابطہ دفعہ ۱۰۰ یہ مساوات اس طرح لکھی جا

۲ جب ۳ لا جم ۲ لا = جب ۳ لا

∴ جب ۳ لا = ۰ یا ۲ جم ۲ لا = ۱

اگر جب ۳ لا = ۰ تو ۳ لا = ن π

اگر جم ۲ لا = ½ تو ۲ لا = ۲ ن π ± π/۳

اس لئے لا = ن π/۳ یا ن π ± π/۶

۱۳۵ـ جن معادلات کی صورت عامہ ا جم طہ + ب جب طہ = ج ہو، ان کا حل عام دریافت کرو۔

طرفین مساوات کو √(ا² + ب²) پر تقسیم کرو اور مساوات کو اس

ا/√(ا² + ب²) جم طہ + ب/√(ا² + ب²) جب طہ = ج/√(ا² + ب²)

مماسات کی جدول سے اُس زاویئے کی قیمت دریافت کر

مماس ب/ا ہو اور اس کو عہ سے تعبیر کرو

تب مس عہ = ب/ا اور

جب عہ = ب/√(ا² + ب²) اور جم عہ = ا/√(ا² + ب²)

مساوات بصورت ذیل بھی لکھی جا سکتی ہے

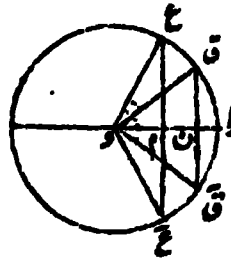
جم عہ جم طہ + جب عہ جب طہ = ج/√(ا² + ب²)

یعنی جم (طہ - عہ) = ج/√(ا² + ب²)

اس کے بعد جدولوں سے یا کسی اور طرح سے زاویہ بہ دریافت کرو
جس کی جیب التمام $\frac{ج}{\sqrt{ا^2+ب^2}}$ ہو یعنی جم بہ = $\frac{ج}{\sqrt{ا^2+ب^2}}$

[یاد رہے کہ زاویہ بہ صرف اسی صورت میں معلوم ہو سکتا ہے جبکہ ج > $\sqrt{ا^2+ب^2}$]

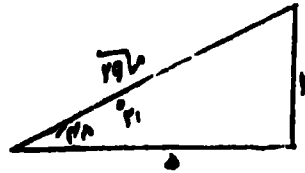
اس طرح سے مساوات مجوزہ جم(طہ - عہ) = جم بہ ہوگی
اور اس کا حل ہے طہ - عہ = ۲ ن π ± بہ
یعنی طہ = ۲ ن π + عہ ± بہ جہاں ن کوئی
صحیح عدد ہے۔ ایسے زاویے مثلاً عہ اور بہ جو مثلثی حسابات میں تسہیل
عمل کے لئے داخل کئے جاتے ہیں امدادی زاویے کہلاتے ہیں۔

۱۳۶- عمل ترسیمی سے اوپر کے حل کی توضیح اس طرح ہوسکتی ہے

خط ابتدائی پر وم برابر ا کے ناپو اور وا پر عمود م ع برابر ب کے
قائم کرو تب زاویہ م و ع کا ماس $\frac{ب}{ا}$ ہوگا اس زاویہ کو عہ سے
تعبیر کرو
و کے مرکز اور و ع مساوی $\sqrt{ا^2+ب^2}$ کے نصف قطر پر ایک دائرہ
بناؤ اور خط ابتدائی پر و ن برابر ج کے لو
و ن پر عمود ق ن قَ کھینچو اور فرض کرو کہ وہ دائرہ کو نقاط ق

اور ق پر ملتا ہے اس لئے زاویے ن و ق اور ن و قَ دونوں
جداگانہ بہ کے برابر ہیں پس زاویہ ق و ع = عہ - بہ اور قَ و ع = عہ + بہ
اس لئے مساوات کے حل بالترتیب

۲ ن π + ق و ع اور ۲ ن π + قَ و ع ہوں گے۔
صریحاً اوپر کا عمل ناممکن ہوگا اگر ج > $\sqrt{ا^2 + ب^2}$
کیونکہ اُس صورت میں نقطہ ن دائرہ کے باہر واقع ہوگا

۱۴۷ — بطور ایک عددی مثال کے ہم مساوات ذیل کو حل کریں گے

۵ جم طہ - ۲ جب طہ = ۲ ، معلوم ہے مس ۲۱° ۴۸′ = $\frac{۲}{۵}$
طرفین مساوات کو $\sqrt{۵^2 + ۲^2}$ یعنی $\sqrt{۲۹}$ پر تقسیم کرو تو حاصل ہوگا

$\frac{۵}{\sqrt{۲۹}}$ جم طہ - $\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}$ جب طہ = $\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}$

اس لئے جم طہ جم ۲۱° ۴۸′ - جب طہ جب ۲۱° ۴۸′

= جب ۲۱° ۴۸′ = جب (۹۰ - ۶۸° ۱۲′)

= جم ۶۸° ۱۲′

∴ جم (طہ + ۲۱° ۴۸′) = جم ۶۸° ۱۲′

اس لئے طہ + ۲۱° ۴۸′ = ۲ ن × ۱۸۰ ± ۶۸° ۱۲′ (دفعہ ۸۹)

∴ طہ = ۲ ن × ۱۸۰ - ۲۱° ۴۸′ ± ۶۸° ۱۲′

= ۲ن × ۱۸۰° − ۹۰° یا ۲ن × ۱۸۰° + ۴۶° ۲۴′ جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے

متبادل ثبوت مساوات دفعہ ۱۳۵ ایک اور طرح سے بھی حل ہوسکتی ہے۔

فرض کرو کہ م = مس $\frac{\text{ط}}{۲}$

پس جب ط = $\dfrac{۲\,\text{مس}\frac{\text{ط}}{۲}}{۱+\text{مس}^{۲}\frac{\text{ط}}{۲}} = \dfrac{۲\text{م}}{۱+\text{م}^{۲}}$

اور جم ط = $\dfrac{۱-\text{مس}^{۲}\frac{\text{ط}}{۲}}{۱+\text{مس}^{۲}\frac{\text{ط}}{۲}} = \dfrac{۱-\text{م}^{۲}}{۱+\text{م}^{۲}}$ (دفعہ ۱۱۵)

مساوات میں یہ قیمتیں مندرج کرنے سے اس کی صورت یہ ہو جائے گی

$$\text{ا}\,\frac{۱-\text{م}^{۲}}{۱+\text{م}^{۲}} + \text{ب}\,\frac{۲\text{م}}{۱+\text{م}^{۲}} = \text{ج}$$

یعنی م^{۲} (ج + ا) − ۲ ب م + ج − ا = ۰

یہ ایک مساوات درجہ دوم ہے جس سے م کی دو قیمتیں یعنی مس $\frac{\text{ط}}{۲}$ کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں مثلاً موافق مثال دفعہ ہذا

۷م^{۲} + ۴م − ۳ = ۰ یعنی م = −۱ یا $\frac{۳}{۷}$

= مس (−۴۵°) یا مس ۲۳° ۱۲′ (جدولوں سے)

اس لئے $\frac{\text{ط}}{۲}$ = ن × ۱۸۰° − ۴۵° یا ن × ۱۸۰° + ۲۳° ۱۲′

یعنی ط = ن × ۳۶۰° − ۹۰° یا ن × ۳۶۰° + ۴۶° ۲۴′

امثلہ نمبری ۲۱

معادلات ذیل کو حل کرو

۱۔ جب ط + جب ۷ ط = جب ۴ ط

۲۔ جم ط + جم ۷ ط = جم ۴ ط

۳۔ جم ط + جم ۳ ط = ۲ جم ۲ ط

۴۔ جب ۴ ط − جب ۲ ط = جم ۳ ط

۵۔ جم ط − جب ۳ ط = جم ۲ ط

۶۔ جب ۷ ط = جب ط + جب ۳ ط

۷۔ جم ط + جم ۲ ط + جم ۳ ط = ۰

۸۔ جب ط + جب ۳ ط + جب ۵ ط = ۰

۹۔ جب ۲ ط − جم ۲ ط − جب ط + جم ط = ۰

۱۰۔ جب (۳ ط + ع) + جب (۳ ط − ع) + جب (ع − ط) − جب (ع + ط) = جم ع

۱۱۔ جم (۳ ط + ع) جم (۳ ط − ع) + جم (۵ ط + ع) جم (۵ ط − ع) = جم ۲ ع

۱۲۔ جم ن ط = جم (ن − ۲) ط + جب ط

۱۳۔ جب $\frac{\text{ن} + ۱}{۲}$ ط = جب $\frac{\text{ن} - ۱}{۲}$ ط + جب ط

۱۴۔ جب م ط + جب ن ط = ۰

۱۵۔ جم م ط + جم ن ط = ۰

۱۶۔ جب^{۲} ن ط − جب^{۲} (ن − ۱) ط = جب^{۲} ط

۱۷۔ جب ۳ ط + جم ۲ ط = ۰

۱۸ — √۳ جم ط + جب ط = √۲

۱۹ — جب ط + جم ط = √۲

۲۰ — √۳ جب ط − جم ط = √۲

۲۱ — جب لا + جم لا = √۲ . جم ا

۲۲ — ۵ جب ط + ۲ جم ط = ۵ (معلوم ہے مس ۲۱° ۴۸′ = ۴ر)

۲۳ — ۶ جم لا + ۸ جب لا = ۹ (معلوم ہے مس ۵۳° ۸′ = ۱ ۱/۳
اور جم ۲۵° ۵۰′ = ۹ر)

۲۴ — ۱ + جب² ط = ۳ جب ط جم ط (معلوم ہے مس ۷۱° ۳۴′ = ۳)

۲۵ — قم ط = مم ط + √۳

۲۶ — قم لا = ۱ + مم لا

۲۷ — (۲ + √۳) جم ط = ۱ − جب ط

۲۸ — مس ط + قط ط = √۳

۲۹ — جم ۲ط = جم² ط

۳۰ — ۴ جم ط − ۳ قط ط = مس ط

۳۱ — جم ۲ط + ۳ جم ط = ۰

۳۲ — جم ۳ط + ۲ جم ط = ۰

۳۳ — جم ۲ط = (۱ + √۲) (جم ط − ۱/√۲)

۳۴ — قم ط - مس ط = ۲

۳۵ — ۴ قم ۲ ط = قم² ط - مس² ط

۳۶ — ۳ مس (ط - ۱۵°) = مس (ط + ۱۵°)

۳۷ — مس ط + مس ۲ ط + مس ۳ ط = ۰

۳۸ — مس ط + مس ۲ ط + √۳ مس ط مس ۲ ط = √۳

۳۹ — جب ۳ عہ = ۴ جب عہ جب (لا + عہ) جب (لا - عہ)

۴۰ — ثابت کرو کہ اگر لا کو √۲ جب ۴۵°، ۲ جب ۱۰°، ۲ جب ۲۳۴° میں سے کسی ایک قیمت کے برابر رکھا جائے تو شرائط مساوات لا³ - ۲ لا + ۱ = ۰ ہر ایک صورت میں پوری ہوں گی۔

۴۱ — اگر جب (π جم ط) = جم (π جب ط) تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم}\left(\text{ط} \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

۴۲ — اگر جب (π قم ط) = جم (π مس ط) تو ثابت کرو کہ قم ۲ ط یا مم ۲ ط مساوی ن + ¼ کے ہے، اس میں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

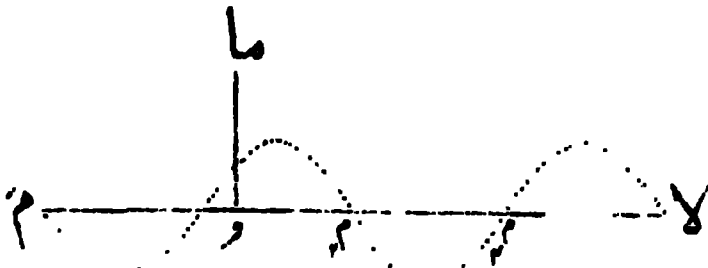
۱۳۸ — مثال۔ اگر لا صفر سے ۲π تک بڑھے تو جملہ جب لا + جم لا کے تغیرات کو مرتسم کرو۔

$$\text{جب لا} + \text{جم لا} = \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{جب لا} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{جم لا}\right]$$

$$= \sqrt{2}\left\{\text{جب لا جم}\,\frac{\pi}{4} + \text{جم لا جب}\,\frac{\pi}{4}\right\} = \sqrt{2}\,\text{جب}\left(\text{لا} + \frac{\pi}{4}\right)$$

اس طرح سے ہمکو قیمتوں کی جدول ذیل حاصل ہوگی

لا	۰	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
لا + $\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$
جب (لا + $\frac{\pi}{4}$)	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	۱	۰	۱−	۰	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\sqrt{2}$ جب (لا + $\frac{\pi}{4}$)	۱	$\sqrt{2}$	۰	$-\sqrt{2}$	۰	۱

دفعہ ۶۸ کے عمل تعبیر کے موافق جملہ مذکورہ کی ترسیم یہ ہوگی ۔

۱۳۹ ۔ مثال ۔ ا جم طہ + ب جب طہ کی مقدار اور علامت کے تغیرات کی تحقیق کرو اور جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو

$$\text{ا جم طہ + ب جب طہ} = \sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}\left[\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\text{ جم طہ} + \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\text{ جب طہ}\right]$$

فرض کرو کہ عہ چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ ایسا ہے کہ

جم طہ = $\frac{ا}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲}}$ اور جب عہ = $\frac{ب}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲}}$

اس لئے جملہ مجوزہ = $\sqrt{ا^۲ + ب^۲}$ [جم طہ جم عہ + جب طہ جب عہ]

= $\sqrt{ا^۲ + ب^۲}$ جم (طہ - عہ)

جب زاویہ طہ کی قیمت عہ سے ۲ π + عہ تک بڑھتی ہے تو زاو طہ - عہ صفر سے ۲ π تک بڑھتا ہے اور اس لئے جملہ کی مقدا اور علامت کے تغیرات بآسانی حاصل ہو سکتے ہیں۔

اب چونکہ مقدار جم (طہ - عہ) کی بڑی سے بڑی قیمت ا ہے (یعنی جب زاویہ طہ = عہ) اس لئے معلوم ہوا کہ جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت $\sqrt{ا^۲ + ب^۲}$ ہے۔

نیز ظاہر ہے کہ جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت کے موافق طہ جو قیمت ہو اس کی جیب التمام $\frac{ا}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲}}$ ہوگی

امثلہ نمبری ۲۲

جب زاویہ طہ صفر سے ۲ π تک بڑھے تو جملات ذیل کی مقدار و علامت کے تغیرات کی تحقیق کرو اور ان کی ترسیمات ہر ایک صورت میں بناؤ

۱- جب طہ - جم طہ

۲- جب طہ + $\sqrt{۳}$ جم طہ

[یاد رہے کہ جب طہ + $\sqrt{۳}$ جم طہ = ۲ [$\frac{۱}{۲}$ جب طہ + $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ جم طہ]

= ۲ جب (طہ + $\frac{π}{۳}$)]

۳- جب ط - $\sqrt{3}$ جم ط

۴- جم^{2} ط - جب^{2} ط

۵- جب ط جم ط

۶- جب ۳ ط

۷- مس ۳ ط

۸- قط ۴ ط

۹- $\dfrac{\text{جب ط + جب ۲ ط}}{\text{جم ط + جم ۲ ط}}$

۱۰- جب (π جب ط)

۱۱- جم (π جب ط)

۱۲- اگر زاویہ ۰° سے ۹۰° تک بڑھے تو جملہ $\dfrac{\text{جب ۳ ط}}{\text{جم ۲ ط}}$ کی مقدار و علامت کے تغیرات کی تحقیق کرو۔

باب دہم

لوکارتم

۱۴۰ — فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے

$$10^{2.4031205} = 253 \text{ ، } 10^{2.6095944} = 407$$

اور $10^{5.0127149} = 102971$

تو عمل ضرب کی مدد کے بغیر ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ $253 \times 407 = 102971$ کیونکہ

$$253 \times 407 = 10^{2.4031205} \times 10^{2.6095944}$$

$$= 10^{2.4031205 + 2.6095944}$$

$$= 10^{5.0127149} = 102971$$

ظاہر ہے کہ اس جگہ عمل ضرب اُس سے آسان تر عمل جمع سے تبدیل ہوگیا ہے، نیز فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے کہ

$$10^{3.9004055} = 7950.7$$

اور $10^{1.6334685} = 43$

ہم بآسانی ثابت کرسکتے ہیں کہ ۷۹۵۰۷ کا جذرالکعب ۴۳ ہے

کیونکہ $\sqrt[3]{79507} = \left[79507\right]^{\frac{1}{3}} = \left(10^{4.90040055}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= 10^{4.90040055 \times \frac{1}{3}} = 10^{1.63346685} = 43$

اس صورت میں استخراج جذر کا محال عمل آسان تر عمل تقسیم میں تبدیل ہوگیا ہے۔

۱۴۱۔ لوکارتم۔ تعریف اگر ا کوئی عدد ہو اور لا اور ن دو اور ایسے عدد ہوں کہ $ا^{لا} = ن$ تو لا کو لوکارتم ن کا اساس ا پر کہتے ہیں اور اس ربط کو اس طرح لکھتے ہیں لوک$_{ا}$ ن اس لئے کسی عدد کا لوکارتم اساس معلوم پر وہ قوت نما ہے جس کے موافق ضرور ہے کہ اساس کو اٹھایا جائے تاکہ حاصل عدد معلوم کے برابر ہوجائے۔

امثلہ چونکہ $10^{2} = 100$ اس لئے $2 = \log_{10} 100$

چونکہ $10^{5} = 100000$ اس لئے $5 = \log_{10} 100000$

چونکہ $2^{4} = 16$ اس لئے $4 = \log_{2} 16$

چونکہ $8^{\frac{2}{3}} = \left[8^{\frac{1}{3}}\right]^{2} = 2^{2} = 4$ اس لئے $\frac{2}{3} = \log_{8} 4$

چونکہ $9^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3^{3}} = \frac{1}{27}$ اس لئے $-\frac{3}{2} = \log_{9}\left(\frac{1}{27}\right)$

یادداشت چونکہ $ا^{0} = 1$ اس لئے ایک کا لوکارتم کسی اساس پر ہمیشہ صفر ہوتا ہے۔

۱۴۲- اگر م اور ن کوئی حقیقی مقادیر جبریہ ہوں تو ا قوانین ذیل جن کو قوت نماؤں کے قانون کہتے ہیں صادق آتے ہیں۔

(۱) $ا^م \times ا^ن = ا^{م+ن}$

(۲) $ا^م \div ا^ن = ا^{م-ن}$

(۳) $(ا^م)^ن = ا^{م ن}$

ان کے مطابق لوکارثموں کے تین اساسی قوانین مندرجۂ ذیل

(۱) $لوک_ا م ن = لوک_ا م + لوک_ا ن$

(۲) $لوک_ا \frac{م}{ن} = لوک_ا م - لوک_ا ن$

(۳) $لوک_ا (م^ن) = ن\ لوک_ا م$

ان کے ثبوت ذیل کی دفعات میں دیئے گئے ہیں۔

۱۴۳- دو مقداروں کے حاصل ضرب کا لوکارثم لوکارثموں کے حاصل جمع کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$لوک_ا (م ن) = لوک_ا م + لوک_ا ن$$

فرض کرو کہ $لا = لوک_ا م$ یعنی $ا^{لا} = م$

اور $ما = لوک_ا ن$ یعنی $ا^{ما} = ن$

تب $م ن = ا^{لا} \times ا^{ما} = ا^{لا+ما}$

$\therefore$ $لوک_ا م ن = لا + ما$ (دفعہ ۱۴۱ تعریف)

۱۴۴ — دو مقداروں کے خارج قسمت کا لوکارتم اُن کے لوکارتموں کے حاصل تفریق کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$لوک_{ا}\left(\frac{م}{ن}\right) = لوک_{ا} م - لوک_{ا} ن$$

فرض کرو کہ $لا = لوک_{ا} م$ یعنی $ا^{لا} = م$ (دفعہ ۱۴۱ تعریف)

اور $ما = لوک_{ا} ن$ یعنی $ا^{ما} = ن$

تب $\frac{م}{ن} = ا^{لا} \div ا^{ما} = ا^{لا - ما}$

$\therefore$ $لوک_{ا}\left(\frac{م}{ن}\right) = لا - ما$ (دفعہ ۱۴۱ تعریف)

$= لوک_{ا} م - لوک_{ا} ن$

۱۴۵ — ایک ایسی مقدار کا لوکارتم جو کسی خاص قوت پر اُٹھائی گئی ہو مساوی ہے اُس حاصلِ ضرب کے جو مقدار کے لوکارتم اور قوت نما کے باہم ضرب دینے سے حاصل ہو یعنی

$$لوک_{ا}(م^{ن}) = ن\, لوک_{ا} م$$

فرض کرو کہ $لا = لوک_{ا} م$ یعنی $ا^{لا} = م$

تب $م^{ن} = (ا^{لا})^{ن} = ا^{لان}$

$\therefore$ $لوک_{ا}(م^{ن}) = ن لا$ (دفعہ ۱۴۱ تعریف)

$= ن\, لوک_{ا} م$

امثلہ $لوک ۴۸ = لوک (۲^{۴} \times ۳) = لوک ۲^{۴} + لوک ۳ = ۴ لوک ۲ + لوک ۳$

لوک $\frac{۶۳}{۴۴۸}$ = لوک $\frac{۷ \times ۳^۲}{۲^۲ \times ۱۱^۲}$ = لوک ۷ + لوک ۳^۲ - لوک ۲^۲ - لوک ۱۱^۲

= لوک ۷ + ۲ لوک ۳ - ۲ لوک ۲ - ۲ لوک ۱۱

لوک $\sqrt[۵]{۱۳}$ = لوک ۱۳^{\frac{۱}{۵}} = $\frac{۱}{۵}$ لوک ۱۳

۱۴۶ـ **مروج لوکارتم** عملیات میں جو لوکارتم مستعمل ہیں اُن میں اساس ۱۰ مقرر ہے، پس اگر کوئی اساس بیان نہ کیا جائے تو اساس ۱۰ کو ہمیشہ محذوف خیال کرنا چاہئے، اساس ۱۰ کے فوائد دفعات ذیل سے معلوم ہوں گے۔

۱۴۷ـ **ممیز اور اعشاریہ لوکارتمی۔ تعریف** اگر کسی عدد کے لوکارتم کا کچھ حصہ صحیح اور کچھ حصہ کسور ہو تو لوکارتم کے حصہ صحیح کو **ممیز** اور حصہ اعشاریہ کو **اعشاریہ لوکارتمی** کہتے ہیں

مثلاً فرض کرو کہ لوک ۷۹۵ = ۲٫۹۰۰۳۶۷۱ تو عدد ۲ کو لوکارتم کا ممیز اور ۹۰۰۳۶۷۱ء کو اعشاریہ لوکارتمی کہیں گے۔

منفی ممیز۔ فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے کہ لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء۱ تب بموجب دفعہ ۱۴۴

لوک $\frac{۱}{۲}$ = لوک ۱ - لوک ۲ = ۰ - لوک ۲ = - ۳۰۱۰۳ء

جس سے معلوم ہوا کہ لوک $\frac{۱}{۲}$ منفی ہے

جیسا کہ دفعہ ۱۴۹ سے معلوم ہوگا اس میں خاص سہولت ہے کہ لوکارتموں کے اعشاریوں کو ہمیشہ مثبت رکھا جائے۔

اس لئے بجائے -۳۰۱۰۳ء کے ہم [۱-٫۶۹۸۹۷] لکھتے ہیں

یعنی لوک $\frac{1}{2} = -(1 - .69897) = -1 + .69897$

اختصاراً اس جملہ کو $\bar{1}.69897$ لکھتے ہیں۔

عدد ۱ کے اوپر خط افقی یہ ظاہر کرتا ہے کہ لوکارتم کا صحیح حصہ منفی ہے لیکن اعشاریہ لوکارتمی مثبت ہے۔

ایک اور مثال لو، $\bar{3}.4771213$ قائم مقام $-3 + .4771213$ کا ہے۔

۱۴۸ — کسی عدد کے لوکارتم کا ممیز صرف دیکھنے ہی سے معلوم ہوسکتا ہے۔

(۱) فرض کرو کہ عدد ایک سے بڑا ہے۔

چونکہ $10^0 = 1$ اس لئے لوک ۱ = ۰

چونکہ $10^1 = 10$ اس لئے لوک ۱۰ = ۱

چونکہ $10^2 = 100$ اس لئے لوک ۱۰۰ = ۲

اور علیٰ ہذا القیاس

اس لئے معلوم ہوا کہ جو عدد ۱ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہو اُس کا لوکارتم صفر اور ۱ کے درمیان واقع ہوگا یعنی لوکارتم ایک کسر اعشاریہ ہوگا۔

اس لئے اس کا ممیز صفر ہوگا

ایسے ہی جو عدد ۱۰ اور ۱۰۰ کے درمیان واقع ہو اُس کا لوکارتم ۱ اور ۲ کے درمیان واقع ہوگا، یعنی اس کا ممیز ایک ہوگا

اسی طرح سے جو عدد ۱۰۰ اور ۱۰۰۰ کے درمیان واقع ہو اس کا لوکارتم ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہوگا یعنی اُس کا ممیز ۲ ہوگا

ایسے ہی اگر عدد ۱۰۰۰ اور ۱۰۰۰۰ کے درمیان واقع ہو تو اُس کا میز ۳ ہوگا اور بالعموم کسی عدد کے لوکارتم کا میز اُن ہندسوں کی تعداد سے جو اس کے صحیح حصہ میں شامل ہوں بقدر ایک کے کم ہو گا

امثلہ عدد ۲۹۶٫۳۴۵۷ کے صحیح حصہ میں ۳ ہند سے ہیں اس لئے اسکے لوکارتم کا میز ۲ ہے

۲۹۶۳۴٫۵۷ کے لوکارتم کا میز ۵-۱ یعنی ۴ ہے

(۲) فرض کرو کہ عدد ایک سے کم ہے

چونکہ $10^0 = 1$ اس لئے لوک ۱ = ۰

" $10^{-1} = \frac{1}{10} = .1$ اس لئے لوک ۰٫۱ = ۱-

" $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = .01$ اسلئے لوک ۰٫۰۱ = ۲-

" $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = .001$ اسلئے لوک ۰٫۰۰۱ = ۳-

اور علیٰ ہذا القیاس

اس لئے معلوم ہوا کہ اگر عدد ۱ اور ۰٫۱ کے درمیان واقع ہو تو اس کا لوکارتم صفر اور ۱- کے درمیان واقع ہوگا، پس لوکارتم مطلوب ۱- + ایک کسر اعشاریہ، کے برابر ہوگا یعنی اس کا میز $\bar{1}$ ہوگا۔

ایسے ہی جو عدد ۰٫۱ اور ۰٫۰۱ کے درمیان واقع ہو اس کا لوکارتم ۱- اور ۲- کے درمیان واقع ہوگا اور اس لئے وہ ۲- + ایک کسر اعشاریہ کے برابر ہوگا یعنی اس کا میز $\bar{2}$ ہوگا

اسی طرح سے جو عدد ۰٫۰۱ اور ۰٫۰۰۱ کے درمیان واقع ہو اُس کا

۲- اور ۳- کے درمیان واقع ہوگا یعنی اُس کا میز ۳ ہوگا
لوم ہوا کہ کسی کسر اعشاریہ کے لوگارثم کا میز منفی ہوتا ہے اور
ت اعشاریہ کے بعد پہلے ملحوظ ہند سے تک جتنے صفر ہوں
ن سے بقدر ایک کے زیادہ ہوتا ہے۔
جو کسر ا اور اء کے درمیان واقع ہو (مثلاً ۵ء) اُس میں علامت
یہ کے بعد کوئی صفر نہیں ہو سکتا اور ہم کو معلوم ہے کہ اس کا
ہے، نیز جو کسر اء اور اوء کے درمیان واقع ہو مثلاً (۰۷ء)،
یں عین علامت اعشاریہ کے بعد ایک صفر ہوگا اور ہم
تے ہیں کہ اس کا میز ۲ ہے۔
اوء اور ا۰۰ء کے درمیان واقع ہو مثلاً (۳۰۰ء)، اس میں
علامت اعشاریہ کے بعد دو صفر ہونگے، اور ہم کو معلوم ہے
س کا میز ۳ ہے کسی اور کسر کی بھی یہ ہی کیفیت ہے۔
یہ عدد ۰۰۸۳۵ء کے لوگارثم کا میز ۳ ہے
عدد ۰۰۰۰۵۳ء کے لوگارثم کا میز ۲ ہے
عدد ۳۴۵۶۷ء کے لوگارثم کا میز ۱ ہے
۱۱- جن عددوں کی ترکیب میں وہی ہند سے شامل ہوں
کے اعشاریہ لوگارثمی وہی ہوتے ہیں۔
ں کی توضیح ایک مثال سے ہوگی۔
ض کرو کہ ہمیں معلوم ہے
لوگ ۶۶۸۱۸ = ۴۸۲۴۸۹۳۵ء۴
لوگ ۶۶۸ء۱۸ = لوگ $\frac{66818}{100}$ = لوگ ۶۶۸۱۸ - لوگ ۱۰۰ (دفعہ ۱۴۴)

= ۴٫۸۲۴۸۹۳۵ − ۲ = ۲٫۸۲۴۸۹۳۵

لوک ٫۶۶۸۱۸ = لوک $\frac{۶۶۸۱۸}{۱۰۰۰۰۰}$ = لوک ۶۶۸۱۸ − لوک ۱۰۰۰۰۰ (دفعہ ۱۴۴)

= ۴٫۸۲۴۸۹۳۵ − ۵ = $\bar{1}$٫۸۲۴۸۹۳۵

نیز لوک ۰۰۰۶۶۸۱۸٫ = لوک $\frac{۶۶۸۱۸}{۱۰^۸}$

= لوک ۶۶۸۱۸ − لوک $۱۰^۸$ = ۴٫۸۲۴۸۹۳۵ − ۸ = $\bar{4}$٫۸۲۴۸۹۳۵

اب اعداد ۶۶۸۱۸، ۶۶۸٫۱۸، ۶۶۸۱۸٫ اور ۰۰۰۶۶۸۱۸٫ میں ملحوظ ہندسے وہی ہیں صرف علامت اعشاریہ کے مقام میں فرق ہے ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اُن کی لوکارتموں میں حصہ اعشاریہ وہی ہے صرف ممیز مختلف ہیں۔

ہر ایک صورت میں ممیز کی قیمت قانون دفعہ گزشتہ کی مدد سے معلوم ہوتی ہے،

یاد رہے کہ لوکارتم کا اعشاریہ لوکارتمی ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔

۱۵۰۔ لوکارتمی جدولیں ۱ سے لیکر ۱۰۸۰۰۰ تک تمام اعداد کے لوکارتم چیمبر صاحب کی لوکارتمی جدولوں میں مندرج ہیں اور یہ قیمتیں سات مرتبہ کے اعشاریہ تک صحیح ہیں۔

طالب علم کے پاس چیمبر کی جدول یا کسی اور اچھی جدول کا ایک نسخہ موجود ہونا چاہیئے آیندہ چند بابوں میں کئی مثالیں حل کرنے میں اس کی ضرورت ہو گی۔

مقابل کے صفحہ پر چیمبر کی جدولوں سے ایک صفحہ بطور نمونہ کے منتخب کیا گیا ہے اس میں ۵۲۵۰۰ سے لیکر ۵۳۰۰۰ تک تمام اعداد صحیح کے اعشاریہ لوکارتمی مندرج ہیں۔

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	
۵۲۵۰	۱۵۹۳	۱۶۷۶	۱۷۵۸	۱۸۴۱	۱۹۲۴	۲۰۰۷	۲۰۸۹	۲۱۷۲	۲۲۵۵	۲۳۳۷	۷۲۰
۵۱	۲۴۲۰	۲۵۰۳	۲۵۸۶	۲۶۶۸	۲۷۵۱	۲۸۳۴	۲۹۱۶	۲۹۹۹	۳۰۸۲	۳۱۶۴	
۵۲	۳۲۴۷	۳۳۳۰	۳۴۱۳	۳۴۹۵	۳۵۷۸	۳۶۶۱	۳۷۴۳	۳۸۲۶	۳۹۰۹	۳۹۹۱	
۵۳	۴۰۷۴	۴۱۵۷	۴۲۳۹	۴۳۲۲	۴۴۰۵	۴۴۸۷	۴۵۷۰	۴۶۵۳	۴۷۳۵	۴۸۱۸	
۵۴	۴۹۰۱	۴۹۸۳	۵۰۶۶	۵۱۴۹	۵۲۳۱	۵۳۱۴	۵۳۹۶	۵۴۷۹	۵۵۶۲	۵۶۴۴	
۵۵	۵۷۲۷	۵۸۱۰	۵۸۹۲	۵۹۷۵	۶۰۵۸	۶۱۴۰	۶۲۲۳	۶۳۰۶	۶۳۸۸	۶۴۷۱	
۵۶	۶۵۵۳	۶۶۳۶	۶۷۱۹	۶۸۰۱	۶۸۸۴	۶۹۶۶	۷۰۴۹	۷۱۳۲	۷۲۱۴	۷۲۹۷	
۵۷	۷۳۸۰	۷۴۶۲	۷۵۴۵	۷۶۲۷	۷۷۱۰	۷۷۹۳	۷۸۷۵	۷۹۵۸	۸۰۴۱	۸۱۲۳	
۵۸	۸۲۰۶	۸۲۸۸	۸۳۷۱	۸۴۵۴	۸۵۳۶	۸۶۱۹	۸۷۰۱	۸۷۸۴	۸۸۶۶	۸۹۴۹	
۵۹	۹۰۳۲	۹۱۱۴	۹۱۹۷	۹۲۷۹	۹۳۶۲	۹۴۴۵	۹۵۲۷	۹۶۱۰	۹۶۹۲	۹۷۷۵	
۶۰	۹۸۵۷	۹۹۴۰	۰۰۲۳	۰۱۰۵	۰۱۸۸	۰۲۷۰	۰۳۵۳	۰۴۳۵	۰۵۱۸	۰۶۰۰	

۸۳	
۱	۸
۲	۱۶
۳	۲۵
۴	۳۳
۵	۴۱
۶	۴۹
۷	۵۸
۸	۶۶
۹	۷۴

عدد	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	
۵۲۴۱	۰۴۸۳	۰۵۶۶	۰۶۴۸	۰۷۳۱	۰۸۱۳	۰۸۹۶	۰۹۷۸	۱۰۶۱	۱۱۴۳	۱۲۲۶	۷۲۰
۴۲	۱۵۰۸	۱۵۹۱	۱۶۷۳	۱۷۵۶	۱۸۳۹	۱۹۲۱	۲۰۰۴	۲۰۸۶	۲۱۶۹	۲۲۵۱	
۴۳	۲۳۳۴	۲۴۱۶	۲۴۹۹	۲۵۸۱	۲۶۶۴	۲۷۴۶	۲۸۲۹	۲۹۱۱	۲۹۹۴	۳۰۷۶	
۴۴	۳۱۵۹	۳۲۴۱	۳۳۲۴	۳۴۰۶	۳۴۸۹	۳۵۷۱	۳۶۵۴	۳۷۳۶	۳۸۱۹	۳۹۰۱	
۴۵	۳۹۸۴	۴۰۶۶	۴۱۴۹	۴۲۳۱	۴۳۱۴	۴۳۹۶	۴۴۷۹	۴۵۶۱	۴۶۴۴	۴۷۲۶	
۴۶	۴۸۰۹	۴۸۹۱	۴۹۷۳	۵۰۵۶	۵۱۳۸	۵۲۲۱	۵۳۰۳	۵۳۸۶	۵۴۶۸	۵۵۵۱	
۴۷	۵۶۳۳	۵۷۱۶	۵۷۹۸	۵۸۸۱	۵۹۶۳	۶۰۴۶	۶۱۲۸	۶۲۱۰	۶۲۹۳	۶۳۷۵	
۴۸	۶۴۵۸	۶۵۴۰	۶۶۲۳	۶۷۰۵	۶۷۸۷	۶۸۷۰	۶۹۵۲	۷۰۳۵	۷۱۱۷	۷۲۰۰	
۴۹	۷۲۸۲	۷۳۶۴	۷۴۴۷	۷۵۲۹	۷۶۱۲	۷۶۹۴	۷۷۷۷	۷۸۵۹	۷۹۴۱	۸۰۲۴	
۵۰	۸۱۰۶	۸۱۸۹	۸۲۷۱	۸۳۵۳	۸۴۳۶	۸۵۱۸	۸۶۰۱	۸۶۸۳	۸۷۶۵	۸۸۴۸	

فرق	۸۲
۱	۸
۲	۱۶
۳	۲۵
۴	۳۳
۵	۴۱
۶	۴۹
۷	۵۷
۸	۶۶
۹	۷۴

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹		۸۲	
۵۲۷۱	۸۹۳۰	۹۰۱۳	۹۰۹۵	۹۱۷۷	۹۲۶۰	۹۳۴۲	۹۴۲۴	۹۵۰۷	۹۵۸۹	۹۶۷۲	۷۲۱		
۷۲	۹۷۵۴	۹۸۳۶	۹۹۱۹	۰۰۰۱	۰۰۸۳	۰۱۶۶	۰۲۴۸	۰۳۳۱	۰۴۱۳	۰۴۹۵			
۷۳	۰۵۷۸	۰۶۶۰	۰۷۴۲	۰۸۲۵	۰۹۰۷	۰۹۹۰	۱۰۷۲	۱۱۵۴	۱۲۳۷	۱۳۱۹	۷۲۲	۱	۸
۷۴	۱۴۰۱	۱۴۸۴	۱۵۶۶	۱۶۴۸	۱۷۳۱	۱۸۱۳	۱۸۹۵	۱۹۷۸	۲۰۶۰	۲۱۴۲		۲	۱۶
۷۵	۲۲۲۵	۲۳۰۷	۲۳۸۹	۲۴۷۲	۲۵۵۴	۲۶۳۶	۲۷۱۹	۲۸۰۱	۲۸۸۳	۲۹۶۶		۳	۲۵
												۴	۳۳
												۵	۴۱
۷۶	۳۰۴۸	۳۱۳۰	۳۲۱۲	۳۲۹۵	۳۳۷۷	۳۴۵۹	۳۵۴۲	۳۶۲۴	۳۷۰۶	۳۷۸۹		۶	۴۹
۷۷	۳۸۷۱	۳۹۵۳	۴۰۳۶	۴۱۱۸	۴۲۰۰	۴۲۸۲	۴۳۶۵	۴۴۴۷	۴۵۲۹	۴۶۱۲		۷	۵۷
۷۸	۴۶۹۴	۴۷۷۶	۴۸۵۸	۴۹۴۱	۵۰۲۳	۵۱۰۵	۵۱۸۸	۵۲۷۰	۵۳۵۲	۵۴۳۴		۸	۶۶
۷۹	۵۵۱۷	۵۵۹۹	۵۶۸۱	۵۷۶۳	۵۸۴۶	۵۹۲۸	۶۰۱۰	۶۰۹۲	۶۱۷۵	۶۲۵۷		۹	۷۴
۸۰	۶۳۳۹	۶۴۲۱	۶۵۰۳	۶۵۸۶	۶۶۶۸	۶۷۵۰	۶۸۳۲	۶۹۱۵	۶۹۹۷	۷۰۷۹			

عدد	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	
۵۲۸۱	۷۱۶۲	۷۲۴۴	۷۳۲۶	۷۴۰۸	۷۴۹۱	۷۵۷۳	۷۶۵۵	۷۷۳۷	۷۸۲۰	۷۹۰۲	۷۲۲
۸۲	۷۹۸۴	۸۰۶۶	۸۱۴۸	۸۲۳۱	۸۳۱۳	۸۳۹۵	۸۴۷۷	۸۵۵۹	۸۶۴۲	۸۷۲۴	
۸۳	۸۸۰۶	۸۸۸۸	۸۹۷۱	۹۰۵۳	۹۱۳۵	۹۲۱۷	۹۲۹۹	۹۳۸۲	۹۴۶۴	۹۵۴۶	
۸۴	۹۶۲۸	۹۷۱۰	۹۷۹۲	۹۸۷۵	۹۹۵۷	۰۰۳۹	۰۱۲۱	۰۲۰۳	۰۲۸۶	۰۳۶۸	
۸۵	۰۴۵۰	۰۵۳۲	۰۶۱۴	۰۶۹۶	۰۷۷۹	۰۸۶۱	۰۹۴۳	۱۰۲۵	۱۱۰۷	۱۱۸۹	۷۲۳
۸۶	۱۲۷۲	۱۳۵۴	۱۴۳۶	۱۵۱۸	۱۶۰۰	۱۶۸۲	۱۷۶۵	۱۸۴۷	۱۹۲۹	۲۰۱۱	
۸۷	۲۰۹۳	۲۱۷۵	۲۲۵۷	۲۳۴۰	۲۴۲۲	۲۵۰۴	۲۵۸۶	۲۶۶۸	۲۷۵۰	۲۸۳۲	
۸۸	۲۹۱۴	۲۹۹۶	۳۰۷۹	۳۱۶۱	۳۲۴۳	۳۳۲۵	۳۴۰۷	۳۴۸۹	۳۵۷۱	۳۶۵۳	
۸۹	۳۷۳۶	۳۸۱۸	۳۹۰۰	۳۹۸۲	۴۰۶۴	۴۱۴۶	۴۲۲۸	۴۳۱۰	۴۳۹۳	۴۴۷۵	
۹۰	۴۵۵۷	۴۶۳۹	۴۷۲۱	۴۸۰۳	۴۸۸۵	۴۹۶۷	۵۰۴۹	۵۱۳۱	۵۲۱۳	۵۲۹۶	

فرق	
	۸۲
۱	۸
۲	۱۶
۳	۲۵
۴	۳۳
۵	۴۱
۶	۴۹
۷	۵۷
۸	۶۶
۹	۷۴

۵۳۹۱	۵۳۷۸	۵۴۶۰	۵۵۴۲	۵۶۲۴	۵۷۰۶	۵۷۸۸	۵۸۷۰	۵۹۵۲	۶۰۳۴	۶۱۱۶	۷۲۳
۹۲	۶۱۹۸	۶۲۸۰	۶۳۶۲	۶۴۴۵	۶۵۲۷	۶۶۰۹	۶۶۹۱	۶۷۷۳	۶۸۵۵	۶۹۳۷	
۹۳	۷۰۱۹	۷۱۰۱	۷۱۸۳	۷۲۶۵	۷۳۴۷	۷۴۲۹	۷۵۱۱	۷۵۹۳	۷۶۷۵	۷۷۵۷	
۹۴	۷۸۳۹	۷۹۲۱	۸۰۰۳	۸۰۸۵	۸۱۶۷	۸۲۵۰	۸۳۳۲	۸۴۱۳	۸۴۹۶	۸۵۷۸	
۹۵	۸۶۶۰	۸۷۴۲	۸۸۲۴	۸۹۰۶	۸۹۸۸	۹۰۷۰	۹۱۵۲	۹۲۳۴	۹۳۱۶	۹۳۹۸	
۹۶	۹۴۸۰	۹۵۶۲	۹۶۴۴	۹۷۲۶	۹۸۰۸	۹۸۹۰	۹۹۷۲	۰۰۵۴	۰۱۳۶	۰۲۱۸	
۹۷	۰۳۰۰	۰۳۸۲	۰۴۶۴	۰۵۴۶	۰۶۲۸	۰۷۱۰	۰۷۹۲	۰۸۷۴	۰۹۵۶	۱۰۳۸	۷۲۳
۹۸	۱۱۲۰	۱۲۰۲	۱۲۸۴	۱۳۶۵	۱۴۴۷	۱۵۲۹	۱۶۱۱	۱۶۹۳	۱۷۷۵	۱۸۵۷	
۹۹	۱۹۳۹	۲۰۲۱	۲۱۰۳	۲۱۸۵	۲۲۶۷	۲۳۴۹	۲۴۳۱	۲۵۱۳	۲۵۹۵	۲۶۷۷	
۵۴۰۰	۲۷۵۹	۲۸۴۱	۲۹۲۳	۳۰۰۵	۳۰۸۶	۳۱۶۸	۳۲۵۰	۳۳۳۲	۳۴۱۳	۳۴۹۶	

۸۲	
۱	۸
۲	۱۶
۳	۲۵
۴	۳۳
۵	۴۱
۶	۴۹
۷	۵۷
۸	۶۶
۹	۷۴

۱۸۱۔ فرض کرو ہمیں ۵۲۶۸۷ کا لوکارتم مطلوب ہے۔ جدول کے دائیں طرف سب سے پہلے خانے میں اوپر سے نیچے کی طرف دیکھتے جاؤ اور عدد ۵۲۶۸ کو تلاش کرو، جب یہ عدد ملجائے تو عین اس مقام سے افقی سطر میں بائیں طرف دیکھتے جاؤ جب تک کہ نوبت اُس خانے کی نہ آجائے جس کے سر پر سب سے اوپر عدد ۷ لکھا ہوا ہے، اس خانے میں ہم کو عدد ۵۳۵ ۰ ۷ ملے گا اس سے ہم کو یہ معلوم ہوا کہ ۵۲۶۸۷ کا متعلقہ عدد جدول میں ۷۲۱۷۰۳۵ ہے لیکن اس عدد میں صرف اعشاریہ لوکارتمی کے ہند سے شامل ہیں یعنی اعشاریہ لوکارتمی مطلوب ۰۳۵ ۷۲۱۷ ۔ ہے، لیکن ۵۲۶۸۷ کا ممیز ۴ ہے اس لئے

لوک ۵۲۶۸۷ = ۴٫۷۲۱۷۰۳۵

پس لوک ۵٫۲۶۸۷ = آ٫۷۲۱۷۰۳۵

اور لوک ۰٫۰۰۵۲۶۸۷ = $\bar{۳}$٫۷۲۱۷۰۳۵

اگر ۵۲۷۲۵ کا لوکارتم مطلوب ہو تو طالب علم کو چاہیئے کہ جدول کے دائیں طرف پہلے خانہ میں اوپر سے نیچے کی طرف دیکھتا جائے جب تک کہ عدد ۵۲۷۲ کی نوبت نہ آجائے اس کے بعد افقی سطر میں بائیں طرف اُس خانے تک دیکھتا جائے جس کے راس پر ۵ لکھا ہوا ہے، وہاں اُس کو عدد $\overline{۰۱۹۹}$ لکھا ہوا ملے گا، ان ہندسوں پر خط افقی کا یہ مطلب ہے کہ ان کے ماقبل ۲۲ ۷ لکھنا چاہیئے نہ کہ ۷۲۱، اس سے معلوم ہوا کہ عدد ۵۲۷۲۵ کے متعلق اعشاریہ لوکارتمی ۷۲۲۰۱۹۹ ۔ ہے۔

نیز عدد ۵۲۷۲۵ کا میزہ ۴ ہے

اس لئے لوک ۵۲۷۲۵ = ۴٫۷۲۲۰۱۶۶

پس لوک ۰٫۰۵۲۷۲۵ = ۲̄٫۷۲۲۰۱۶۶

اب ہم چند عددی مثالیں حل کریں گے جن سے عملی حسابات میں لوکارثم کے استعمال کی صلاحیت واضح ہوگی

۱۵۲- مثال ۱- $\sqrt[5]{\text{۲۳٫۴}}$ کی قیمت دریافت کرو

فرض کرو کہ لا = $\sqrt[5]{\text{۲۳٫۴}}$ = $(\text{۲۳٫۴})^{\frac{1}{5}}$

یعنی لوک لا = $\frac{1}{5}$ لوک (۲۳٫۴) ... دفعہ ۱۳۵

اب جدول لوکارثمی میں عدد ۲۳۴ کے محاذی ہم کو اُس کا لوکارثم ۳۶۹۲۱۵۹ لکھا ہوا ملے گا۔

اس لئے لوک ۲۳٫۴ = ۱٫۳۶۹۲۱۵۹

اس لئے لوک لا = $\frac{1}{5}$ [۱٫۳۶۹۲۱۵۹] = ۰٫۲۷۳۸۴۳۲

نیز لوکارثم ۲۷۳۸۴۳۲ کے متعلق جدول سے عدد ۱۸۷۸۶۴ ملے گا پس

لوک ۱٫۸۷۸۶۴ = ۰٫۲۷۳۸۴۳۲

∴ لا = ۱٫۸۷۸۶۴

مثال ۲- $\dfrac{(\text{۶٫۴۵})^{3} \times \sqrt[3]{\text{٫۰۰۰۳۴}}}{(\text{۹٫۳۷})^{2} \times \sqrt[4]{\text{۸٫۹۳}}}$ کی قیمت دریافت کرو

فرض کرو کہ لا قیمت مطلوبہ ہے اس لئے بموجب دفعات ۱۳۴ اور ۱۳۵

لوک لا = لوک $(\text{۶٫۴۵})^{3}$ + لوک $(\text{٫۰۰۰۳۴})^{\frac{1}{3}}$ - لوک $(\text{۹٫۳۷})^{2}$ - لوک $(\text{۸٫۹۳})^{\frac{1}{4}}$

= ۳ لوک (۶٫۴۵) + $\frac{1}{3}$ لوک (٫۰۰۰۳۴) - ۲ لوک (۹٫۳۷) - $\frac{1}{4}$ لوک (۸٫۹۳)

اب جدولوں سے معلوم ہوگا کہ

عدد ۶۲۵ کے محاذی لوکارتم ۸۰۹۵۵۹۷ ہے

,, ۳۴ ,, ,, ۵۳۱۴۷۸۹ ,,

,, ۹۳۷ ,, ,, ۹۷۱۷۳۹۶ ,,

,, ۸۹۳ ,, ,, ۹۵۰۸۵۱۵ ,,

اس لئے

لوک لا = (۳̄،۵۳۱۴۷۸۹) ۱/۳ + ،۸۰۹۵۵۹۷ × ۳

،۹۵۰۸۵۱۵ × ۱/۴ − ،۹۷۱۷۳۹۶ × ۲ −

لیکن (۲،۵۳۱۴۷۸۹ + ۶̄) ۱/۳ = (۳̄،۵۳۱۴۷۸۹) ۱/۳

،۸۴۳۸۲۶۳ + ۲̄ =

اس لئے لوک لا = [،۸۴۳۸۲۶۳ + ۲̄] + ۲،۴۲۸۶۷۹۱

،۲۳۷۷۱۲۹ − ۱،۹۴۳۴۷۹۲ −

۴،۱۸۱۱۹۲۱ − ۳،۲۷۲۵۰۵۴ =

۴،۱۸۱۱۹۲۱ − ۴،۲۷۲۵۰۵۴ + ۱̄ =

۱̄،۰۹۱۴۱۳۳ =

جدولوں سے عدد ۱۲۳۴۰ کے مقابل لوکارتم ۰۹۱۳۱۵۲ لکھا ہوا ملے گا

پس

لوک ۱،۲۳۴۰ = ۱̄،۰۹۱۳۱۵۲

اس لئے لوک لا = لوک ،۱۲۳۴۰ تقریباً

اور اس لئے لا = ،۱۲۳۴۰ تقریباً

جب کسی عدد کا لوکارتم جدول کے کسی لوکارتم کے بالکل مطابق نہ ہو لیکن دو متصل لوکارتموں کے درمیان واقع ہو تو اس صورت میں بھی عدد

ہو سکتا ہے اس کا بیان اگلے باب میں ہوگا۔

مثال ۳۔ معلوم ہے لوگ ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳

عدد ۲^{۶۷} میں ہندسوں کی تعداد اور ۲$^{-۳۷}$ میں پہلے ملحوظ ہندسے کا مقام دریافت کرو۔

لوگ ۲^{۶۷} = ۶۷ × لوگ ۲ = ۶۷ × ۰٫۳۰۱۰۳ = ۲۰٫۱۶۹۰۱

چونکہ ۲^{۶۷} کے لوکارتم کا ممیز ۲۰ ہے اس لئے بموجب دفعہ ۱۴۸ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ۲^{۶۷} میں ۲۱ ہندسے ہیں

نیز لوگ ۲$^{-۳۷}$ = −۳۷ لوگ ۲ = −۳۷ × ۰٫۳۰۱۰۳

= −۱۱٫۱۳۸۱۱ = $\overline{۱۲}$٫۸۶۱۸۹

اس لئے بموجب دفعہ ۱۴۸ ء ۲$^{-۳۷}$ میں علامت اعشاریہ کے بعد ۱۱ صفر ہیں؛ اس سے معلوم ہوا کہ پہلا ملحوظ ہندسہ کسر اعشاریہ میں بارہویں مقام پر ہے۔

مثال ۴۔ معلوم ہے لوگ ۳ = ۰٫۴۷۷۱۲۱۳،

لوگ ۷ = ۰٫۸۴۵۰۹۸۰ اور لوگ ۱۱ = ۱٫۰۴۱۳۹۲۷

مساوات ۳^{لا} × ۷$^{۲لا+۱}$ = ۱۱$^{لا+۵}$ کو حل کرو

طرفین کے لوکارتم لینے سے حاصل ہوگا

لوگ ۳^{لا} + لوگ ۷$^{۲لا+۱}$ = لوگ ۱۱$^{لا+۵}$

∴ لا لوگ ۳ + (۲لا + ۱) لوگ ۷ = (لا + ۵) لوگ ۱۱

∴ لا [لوگ ۳ + ۲ لوگ ۷ − لوگ ۱۱] = ۵ لوگ ۱۱ − لوگ ۷

∴ لا = $\dfrac{\text{۵ لوگ ۱۱ − لوگ ۷}}{\text{لوگ ۳ + ۲ لوگ ۷ − لوگ ۱۱}}$

= $\dfrac{\text{۵٫۲۰۶۹۶۳۵ − ۰٫۸۴۵۰۹۸۰}}{\text{۰٫۴۷۷۱۲۱۳ + ۱٫۶۹۰۱۹۶۰ − ۱٫۰۴۱۳۹۲۷}}$

۳٫۸۷.... = $\frac{۴٫۳۶۱۸۶۵۵}{۱٫۱۲۵۹۴۳۶}$

۱۵۳ـ ثابت کرو کہ

لوک$_{ا}$ م = لوک$_{ب}$ م × لوک$_{ا}$ ب

فرض کرو کہ لوک$_{ا}$ م = لا یعنی ا^{لا} = م

نیز فرض کرو کہ لوک$_{ب}$ م = ما یعنی ب^{ما} = م

∴ ا^{لا} = ب^{ما}

اس لئے لوک$_{ا}$ (ا^{لا}) = لوک$_{ا}$ (ب^{ما})

∴ لا = ما لوک$_{ا}$ ب (دفعہ ۱۴۵)

اس لئے لوک$_{ا}$ م = لوک$_{ب}$ م × لوک$_{ا}$ ب.

اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ جب کسی عدد کا لوکارتم اساس ب پر معلوم ہو تو مسئلہ مندرجہ بالا کی اعانت سے ہم اُسی عدد کا لوکارتم کسی اور اساس ا پر دریافت کر سکتے ہیں، اگلے باب سے معلوم ہوگا کہ لوکارتموں کو بلا واسطہ اساس ۱۰ کے موافق نہیں نکالنا چاہیئے بلکہ اس میں زیادہ سہولت ہے کہ ان کو سب سے اول ایک اور اساس کے موافق نکالا جائے اور پھر اس مسئلہ کی مدد سے انکو اساس ۱۰ میں منتقل کر دیا جائے۔

امثلہ نمبری ۲۳

۱۔ اگر لوک ۴ = ۶۰۲۰۶ء۰ اور لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء۰

تو ۸ء، ۰۰۳ء، ۱۰۸ء۰ اور $(۰۰۰۱۸ء)^{\frac{۱}{۴}}$ کے لوکارتم دریافت کرو

۲۔ معلوم ہے لوک ۱۱ = ۰۴۱۳۹۲۷ء۱ اور لوک ۱۳ = ۱۱۳۹۴۳۴ء۱،

مفصلہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو

(۱) لوک ۱۴۳ء۱ (۲) لوک ۱۴۳ء۱ (۳) لوک $\sqrt[۳]{۱۴۳}$ اور

(۴) لوک $\sqrt[۳]{\overline{۰۰۱۶۹ء}}$

۳۔ ۳۳۱ء۷، ۰۱۵۳ء، ۲۸۷۱۳ء۲، ۰۰۰۵۷ء، ۰۲۳ء۳،

$\sqrt[۵]{۲۴۶۱۵}$ اور $(۲۴۵۸۹)^{\frac{۲}{۳}}$ کے لوکارتموں کے مینز دریافت کرو

۴۔ عدد ۰۰۳ء کا پانچواں جذر دریافت کرو

معلوم ہے لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء اور

لوک ۶۳۱۲۹۳ء = ۵ء۴۹۵۴۲۴۳

۵۔ مفصلہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو

(۱) $۷^{\frac{۱}{۷}}$ (۲) $(۸۴)^{\frac{۲}{۵}}$ اور (۳) $(۰۲۱ء)^{\frac{۱}{۵}}$

معلوم ہے لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰ء، لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء

لوک ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰ء، لوک ۱۳۲۰۵۷ = ۵ء۱۲۰۷۲۸۳

لوک ۵۸۸۴۵۳ = ۵ء۷۶۹۷۱۱۷ اور لوک ۴۶۱۷۹۱ = ۵ء۶۶۴۴۳۸

۶۔ معلوم ہے لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء

مفصلہ ذیل میں ہندسوں کی تعداد دریافت کرو

(۱) $۳^{۴۳}$ (۲) $۳^{۲۷}$ اور (۳) $۳^{۶۲}$

اور اعداد ذیل میں پہلے ملحوظ ہندسے کا مقام دریافت کرو

(۴) $۳^{-۱۳}$ (۵) $۳^{-۴۳}$ اور (۶) $۳^{-۶۵}$

۷۔ معلوم ہے لوک ۲ = ء۳۰۱۰۳، لوک ۳ = ء۴۷۷۱۲۱۳

اور لوک ۷ = ء۸۴۵۰۹۸۰

معادلات ذیل کو حل کرو۔

(۱) $۲^{\text{لا}} \times ۳^{\text{لا}+۴} = ۷^{\text{لا}}$

(۲) $۲^{۲\text{لا}+۱} \times ۳^{۳\text{لا}+۲} = ۷^{۳\text{لا}}$

(۳) $۷^{۲\text{لا}} \div ۲^{\text{لا}-۴} = ۳^{۲\text{لا}-۷}$

(۴) $\begin{cases} ۷^{\text{لا}+۱} \times ۳^{۲\text{لا}+۱} = ۹ \\ ۳^{\text{لا}-۱} \div ۲^{۲\text{لا}-۱} = ۳^{\text{لا}} \end{cases}$

۸۔ جدولوں کی مدد سے ء۰۰۰۰۲۶۷۵۱ کا ساتواں جذر دریافت کرو

لوکارتمی جدولوں کی مدد سے مفصلہ ذیل کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو

۹۔ $\sqrt[۳]{۶۴۵ء۳}$ ۱۰۔ $\sqrt[۵]{۸۲۳۵۷}$

۱۱۔ $\dfrac{\sqrt[۳]{۷} \times \sqrt{۵}}{\sqrt[۵]{۹} \times \sqrt[۴]{۸}}$ ۱۲۔ $\sqrt[۳]{\dfrac{۸ء۳ \times ۷ء۲}{۱۶ء۵ \div ۹ء۴}}$

۱۳۔ $\sqrt{\dfrac{۱۱^{\frac{۲}{۳}} \times ۸^{\frac{۱}{۲}}}{\sqrt[۵]{۶۲}\ \sqrt[۴]{۷۴}}}$

جملات ذیل کی ترسیمات کھینچو ۱۴۔ لوک لا ۱۵۔ لوک جب لا

۱۶۔ لوک جم لا ۱۷۔ لوک مس لا

۱۸۔ لوک قم لا ۱۹۔ لوک ظم لا

باب یازدہم

لوکارتموں اور مثلثی نسبتوں کی جدولیں

اصول اجزائے متناسب

۱۵۴- اوپر اس کا ذکر آچکا ہے کہ ا سے لیکر ۱۰۸۰۰۰ تک تمام اعداد کے لوکارتم چمبر صاحب کی جداول حسابیہ میں مندرج ہیں مثلاً اعداد ۴۵۸۳۷ اور ۴۵۸۴۷ کے لوکارتم بلا واسطہ اُن جدولوں سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

مگر فرض کرو کہ ہمیں ایک ایسے عدد کا لوکارتم مطلوب ہے جو ان دو عددوں کے درمیان واقع ہے مثلاً ایک ایسا عدد ۴۵۸۳۷۴ ہے۔ اس عدد کا لوکارتم معلوم کرنے کے لئے ہم اصول اجزائے متناسب سے مدد لیتے ہیں جس کا مطلب یہ ہے کہ کسی عدد کے لوکارتم کی افزائش خود اُس عدد کی افزائش کے متناسب ہوتی ہے۔

مثلاً جدولوں سے حاصل ہوگا

لوگ ۴۵۸۳۷ = ۴۶۶۱۲۳۹۸۷ .... (۱)

اور لوک ۷۴۵۸۴ = ۴٫۸۷۲۶۴۵۷ ....

اب مقدار لوک ۷۴۵۸۳٫۳ صریحاً لوک ۷۴۵۸۳ و لوک ۷۴۵۸۴ کے درمیان واقع ہوگی۔

فرض کرو کہ لوک ۷۴۵۸۳٫۳ = لوک ۷۴۵۸۳ + لا

= ۴٫۸۷۲۶۳۹۸ + لا ....

(۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ جب عدد کی زیادتی ایک ہو تو لوک کی زیادتی ٫۰۰۰۰۰۵۹ ہوتی ہے۔

اب مسئلہ اجزائے متناسب کا منشا یہ ہے کہ عدد کی زیادتی ۳٫ واسطے لوکارتم کی زیادتی ٫۳ × ٫۰۰۰۰۰۵۹ یعنی ٫۰۰۰۰۰۱۷۷

اس لئے لوک ۷۴۵۸۳٫۳ = ۴٫۸۷۲۶۳۹۸ + ۷۷

= ۴٫۸۷۲۶۴۱۵۷

۱۵۵۔ بطور ایک اور مثال کے ہم لوک ٫۰۳۸۲۷۵۷ قیمت دریافت کریں گے اور عمل کو ایک مختصر صورت میں دیں گے۔

جدولوں سے حاصل ہوگا۔

لوک ٫۰۳۸۲۷۵ = ۲̄٫۵۸۲۹۱۵۲

لوک ٫۰۳۸۲۷۶ = ۲̄٫۵۸۲۹۲۶۵

اسلئے فرق متعلقہ ٫۰۰۰۰۰۱ = ٫۰۰۰۰۱۱۳

" " ٫۰۰۰۰۰۰۷ = ٫۷ × ٫۰۰۰۰۱۱۳

= ٫۰۰۰۰۰۷۹۱

∴ لوک ٫۰۳۸۲۷۵۷ = ۲̅٫۵۸۲۹۱۵۲

+ ٫۰۰۰۰۰۷۹۱

= ۲̅٫۵۸۲۹۲۳۱۱

اب چونکہ ہمیں صرف سات مرتبہ کے اعشاریہ تک لوکارتموں کی ضرورت ہے اس لئے ہم آخری ہندسے کو حذف کرتے ہیں
پس جواب مطلوب ۲̅٫۵۸۲۹۲۳۱ ہے

۱۵۶ - اوپر کے سوال کا عکس یہ ہے "ایک عدد کا لوکارتم معلوم ہے وہ عدد دریافت کرو" اکثر عملی حسابات میں اس سوال کا حل مطلوب ہوتا ہے۔

اب اگر دیا ہوا لوکارتم جدول میں موجود ہو تو عدد بآسانی حاصل ہو سکتا ہے مگر جب ایسا نہ ہو تو طریق عمل کی توضیح امثلہ ذیل سے ہوگی۔

ایک عدد کا لوکارتم ۲٫۶۲۸۳۹۲۴ ہے اُس کو معلوم کرو
جدولوں میں تلاش کرنے سے معلوم ہوگا کہ لوکارتم ۶۲۸۳۹۲۴ جدول میں موجود نہیں، لیکن اس کے قریب ترین لوکارتم ۶۲۸۳۸۸۹ اور ۶۲۸۳۹۹۱ موجود ہیں اور ان کے درمیان لوکارتم معلوم واقع ہے۔

پس لوک ۴۲۵٫۰۰ = ۲٫۶۲۸۳۸۸۹ ....(۱)

اور لوک ۴۲۵٫۰۱ = ۲٫۶۲۸۳۹۹۱ ....(۲)

فرض کرو کہ لوک (۴۲۵٫۰۰ + لا) = ۲٫۶۲۸۳۹۲۴ ....(۳)

(۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ عدد کے فرق ٫۰۱ کے مطابق لوکارتم کا فرق ٫۰۰۰۰۱۰۲ ہے۔

نیز (۱) اور (۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ عدد کے فرق لا کے مطابق لوکارتم کا فرق ۳۵۰۰۰۰۰ء ہے۔
اس لئے ہمیں حاصل ہوگا

لا : ۰۱ء = ۳۵۰۰۰۰ء : ۱۰۲۰۰۰۰ء

∴ لا = $\frac{۳۵}{۱۰۲}$ × ۰۱ء = $\frac{۳۵ء}{۱۰۲}$ = ۰۰۳۴۳ء تقریباً

اس لئے عدد مطلوب = ۴۲۵ء۰۰ + ۰۰۳۴۳ء = ۴۲۵ء۰۰۳۴۳

۱۵۷۔ جب لوکارتموں کو جدولوں سے لیا جائے تو متصل لوکارتموں کو ایک دوسرے سے منفی کرنیکی محنت سے ہم اس طرح بچ سکتے ہیں۔

صفحات ۲۱۳ تا ۲۱۷ کے دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ بائیں طرف کے آخری خانے کے سر پر فرق لکھا ہوا ہے اور سب سے اوپر عدد ۸۲ ہے، اس کا یہ مطلب ہے کہ صفحہ مذکورہ پر جو اعداد ہیں اگر ان کا فرق ایک ہو تو ان کے متعلقہ لوکارتموں کا فرق ۸۲۰۰۰۰ء ہوتا ہے کیونکہ عدد ۸۲ دراصل قائم مقام ۸۲۰۰۰۰ء کا ہے ۸۲ کے نیچے متواتر سطروں میں ۱ء، ۲ء،...... کے متعلقہ فرق دئے ہوئے ہیں مثلاً پانچویں سطر میں ۵ء کے مطابق فرق ۴۱۰۰۰۰ء ہے۔

بطور ایک مثال کے ۵۲۷۴۶ء۷۴ کا لوکارتم دریافت کرو

صفحہ (۲۱۵) پر لوگ ۵۲۷۴۶ = ۴ء۷۲۲۱۸۹۵

فرق ۷ء کے لئے = ۵۷۰۰۰۰ء

فرق ۴۰ء کے لئے

(= $\frac{1}{10}$ × فرق متعلقہ ۴) = ۳ ۰۰۰۰۰ ء۰

∴ لوک ۴ ء۷۴۶۳۷ = ۵۲۷۴۶۳۷۴ = ۵۵۹۱۲۲۷ء۴۳

اب ہم دو اور مثالیں حل کریں گے جن میں تمام لوگارتم جدولوں سے لئے جائیں گے اور صرف ضروری عمل مندرج ہوگا۔

مثال ۱۔ ۰۳۴۵۷۴ء۰ کا ساتواں جذر دریافت کرو۔

فرض کرو کہ لا مقدار مطلوبہ ہے تب

لوک لا = $\frac{1}{7}$ لوک (۰۳۴۵۷۴ء۰) = $\frac{1}{7}$ (۴۹۶۷۳۸۵ء$\bar{2}$)

= $\frac{1}{7}$ ($\bar{7}$ + ۴۹۶۷۳۸۵ء۵)

∴ لوک لا = ۷۹۱۲۴۹۹ء$\bar{1}$

لیکن لوک ۶۱۸۳۷ء = ۷۹۱۲۴۸۴ء$\bar{1}$

فرق = ۰۰۰۰۰۱۵ء

لیکن فرق ۰۰۰۱ء کیلئے = ۰۰۰۰۰۷۱ء

اسلئے مطلوبہ زیادتی = ۰۰۰۰۰۲۱۱ء

اس لئے لا = ۶۱۸۳۷۲۱۱ء

۷۱) ۱۵۰ (۲۱۱
۱۴۲
۸۰
۷۱
۹۰
۷۱
۱۹

مثال ۲۔ اگر ا = ۳۴۵۶۲ء۷۳ اور ب = ۲۸۳۴۷ء۹۱۲ تو $ا^2 - ب^2$ کے جذر المربع کی قیمت دریافت کرو۔

اگر لا مقدار مطلوبہ ہو تو ۲ لوک لا = لوک ($ا^2 - ب^2$)

= لوک (ا - ب) + لوک (ا + ب) = لوک ۶۲۱۴ء۸۱۸ + لوک ۶۲۹۱۰ء۶۴۲

اب لوک ۶۲۱۴ء۸ = ۷۹۳۴۲۷۲ء۳
۱ = ۷
۸ = ۵۶

اس لئے لوک ۶۲۱۴ء۸۱۸ = ۷۹۳۴۲۸۴۶ء۳

لوک ۶۲۹۱٫۰۰۰ =	۳٫۷۹۸۷۱۹۷
۶	۴۱
۴	۲۸
۲	۱۴

لوک ۶۲۹۱٫۰۶۴۲ = ۳٫۷۹۸۷۲۳۰۹۴

اسلئے جمع کرنے سے ۲ لوک لا = ۸٫۵۹۲۱۵۲۵۵۴

اس لئے لوک لا = ۴٫۲۹۶۰۷۶۳

لیکن لوک ۱۹۷۷۳ = ۴٫۲۹۶۰۷۲۶

∴ فرق = ۳۷

لیکن فرق ۱ کے لئے = ۲۲۰

اسلئے متناسب زیادتی = $\frac{۳۷}{۲۲۰}$ × ۱ = ٫۱۶۸

∴ لا = ۱۹۷۷۳٫۱۶۸

۱۵۸۔ اس جگہ اصول اجزائے متناسب کا ثبوت نہیں دیا جائے گا، یہ اصول صرف بعض حدود کے درمیان صحیح ہے اس کا استعمال صرف اُن عددوں کی صورت میں ہو سکتا ہے جن میں پانچ سے کم ملحوظ ہندسے نہ ہوں اور اس پر بھی ہم اپنے نتائج کی صحت کا صرف پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک اعتبار کر سکتے ہیں۔

مثلاً ہم کو یہ اصول لوک ۲ اور لوک ۳ کی قیمتوں سے لوک ۲٫۵ کی قیمت حاصل کرنے میں نہیں استعمال کرنا چاہیئے کیونکہ اگر ہم ایسا کریں تو چونکہ لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳ اور لوک ۳ = ٫۴۷۷۱۲۱۳ اس لئے لوک ۲٫۵ کی قیمت اس طرح سے ٫۳۸۹۰۷۵ ہوگی

اگر جدولوں میں لوک ۲٫۵ کی قیمت ٫۳۹۷۹۴۰۰ مندرج ہے اس لئے معلوم ہوا کہ اس طرح جو قیمت حاصل ہوگی وہ غلط ہوگی۔

مثلثی نسبتوں کی جدولیں

۱۵۹۔ چمبر کی جدولوں میں اُن سب زاویوں کی مثلثی نسبتیں مندرج ہیں جو ۰° اور ۴۵° کے درمیان واقع ہوں اور ان میں متواتر زاویوں کا فرق ۱′ ہے۔

اب چونکہ ۴۵° اور ۹۰° کے درمیان جو زاوئے واقع ہوں اُنکی مثلثی نسبتیں اُن زاویوں کی نسبتوں میں تحویل ہو سکتی ہیں جو ۰° اور ۴۵° کے درمیان واقع ہوں (دفعہ ۸۱) اس لئے معلوم ہوا کہ جو زاوئے ۴۵° اور ۹۰° کے درمیان واقع ہوں اُن کی مثلثی نسبتوں کی جدولوں کو جداگانہ مرتب کرنے کی ضرورت نہیں مثلاً

[جب ۷۶° ۱۱′ = جب (۹۰° − ۱۳° ۴۹′) = جم ۱۳° ۴۹′ اس لئے جیب مجوزہ معلوم ہو سکتی ہے]

اس قسم کی جدولوں کو لوگارتمی جیوب، جیوب التمام وغیرہ کی جدولوں سے تمیز کرنے کے لئے ان کو طبعی جیوب، جیوب التمام کی جدولیں کہتے ہیں۔

اگر ایک ایسے زاوئے کی جیب مطلوب ہو جس میں صرف درجوں اور دقیقوں کی صحیح تعداد شامل ہو تو وہ جدولوں سے

حاصل ہوسکتی ہے لیکن اگر زاوئے میں ثانئے بھی موجود ہوں تو اُس صورت میں ہمیں اصول اجزائے متناسب سے مدد لینی چاہیئے۔

مثال ۱۔ معلوم ہے جب ۲۹° ۱۴َ = .۴۸۸۳۶۷۴

اور جب ۲۹° ۱۵َ = .۴۸۸۶۲۱۲

جب ۲۹° ۱۴َ ۳۲ً کی قیمت دریافت کرو

تفریق کرنے سے حاصل ہوگا

جیب کا فرق ۱َ کے لئے = .۰۰۰۲۵۳۸

اس لئے جیب کا فرق ۳۲ً کے لئے = $\frac{۳۲}{۶۰}$ × .۰۰۰۲۵۳۸

= .۰۰۰۱۳۵۳۶

∴ جب ۲۹° ۱۴َ ۳۲ً = .۴۸۸۳۶۷۴

+ .۰۰۰۱۳۵۳۶

= .۴۸۸۵۰۲۷۶

چونکہ ہمیں صرف سات مرتبہ کے اعشاریہ تک جواب کی ضرورت ہے اسلئے ہم ۶ کو ساقط کرتے ہیں اور چونکہ ۷۶ بہ نسبت ۷۰ کے عدد ۸۰ کے زیادہ قریب ہے اس لئے ہم لکھتے ہیں

جب ۲۹° ۱۴َ ۳۲ً = .۴۸۸۵۰۲۸

یادداشت جب اعشاریہ کے آٹھویں مقام سے کسی ہندسے کو ساقط کیا جائے تو ساتویں مقام پر جو ہندسہ ہو اُس میں ۱ زیادہ کرنا چاہیئے اگر عدد مسقوطہ ۵ یا ۵ سے بڑا ہو۔

مثال ۲۔ معلوم ہے جم ۹۶° ۲۷َ = .۵۵۹۰۹۶۷۲

اور جم ۱۶° ۲۸′ = ۹۵۸۹۸۴۸ء

۱۶° ۲۷′ ۴۷″ کی قیمت دریافت کرو

۶۱ میں ہم ثابت کرچکے ہیں کہ جب زاویہ بڑھتا ہے تو اُس کی
...التمام گھٹتی ہے۔

...لئے جب زاویہ بقدر ۱′ یعنی ۶۰″ کے بڑھے گا تو جیب التمام بقدر
۸۱ . . . . ء کے گھٹے گی۔

اس لئے جب زاویہ بقدر ۴۷″ کے بڑھے گا تو جیب التمام بقدر
$\frac{۴۷}{۶۰}$ × ۸۲۴ . . . . ء کے گھٹے گی۔

جم ۱۶° ۲۷′ ۴۷″ = ۹۵۹۰۶۷۲ء − $\frac{۴۷}{۶۰}$ × ۸۲۴ . . . . ء

= ۹۵۹۰۶۷۲ء − ۰۰۰۰۶۴۵ء

= ۹۵۹۰۶۷۲ء

− ۰۰۰۰۶۴۵ء

= ۹۵۹۰۰۲۷ء

...اً اس کو یوں لکھتے ہیں

۱۶° ۲۸′ = ۹۵۸۹۸۴۸ء

۱۶° ۲۷′ = ۹۵۹۰۶۷۲ء

...۱′ کیلئے = − ۰۰۰۰۸۲۴ء

...۴۷″ = − $\frac{۴۷}{۶۰}$ × ۸۲۴۰۰۰۰ء

= − ۰۰۰۰۶۴۵ء

جواب = ۹۵۹۰۶۷۲ء

− ۰۰۰۰۶۴۵ء

= ۹۵۹۰۰۲۷ء

۸۲۴
۴۷
۵۷۶۸
۳۲۹۶
۶۰) ۳۸۷۲۸
۶۴۵

۱۶۰ ۔ جب کسی زاویہ کی ایک مثلثی نسبت دی ہوئی ہو تو اُس زاویہ کا دریافت کرنا اب آسان ہوگا۔

مثال ۔ ایک زاویہ کا مماس التمام ۱٫۴۱۰۹۳۲۵ ہے اُس کو معلوم کرو، دیا ہوا ہے مم ۳۵° ۱۹' = ۱٫۴۱۱۴۷۹۹

اور مم ۳۵° ۲۰' = ۱٫۴۱۰۶۰۹۸

فرض کرو کہ زاویہ مطلوبہ ۳۵° ۱۹' + لاً ہے

یعنی مم (۳۵° ۱۹' + لاً) = ۱٫۴۱۰۹۳۲۵

اوپر کی تین مساواتوں سے ظاہر ہے کہ

جب زاویہ بقدر ۶۰" کے بڑھتا ہے تو اُس کا مماس التمام بقدر ۰٫۰۰۰۸۷۰۱ کے گھٹتا ہے

جب زاویہ بقدر لاً کے بڑھتا ہے تو اس کا مماس التمام بقدر ۰٫۰۰۰۵۴۷۴ کے گھٹتا ہے۔

∴ لا : ۶۰ = ۵۴۷۴ : ۸۷۰۱ اسلئے لا = ۳۷٫۷

پس زاویہ مطلوبہ = ۳۵° ۱۹' ۳۷٫۷"

۱۶۱ ۔ ایسے سوالات میں مسئلہ اجزائے متناسب استعمال کرتے وقت طالب علم کو اس بات کا خیال رکھنا چاہیئے کہ جب زاویہ بڑھتا ہے تو اُس کی مثلثی نسبتیں بڑھتی ہیں یا گھٹتی ہیں، شاید اس بات کے یاد رکھنے سے اُس کو مدد ملے کہ جب زاویہ ربع اول میں بڑھتا ہے تو اُس کی تین مثلثی نسبتیں جن کے آخر میں "التمام" ہے یعنی جیب التمام، مماس التمام اور قاطع التمام گھٹتی ہیں۔

لوکارثمی جیوب، جیوب التمام وغیرہ کی جدولیں

۱۶۲- کئی قسم کے مثلثی حسابات ایسے ہیں (مثلاً مثلثات کا حل) جن میں مثلثی نسبتوں کے لوکارثموں کی ضرورت پڑتی ہے، اب اگر ہم سب سے اول جدولوں سے کسی زاویہ کی جیب دریافت کریں اور پھر اُس جیب کا لوکارثم دوبارہ جدولوں سے پڑھیں تو اس میں دقت ہوگی، ایسی محنت سے بچنے کے لئے مثلثی نسبتوں کے لوکارثموں کی جدولیں جداگانہ مرتب کی گئی ہیں اور بموجب سابق ان جدولوں میں صرف اُن زاویوں کی قیمتوں کا مندرج کرنا کافی ہے جو ۰° اور ۴۵° کے درمیان واقع ہوں- چونکہ زاویہ کی جیب ہمیشہ ایک سے کم ہوتی ہے اس لئے جیب کا لوکارثم منفی ہوگا [دفعہ ۱۴۸]

نیز چونکہ جو زاویہ ۰° اور ۴۵° کے درمیان واقع ہو اُس کا مماس ایک سے کم ہوتا ہے اس لئے اس کا لوکارثم ہمیشہ منفی ہوگا- لیکن جو زاویہ ۴۵° اور ۹۰° کے درمیان واقع ہو اُسکا مماس ایک سے بڑا ہوتا ہے اس لئے اس کا لوکارثم ہمیشہ مثبت ہوگا-

۱۶۳- ہر ایک صورت میں مثلثی جملوں کے لوکارثموں کے ماقبل مناسب علامت تحریر کرنے کی محنت سے بچنے کے لئے جدولوں میں لوکارثموں کی اصلی قیمتیں نہیں لکھی جاتیں لیکن ہر ایک لوکارثم کی اصلی قیمت پر دس کا اضافہ کردیا

جاتا ہے،

مثلاً جب ۳۰° = ½

اس لئے   لوک جب ۳۰° = لوک ½ = - لوک ۲

= -۳۰۱۰۳، = ۱̅،۶۹۸۹۷

لیکن جدولوں میں جو قیمت مندرج ہوگی وہ

۱۰ + لوک جب ۳۰° یعنی ۹،۶۹۸۹۷ ہوگی

نیز مس ۶۰° = √۳

اس لئے   لوک مس ۶۰° = ½ لوک ۳ = ½(۴۷۷۱۲۱۳،)

= ۲۳۸۵۶۰۶،

اس لوگارتھم کی قیمت جدولوں میں

۱۰ + ۲۳۸۵۶۰۶، یعنی ۱۰،۲۳۸۵۶۰۶ مندرج ہوگی۔

ان "جدولی لوگارتھوں" کو ہم حرف ل سے تعبیر کریں گے

مثلاً ل جب ۱۵° ۲۵′ = ۱۰ + لوک جب ۱۵° ۲۵′

اور ل قط ۴۸° ۲۳′ = ۱۰ + لوک قط ۴۸° ۲۳′

۱۶۴- اگر کسی زاویہ میں صرف درجوں اور دقیقوں کی صحیح تعداد شامل ہو تو اُس کے کسی جملہ کی جدولی لوگارتھم بلاواسطہ جدولوں سے حاصل ہو سکتی ہے، لیکن اگر زاویہ میں ثانیے بھی موجود ہوں تو اصول اجزائے متناسب کو استعمال کرنا چاہیئے، اس صورت میں ترکیب عمل دفعہ ۱۵۹ کے بالکل متشابہ ہے۔ اب ہم اس کی اور اس کے عکس سوال کی ایک مثال حل کریں گے۔

ل ۱۔ معلوم ہے ل قم ۳۲° ۲۱′ = ۱۰٫۲۷۱۵۷۳۳

اور ل قم ۳۲° ۲۲′ = ۱۰٫۲۷۱۳۷۴۰

۳۲° ۲۱′ ۵۱″ کی قیمت دریافت کرو

زاویہ بقدر ۶۰″ کے بڑھتا ہے تو اس کا لوکارثم بقدر ٫۰۰۰۱۹۹۳ کے گھٹتا

اس لئے جب زاویہ بقدر ۵۱″ کے بڑھے گا تو لوکارثم میں متناسب

ہ $\frac{۵۱}{۶۰}$ × ٫۰۰۰۱۹۹۳ یعنی ٫۰۰۰۱۶۹۴ کے ہوگی

ل قم ۳۲° ۲۱′ ۵۱″ = ۱۰٫۲۷۱۵۷۳۳

− ٫۰۰۰۱۶۹۴

= ۱۰٫۲۷۱۴۰۳۹

۲۔ ایک ایسا زاویہ معلوم کرو جس کے مماس کا جدولی لوکارثم

۹٫۴۴۱۷ ہو

و کہ لا زاویہ مطلوبہ ہے

ں سے حاصل ہوگا

ل مس لا = ۹٫۴۴۱۷۲۵۰

ں ۱۵° ۲۷′ = ۹٫۴۴۱۵۱۴۵

رق = ۲۱۰۵

زیادتی = $\frac{۲۱۰۵}{۴۹۱۷}$ × ۶۰″

= ۲۵٫۷″

= ۱۵° ۲۷′ ۲۵٫۷″

ل مس ۱۵° ۲۸′ = ۹٫۴۴۲۰۰۶۲

ل مس ۱۵° ۲۷′ = ۹٫۴۴۱۵۱۴۵

فرق ۱′ کے لئے = ۴۹۱۷

۲۱۰۵
۶۰

۴۹۱۷) ۱۲۶۳۰۰ (۲۵٫۷
۹۸۳۴
۲۷۹۶۰
۲۴۵۸۵
۳۳۷۵۰

مثال ۳ ۔ معلوم ہے ل جب ۱۴° ۶' = ۹٫۳۸۶۷۰۴۰
ل قم ۱۴° ۶' کی قیمت دریافت کرو

لوک جب ۱۴° ۶' = ل جب ۱۴° ۶' − ۱۰

= −۱ + ٫۳۸۶۷۰۴۰

اب لوک قم ۱۴° ۶' = لوک $\frac{1}{\text{جب ۱۴° ۶'}}$

= − لوک جب ۱۴° ۶'

= ۱ − ٫۳۸۶۷۰۴۰

= ٫۶۱۳۲۹۶۰

اسلئے ل قم ۱۴° ۶' = ۱۰٫۶۱۳۲۹۶۰

اور اس سے زیادہ عام صورت یہ ہے، چونکہ جب طہ × قم طہ = ۱

∴ لوک جب طہ + لوک قم طہ = ۰

∴ ل جب طہ + ل قم طہ = ۲۰

اس عمل میں اس قسم کی غلطی سے بچنا چاہیئے، طالب علم بعض اوقات فرض کرتا ہے کہ

چونکہ لوک قم ۱۴° ۶' = − لوک جب ۱۴° ۶'

اس لئے ل قم ۱۴° ۶' = − ل جب ۱۴° ۶'

اور یہ صریحاً غلط ہے

امثلہ نمبری ۲۳

۱۔ معلوم ہے لوک ۳۵۷۰۵ = ۴٫۵۵۲۷۲۹۰

اور لوک ۳۵۷۰۶ = ۴٫۵۵۲۷۴۱۲

۳۵۷۰۵٫۷ اور لوک ۳۵٫۷۰۵۸۸ کی قیمتیں دریافت کرو

معلوم ہے لوک ۵٫۸۷۴۲ = ٫۷۶۸۹۴۸۷

اور لوک ۵۸۷٫۴۳ = ۲٫۷۶۸۹۵۶۱

۵۸۷۴۲٫۵ اور لوک ٫۰۰۵۸۷۴۲۲ کی قیمتیں دریافت کرو

معلوم ہے لوک ۴۷۸۴۷ = ۴٫۶۷۹۸۵۴۷

اور لوک ۴۷۸۴۸ = ۴٫۶۷۹۸۶۳۸

ردوں کو دریافت کرو جن کے لوکارتم بالترتیب ۲٫۶۷۹۸۵۹۳
۳̄٫۶۷۹۸۶۱۷ ہوں

معلوم ہے لوک ۲۵۸٫۳۶ = ۲٫۴۱۲۲۲۵۳

اور لوک ۲٫۵۸۳۷ = ٫۴۱۲۲۴۲۱

د دریافت کرو جن کے لوکارتم بالترتیب ٫۴۱۲۲۳۷۸ اور
۲̄٫۴۱۲۲ ہوں۔

اس کتاب میں جدول اعداد کا کچھ حصہ جو بطور نمونہ کے دیا گیا ہے
کی مدد سے ذیل کے اعداد کے لوکارتم دریافت کرو۔

۵۲۵۳۸٫۹۷ (۲) ۵۲۷٫۲۸۶ (۳) ٫۰۰۰۵۲۹۶۷۳ اور

د دریافت کرو جن کے لوکارتم مفصلہ ذیل ہوں

۳٫۷۲۲۱۰۹۸ (۵) ۲̄٫۷۲۴۰۰۷۵ (۶) ٫۷۲۱۰۳۸۶ و

معلوم ہے جیب ۴۳° ۲۳′ = ٫۶۸۶۸۷۶۱

اور جیب ۴۳° ۲۴′ = ٫۶۸۷۰۸۷۵

۴۳° ۲۳′ ۴۷″ کی قیمت دریافت کرو

ایک زاویہ کی جیب ٫۶۸۷۰۳۴۹ ہے اُس کو معلوم کرو۔

۸- معلوم ہے جم ۳۲° ۱۶' = ء۸۴۵۵۷۲۶
اور جم ۳۲° ۱۷' = ء۸۴۵۴۱۷۲
جم ۳۲° ۱۶' ۲۴" اور جم ۳۲° ۱۶' ۴۷" کی قیمت دریافت کرو۔

۹- نیز اُن زاویوں کو دریافت کرو جن کی جیوب التمام ء۸۴۵۴۸۳۲ اور ء۸۴۵۵۱۷۶ ہوں۔

۱۰- معلوم ہے مس ۷۶° ۲۱' = ۴ء۱۱۷۷۷۸۴
اور مس ۷۶° ۲۲' = ۴ء۱۲۳۰۰۷۹
مس ۷۶° ۲۱' ۲۹" اور مس ۷۶° ۲۱' ۴۷" کی قیمتیں دریافت کرو

۱۱- معلوم ہے ظم ۱۳° ۸' = ۴ء۳۰۱۰۹۱۶
اور ظم ۱۳° ۹' = ۴ء۲۹۵۵۸۱۷
ظم ۱۳° ۸' ۱۹" اور ظم ۱۳° ۸' ۳۷" کی قیمتیں دریافت کرو

۱۲- نیز وہ زاویہ معلوم کرو جس کا قاطع التمام ۴ء۳۹۶۷۸۹ ہو

۱۳- معلوم ہے ل جم ۳۴° ۴۴' = ۹ء۹۱۴۷۷۲۹
اور ل جم ۳۴° ۴۵' = ۹ء۹۱۴۶۸۵۲
ل جم ۳۴° ۴۴' ۲۷" کی قیمت دریافت کرو

۱۴- نیز زاویہ طہ معلوم کرو جہاں
ل جم طہ = ۹ء۹۱۴۷۳۲۸

۱۵- معلوم ہے ل ظم ۷۱° ۲۷' = ۹ء۵۲۵۷۷۷۹
اور ل ظم ۷۱° ۲۸' = ۹ء۵۲۵۳۵۸۹
ل ظم ۷۱° ۲۷' ۴۷" کی قیمت دریافت کرو
نیز مساوات ل ظم طہ = ۹ء۵۲۵۴۷۸۲ کو حل کرو۔

معلوم ہے ل قط ۶۸° ۲۷′ = ۱۰.۶۰۲۲۹۱۶۸

اور ل قط ۶۸° ۲۸′ = ۱۰.۶۰۲۲۹۵۹۰

ط ۶۸° ۲۷′ ۳۵″ کی قیمت دریافت کرو

نیز وہ زاویہ معلوم کرو جس کا ل قط مساوی ہو ۱۰.۶۰۲۲۹۲۸۵ کے

انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں وہ زاویہ معلوم کرو جس کی

۶۱۰ ہو معلوم ہے

لوک ۶ = ۷۷۸۱۵۱۳

ل جب ۳۶° ۵۲′ = ۹.۷۷۸۱۱۸۶

ل جب ۳۶° ۵۳′ = ۹.۷۷۸۲۸۷۰

۱۱۔ اس جگہ (صفحہ ۲۴۳) چیمبر کے جدولوں سے ہم ایک صفحہ بطور نمونہ دیتے ہیں، اس میں اُن سب زاویوں کی مثلثی نسبتوں کے جدولی لوکارتم مندرج ہیں جو ۳۲° اور ۳۳° نیز ۵۷° اور ۵۸° کے درمیان واقع ہیں۔

پہلے خانے میں اُن سب زاویوں کی جدولی جیوب مندرج ہیں جو ۳۲° اور ۳۳° کے درمیان بقدر ایک منٹ یا دقیقہ کے بڑھتے ہیں۔

دوسرے خانے میں لفظ فرق کے نیچے عدد ۲۰۲۱ لکھا ہے، اس کا یہ مطلب ہے کہ ل جب ۳۲° ۰′ اور ل جب ۳۲° ۱′ کے درمیان فرق ۰۰۰۰۲۰۲۱. ہے، اسکی تصدیق ۹.۷۲۴۲۰۹۷ کو ۹.۷۲۴۴۱۱۸ سے تفریق کرنے سے ہو سکتی ہے، نیز یاد رہے کہ عدد ۲۰۲۱ کو اعداد ۹.۷۲۴۲۰۹۷ اور ۹.۷۲۴۴۱۱۸ کے

محاذی وسطا ہیں کر کے لکھا گیا ہے جس سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ ان دو عددوں کے حاصل تفریق کو تعبیر کرتا ہے۔

دوسرا خانہ جس کے سر پر "فرق" لکھا ہوا ہے بائیں طرف اُس خانہ کے بھی متعلق ہے جس کے راس پر قاطع التمام لکھا ہوا ہے اسی طرح سے پانچواں خانہ جس میں متصل جدولی لوکارتموں کے فرق مندرج ہیں دائیں اور بائیں طرف دونوں خانوں کے متعلق ہے۔

۱۶۶۔ جن خانوں کے سر پر "فرق" لکھا ہوا ہے اُن کے استعمال کرنے میں ایک بات یاد رکھنی چاہیئے۔ اوپر اس کا ذکر ہو چکا ہے کہ دوسرے خانے میں سب سے اوپر جو عدد ۲۰۲۱ لکھا ہوا ہے درحقیقت اس کا مطلب ۰۰۲۰۲۱ء ہے، لیکن آٹھویں خانہ کے سر پر جو عدد ۷۹۰ ہے اس کا مطلب ۰۰۷۹۰ء نہیں ہے بلکہ ۰۰۰۰۷۹۰ء ہے، قاعدہ یہ ہے کہ فرق میں جو ہندسہ دائیں طرف اکائی کے مقام پر ہو اُس کو ہمیشہ اعشاریہ کے ساتویں مقام پر رکھ کر بائیں طرف صفروں کی ضروری تعداد کا اضافہ کرنا چاہیئے مثلاً

فرق = ۹ کا مطلب یہ ہے کہ فرق ۰۰۰۰۰۰۹ء ہے

فرق = ۷۴ " " " ۰۰۰۰۰۷۴ء ہے

فرق = ۷۳۵ " " " ۰۰۰۰۷۳۵ء ہے

فرق = ۲۰۲۱ " " " ۰۰۰۲۰۲۱ء ہے

فرق = ۱۲۳۴۸ " " " ۰۰۱۲۳۴۸ء ہے

۳۲ درجہ

٠	جیب	فرق	قاطع التمام	مماس	فرق	مماس التمام	قاطع	فرق	جیب التمام	′
٠	۹٫۷۲۴۲۰۹۷	۲۰۲۱	۱۰٫۲۷۵۷۹۰۳	۹٫۷۹۵۷۸۹۲	۲۸۱۱	۱۰٫۲۰۴۲۱۰۸	۱۰٫۰۷۱۵۷۹۵	۷۹۰	۹٫۹۲۸۴۲۰۵	۶۰
۱	۹٫۷۲۶۲۱۱۸	۲۰۲۰	۱۰٫۲۷۳۷۸۸۲	۹٫۷۹۶۰۷۰۳	۲۸۱۰	۱۰٫۲۰۳۹۲۹۷	۱۰٫۰۷۱۶۵۸۵	۷۹۰	۹٫۹۲۸۳۴۱۵	۵۹
۲	۹٫۷۲۸۲۱۳۸	۲۰۱۸	۱۰٫۲۷۱۷۸۶۲	۹٫۷۹۶۳۵۱۳	۲۸۰۹	۱۰٫۲۰۳۶۴۸۷	۱۰٫۰۷۱۷۳۷۵	۷۹۱	۹٫۹۲۸۲۶۲۵	۵۸
۳	۹٫۷۳۰۲۱۵۶	۲۰۱۸	۱۰٫۲۶۹۷۸۴۴	۹٫۷۹۶۶۳۲۲	۲۸۰۸	۱۰٫۲۰۳۳۶۷۸	۱۰٫۰۷۱۸۱۶۶	۷۹۱	۹٫۹۲۸۱۸۳۴	۵۷
۴	۹٫۷۳۲۲۱۷۴	۲۰۱۵	۱۰٫۲۶۷۷۸۲۶	۹٫۷۹۶۹۱۳۰	۲۸۰۸	۱۰٫۲۰۳۰۸۷۰	۱۰٫۰۷۱۸۹۵۷	۷۹۲	۹٫۹۲۸۱۰۴۳	۵۶
۵	۹٫۷۳۴۲۱۸۹	۲۰۱۵	۱۰٫۲۶۵۷۸۱۱	۹٫۷۹۷۱۹۳۸	۲۸۰۶	۱۰٫۲۰۲۸۰۶۲	۱۰٫۰۷۱۹۷۴۹	۷۹۲	۹٫۹۲۸۰۲۵۱	۵۵
۶	۹٫۷۳۶۲۲۰۴	۲۰۱۳	۱۰٫۲۶۳۷۷۹۶	۹٫۷۹۷۴۷۴۵	۲۸۰۶	۱۰٫۲۰۲۵۲۵۵	۱۰٫۰۷۲۰۵۴۱	۷۹۳	۹٫۹۲۷۹۴۵۹	۵۴
۷	۹٫۷۳۸۲۲۱۷	۲۰۱۲	۱۰٫۲۶۱۷۷۸۳	۹٫۷۹۷۷۵۵۱	۲۸۰۵	۱۰٫۲۰۲۲۴۴۹	۱۰٫۰۷۲۱۳۳۴	۷۹۳	۹٫۹۲۷۸۶۶۶	۵۳
۸	۹٫۷۴۰۲۲۲۹	۲۰۱۱	۱۰٫۲۵۹۷۷۷۱	۹٫۷۹۸۰۳۵۶	۲۸۰۳	۱۰٫۲۰۱۹۶۴۴	۱۰٫۰۷۲۲۱۲۷	۷۹۴	۹٫۹۲۷۷۸۷۳	۵۲
۹	۹٫۷۴۲۲۲۴۰	۲۰۰۹	۱۰٫۲۵۷۷۷۶۰	۹٫۷۹۸۳۱۶۰	۲۸۰۳	۱۰٫۲۰۱۶۸۴۰	۱۰٫۰۷۲۲۹۲۱	۷۹۴	۹٫۹۲۷۷۰۷۹	۵۱
۱۰	۹٫۷۴۴۲۲۴۹	۲۰۰۸	۱۰٫۲۵۵۷۷۵۱	۹٫۷۹۸۵۹۶۴	۲۸۰۳	۱۰٫۲۰۱۴۰۳۶	۱۰٫۰۷۲۳۷۱۵	۷۹۵	۹٫۹۲۷۶۲۸۵	۵۰
	جیب التمام	فرق	قاطع	مماس التمام	فرق	مماس	قاطع التمام	فرق	جیب	

۵۷ درجہ

	جیب	فرق	قاطع التمام	مماس	فرق	مماس التمام	قاطع	فرق	جیب التمام	
۱۱	۹،۷۲۶۴۲۵۴	۲۰۰۶	۱۰،۲۷۳۵۷۴۶	۹،۷۹۸۸۷۶۷	۲۸۰۲	۱۰،۲۰۱۱۲۳۳	۱۰،۰۷۲۴۵۱۰	۷۹۵	۹،۹۲۷۵۴۹۰	۴۹
۱۲	۹،۷۲۶۶۲۶۴	۲۰۰۵	۱۰،۲۷۳۳۷۳۶	۹،۷۹۹۱۵۶۹	۲۸۰۱	۱۰،۲۰۰۸۴۳۱	۱۰،۰۷۲۵۳۰۵	۷۹۶	۹،۹۲۷۴۶۹۵	۴۸
۱۳	۹،۷۲۶۸۲۶۹	۲۰۰۴	۱۰،۲۷۳۱۷۳۱	۹،۷۹۹۴۳۷۰	۲۸۰۰	۱۰،۲۰۰۵۶۳۰	۱۰،۰۷۲۶۱۰۱	۷۹۶	۹،۹۲۷۳۸۹۹	۴۷
۱۴	۹،۷۲۷۰۲۷۳	۲۰۰۳	۱۰،۲۷۲۹۷۲۷	۹،۷۹۹۷۱۷۰	۲۸۰۰	۱۰،۲۰۰۲۸۳۰	۱۰،۰۷۲۶۸۹۷	۷۹۷	۹،۹۲۷۳۱۰۳	۴۶
۱۵	۹،۷۲۷۲۲۷۶	۲۰۰۲	۱۰،۲۷۲۷۷۲۴	۹،۷۹۹۹۹۷۰	۲۷۹۹	۱۰،۲۰۰۰۰۳۰	۱۰،۰۷۲۷۶۹۴	۷۹۷	۹،۹۲۷۲۳۰۶	۴۵
۱۶	۹،۷۲۷۴۲۷۸	۲۰۰۰	۱۰،۲۷۲۵۷۲۲	۹،۸۰۰۲۷۶۹	۲۷۹۸	۱۰،۱۹۹۷۲۳۱	۱۰،۰۷۲۸۴۹۱	۷۹۸	۹،۹۲۷۱۵۰۹	۴۴
۱۷	۹،۷۲۷۶۲۷۸	۱۹۹۹	۱۰،۲۷۲۳۷۲۲	۹،۸۰۰۵۵۶۷	۲۷۹۸	۱۰،۱۹۹۴۴۳۳	۱۰،۰۷۲۹۲۸۹	۷۹۸	۹،۹۲۷۰۷۱۱	۴۳
۱۸	۹،۷۲۷۸۲۷۷	۱۹۹۸	۱۰،۲۷۲۱۷۲۳	۹،۸۰۰۸۳۶۵	۲۷۹۶	۱۰،۱۹۹۱۶۳۵	۱۰،۰۷۳۰۰۸۷	۷۹۹	۹،۹۲۶۹۹۱۳	۴۲
۱۹	۹،۷۲۸۰۲۷۵	۱۹۹۶	۱۰،۲۷۱۹۷۲۵	۹،۸۰۱۱۱۶۱	۲۷۹۶	۱۰،۱۹۸۸۸۳۹	۱۰،۰۷۳۰۸۸۶	۸۰۰	۹،۹۲۶۹۱۱۴	۴۱
۲۰	۹،۷۲۸۲۲۷۱	۱۹۹۶	۱۰،۲۷۱۷۷۲۹	۹،۸۰۱۳۹۵۶	۲۷۹۵	۱۰،۱۹۸۶۰۴۴	۱۰،۰۷۳۱۶۸۶	۸۰۰	۹،۹۲۶۸۳۱۴	۴۰
	جیب التمام	فرق	قاطع	مماس التمام	فرق	مماس	قاطع التمام	فرق	جیب	

۵۷ درجہ

/	جیب التمام	فرق	قاطع	مماس التمام	فرق	مماس	قاطع التمام	فرق	جیب	/
۲۱	۹،۷۲۸۴۲۶۷	۱۹۹۳	۱۰،۲۷۱۵۷۳۳	۹،۸۰۱۶۷۵۲	۲۷۹۴	۱۰،۱۹۸۳۲۴۸	۱۰،۰۷۳۲۴۸۶	۸۰۰	۹،۹۲۶۷۵۱۴	۳۹
۲۲	۹،۷۲۸۶۲۶۰	۱۹۹۳	۱۰،۲۷۱۳۷۴۰	۹،۸۰۱۹۵۴۶	۲۷۹۴	۱۰،۱۹۸۰۴۵۴	۱۰،۰۷۳۳۲۸۶	۸۰۱	۹،۹۲۶۶۷۱۴	۳۸
۲۳	۹،۷۲۸۸۲۵۳	۱۹۹۱	۱۰،۲۷۱۱۷۴۷	۹،۸۰۲۲۳۴۰	۲۷۹۳	۱۰،۱۹۷۷۶۶۰	۱۰،۰۷۳۴۰۸۷	۸۰۱	۹،۹۲۶۵۹۱۳	۳۷
۲۴	۹،۷۲۹۰۲۴۴	۱۹۹۰	۱۰،۲۷۰۹۷۵۶	۹،۸۰۲۵۱۳۳	۲۷۹۲	۱۰،۱۹۷۴۸۶۷	۱۰،۰۷۳۴۸۸۸	۸۰۲	۹،۹۲۶۵۱۱۲	۳۶
۲۵	۹،۷۲۹۲۲۳۴	۱۹۸۹	۱۰،۲۷۰۷۷۶۶	۹،۸۰۲۷۹۲۵	۲۷۹۱	۱۰،۱۹۷۲۰۷۵	۱۰،۰۷۳۵۶۹۰	۸۰۳	۹،۹۲۶۴۳۱۰	۳۵
۲۶	۹،۷۲۹۴۲۲۳	۱۹۸۸	۱۰،۲۷۰۵۷۷۷	۹،۸۰۳۰۷۱۶	۲۷۹۰	۱۰،۱۹۶۹۲۸۴	۱۰،۰۷۳۶۴۹۳	۸۰۳	۹،۹۲۶۳۵۰۷	۳۴
۲۷	۹،۷۲۹۶۲۱۱	۱۹۸۶	۱۰،۲۷۰۳۷۸۹	۹،۸۰۳۳۵۰۶	۲۷۹۰	۱۰،۱۹۶۶۴۹۴	۱۰،۰۷۳۷۲۹۶	۸۰۳	۹،۹۲۶۲۷۰۴	۳۳
۲۸	۹،۷۲۹۸۱۹۷	۱۹۸۵	۱۰،۲۷۰۱۸۰۳	۹،۸۰۳۶۲۹۶	۲۷۸۹	۱۰،۱۹۶۳۷۰۴	۱۰،۰۷۳۸۰۹۹	۸۰۵	۹،۹۲۶۱۹۰۱	۳۲
۲۹	۹،۷۳۰۰۱۸۲	۱۹۸۳	۱۰،۲۶۹۹۸۱۸	۹،۸۰۳۹۰۸۵	۲۷۸۸	۱۰،۱۹۶۰۹۱۵	۱۰،۰۷۳۸۹۰۴	۸۰۴	۹،۹۲۶۱۰۹۶	۳۱
۳۰	۹،۷۳۰۲۱۶۵	۱۹۸۳	۱۰،۲۶۹۷۸۳۵	۹،۸۰۴۱۸۷۳	۲۷۸۸	۱۰،۱۹۵۸۱۲۷	۱۰،۰۷۳۹۷۰۸	۸۰۵	۹،۹۲۶۰۲۹۲	۳۰

۵۷ درجہ

'	جیب	فرق	قاطع التمام	مماس	فرق	مماس التمام	قاطع	فرق	جیب التمام	'
۳۱	۹٫۷۳۰۴۱۴۸	۱۹۸۱	۱۰٫۲۶۹۵۸۵۲	۹٫۸۰۴۴۶۶۱	۲۷۸۶	۱۰٫۱۹۵۵۳۳۹	۱۰٫۰۷۴۰۵۱۳	۸۰۶	۹٫۹۲۵۹۴۸۷	۲۹
۳۲	۹٫۷۳۰۶۱۲۹	۱۹۸۰	۱۰٫۲۶۹۳۸۷۱	۹٫۸۰۴۷۴۴۷	۲۷۸۶	۱۰٫۱۹۵۲۵۵۳	۱۰٫۰۷۴۱۳۱۹	۸۰۶	۹٫۹۲۵۸۶۸۱	۲۸
۳۳	۹٫۷۳۰۸۱۰۹	۱۹۷۸	۱۰٫۲۶۹۱۸۹۱	۹٫۸۰۵۰۲۳۳	۲۷۸۶	۱۰٫۱۹۴۹۷۶۷	۱۰٫۰۷۴۲۱۲۵	۸۰۶	۹٫۹۲۵۷۸۷۵	۲۷
۳۴	۹٫۷۳۱۰۰۸۷	۱۹۷۷	۱۰٫۲۶۸۹۹۱۳	۹٫۸۰۵۳۰۱۹	۲۷۸۴	۱۰٫۱۹۴۶۹۸۱	۱۰٫۰۷۴۲۹۳۱	۸۰۸	۹٫۹۲۵۷۰۶۹	۲۶
۳۵	۹٫۷۳۱۲۰۶۴	۱۹۷۶	۱۰٫۲۶۸۷۹۳۶	۹٫۸۰۵۵۸۰۳	۲۷۸۴	۱۰٫۱۹۴۴۱۹۷	۱۰٫۰۷۴۳۷۳۹	۸۰۷	۹٫۹۲۵۶۲۶۱	۲۵
۳۶	۹٫۷۳۱۴۰۴۰	۱۹۷۵	۱۰٫۲۶۸۵۹۶۰	۹٫۸۰۵۸۵۸۷	۲۷۸۳	۱۰٫۱۹۴۱۴۱۳	۱۰٫۰۷۴۴۵۴۶	۸۰۸	۹٫۹۲۵۵۴۵۴	۲۴
۳۷	۹٫۷۳۱۶۰۱۵	۱۹۷۴	۱۰٫۲۶۸۳۹۸۵	۹٫۸۰۶۱۳۷۰	۲۷۸۲	۱۰٫۱۹۳۸۶۳۰	۱۰٫۰۷۴۵۳۵۴	۸۰۹	۹٫۹۲۵۴۶۴۶	۲۳
۳۸	۹٫۷۳۱۷۹۸۹	۱۹۷۲	۱۰٫۲۶۸۲۰۱۱	۹٫۸۰۶۴۱۵۲	۲۷۸۱	۱۰٫۱۹۳۵۸۴۸	۱۰٫۰۷۴۶۱۶۳	۸۰۹	۹٫۹۲۵۳۸۳۷	۲۲
۳۹	۹٫۷۳۱۹۹۶۱	۱۹۷۱	۱۰٫۲۶۸۰۰۳۹	۹٫۸۰۶۶۹۳۳	۲۷۸۱	۱۰٫۱۹۳۳۰۶۷	۱۰٫۰۷۴۶۹۷۲	۸۱۰	۹٫۹۲۵۳۰۲۸	۲۱
۴۰	۹٫۷۳۲۱۹۳۲	۱۹۷۰	۱۰٫۲۶۷۸۰۶۸	۹٫۸۰۶۹۷۱۴	۲۷۸۰	۱۰٫۱۹۳۰۲۸۶	۱۰٫۰۷۴۷۷۸۲	۸۱۰	۹٫۹۲۵۲۲۱۸	۲۰
'	جیب التمام	فرق	قاطع	مماس التمام	فرق	مماس	قاطع التمام	فرق	جیب	'

۵۷ درجہ

۳۲ درجہ

د	جیب	فرق	قاطع التمام	مماس	فرق	مماس التمام	قاطع	فرق	جیب التمام	د
۴۱	۹٫۷۳۳۲۳۹۰۲	۱۹۶۸	۱۰٫۲۶۶۷۶۰۹۸	۹٫۸۰۷۲۴۴۹۳	۲۷۷۹	۱۰٫۱۹۲۷۵۵۰۷	۱۰٫۰۷۴۸۵۹۲	۸۱۱	۹٫۹۲۵۱۴۰۸	۱۹
۴۲	۹٫۷۳۳۲۵۸۷۰	۱۹۶۶	۱۰٫۲۶۶۷۴۱۳۰	۹٫۸۰۷۲۷۲۷۳	۲۷۷۹	۱۰٫۱۹۲۷۲۷۲۷	۱۰٫۰۷۴۹۴۰۳	۸۱۱	۹٫۹۲۵۰۵۹۷	۱۸
۴۳	۹٫۷۳۳۲۷۸۳۶	۱۹۶۷	۱۰٫۲۶۶۷۲۱۶۴	۹٫۸۰۷۳۰۰۵۲	۲۷۷۷	۱۰٫۱۹۲۶۹۹۴۸	۱۰٫۰۷۵۰۲۱۴	۸۱۳	۹٫۹۲۴۹۷۸۶	۱۷
۴۴	۹٫۷۳۳۲۹۸۰۳	۱۹۶۵	۱۰٫۲۶۶۷۰۱۹۷	۹٫۸۰۷۳۲۸۲۹	۲۷۷۷	۱۰٫۱۹۲۶۷۱۷۱	۱۰٫۰۷۵۱۰۲۷	۸۱۲	۹٫۹۲۴۸۹۷۳	۱۶
۴۵	۹٫۷۳۳۳۱۷۶۸	۱۹۶۳	۱۰٫۲۶۶۶۸۲۳۲	۹٫۸۰۷۳۵۶۰۶	۲۷۷۷	۱۰٫۱۹۲۶۴۳۹۴	۱۰٫۰۷۵۱۸۳۹	۸۱۲	۹٫۹۲۴۸۱۶۱	۱۵
۴۶	۹٫۷۳۳۳۳۷۳۱	۱۹۶۲	۱۰٫۲۶۶۶۶۲۶۹	۹٫۸۰۷۳۸۳۸۳	۲۷۷۵	۱۰٫۱۹۲۶۱۶۱۷	۱۰٫۰۷۵۲۶۵۱	۸۱۴	۹٫۹۲۴۷۳۴۹	۱۴
۴۷	۹٫۷۳۳۳۵۶۹۳	۱۹۶۱	۱۰٫۲۶۶۶۴۳۰۷	۹٫۸۰۷۴۱۱۵۸	۲۷۷۵	۱۰٫۱۹۲۵۸۸۴۲	۱۰٫۰۷۵۳۴۶۵	۸۱۴	۹٫۹۲۴۶۵۳۵	۱۳
۴۸	۹٫۷۳۳۳۷۶۵۴	۱۹۶۰	۱۰٫۲۶۶۶۲۳۴۶	۹٫۸۰۷۴۳۹۳۳	۲۷۷۳	۱۰٫۱۹۲۵۶۰۶۷	۱۰٫۰۷۵۴۲۷۹	۸۱۴	۹٫۹۲۴۵۷۲۱	۱۲
۴۹	۹٫۷۳۳۳۹۶۱۴	۱۹۵۸	۱۰٫۲۶۶۶۰۳۸۶	۹٫۸۰۷۴۶۷۰۷	۲۷۷۳	۱۰٫۱۹۲۵۳۲۹۳	۱۰٫۰۷۵۵۰۹۳	۸۱۵	۹٫۹۲۴۴۹۰۷	۱۱
۵۰	۹٫۷۳۳۴۱۵۷۲	۱۹۵۷	۱۰٫۲۶۶۵۸۴۲۸	۹٫۸۰۷۴۹۴۸۰	۲۷۷۳	۱۰٫۱۹۲۵۰۵۲۰	۱۰٫۰۷۵۵۹۰۸	۸۱۵	۹٫۹۲۴۴۰۹۲	۱۰
د	جیب التمام	فرق	قاطع	مماس التمام	فرق	مماس	قاطع التمام	فرق	جیب	د

۵۷ درجہ

۳۲ درجہ

م	جیب التمام	فرق	قاطع	مماس التمام	فرق	مماس	قاطع التمام	فرق	جیب	م
۹	۹٫۹۲۴۳۲۷۷	۸۱۶	۱۰٫۰۷۵۶۷۲۳	۱۰٫۱۸۹۹۷۴۷	۲۷۷۲	۹٫۸۱۰۰۲۵۳	۱۰٫۲۶۵۶۴۷۱	۱۹۵۴	۹٫۷۳۴۳۵۳۰	۵۱
۸	۹٫۹۲۴۲۴۶۱	۸۱۷	۱۰٫۰۷۵۷۵۳۹	۱۰٫۱۸۹۶۹۷۵	۲۷۷۱	۹٫۸۱۰۳۰۲۵	۱۰٫۲۶۵۴۵۱۵	۱۹۵۵	۹٫۷۳۴۵۴۸۵	۵۲
۷	۹٫۹۲۴۱۶۴۴	۸۱۷	۱۰٫۰۷۵۸۳۵۶	۱۰٫۱۸۹۴۲۰۴	۲۷۷۰	۹٫۸۱۰۵۷۹۶	۱۰٫۲۶۵۲۵۶۰	۱۹۵۳	۹٫۷۳۴۷۴۴۰	۵۳
۶	۹٫۹۲۴۰۸۲۷	۸۱۷	۱۰٫۰۷۵۹۱۷۳	۱۰٫۱۸۹۱۴۳۴	۲۷۷۰	۹٫۸۱۰۸۵۶۶	۱۰٫۲۶۵۰۶۰۷	۱۹۵۲	۹٫۷۳۴۹۳۹۳	۵۴
۵	۹٫۹۲۴۰۰۱۰	۸۱۹	۱۰٫۰۷۵۹۹۹۰	۱۰٫۱۸۸۸۶۶۴	۲۷۶۹	۹٫۸۱۱۱۳۳۶	۱۰٫۲۶۴۸۶۵۵	۱۹۵۱	۹٫۷۳۵۱۳۴۵	۵۵
۴	۹٫۹۲۳۹۱۹۱	۸۱۸	۱۰٫۰۷۶۰۸۰۹	۱۰٫۱۸۸۵۸۹۵	۲۷۶۸	۹٫۸۱۱۴۱۰۵	۱۰٫۲۶۴۶۷۰۴	۱۹۵۰	۹٫۷۳۵۳۲۹۶	۵۶
۳	۹٫۹۲۳۸۳۷۳	۸۱۹	۱۰٫۰۷۶۱۶۲۷	۱۰٫۱۸۸۳۱۲۷	۲۷۶۸	۹٫۸۱۱۶۸۷۳	۱۰٫۲۶۴۴۷۵۴	۱۹۴۹	۹٫۷۳۵۵۲۴۶	۵۷
۲	۹٫۹۲۳۷۵۵۴	۸۲۰	۱۰٫۰۷۶۲۴۴۶	۱۰٫۱۸۸۰۳۵۹	۲۷۶۷	۹٫۸۱۱۹۶۴۱	۱۰٫۲۶۴۲۸۰۵	۱۹۴۷	۹٫۷۳۵۷۱۹۵	۵۸
۱	۹٫۹۲۳۶۷۳۴	۸۲۰	۱۰٫۰۷۶۳۲۶۶	۱۰٫۱۸۷۷۵۹۲	۲۷۶۶	۹٫۸۱۲۲۴۰۸	۱۰٫۲۶۴۰۸۵۸	۱۹۴۶	۹٫۷۳۵۹۱۴۲	۵۹
۰	۹٫۹۲۳۵۹۱۴		۱۰٫۰۷۶۴۰۸۶	۱۰٫۱۸۷۴۸۲۶		۹٫۸۱۲۵۱۷۴	۱۰٫۲۶۳۸۹۱۲		۹٫۷۳۶۱۰۸۸	۶۰
م	جیب	فرق	قاطع التمام	مماس	فرق	مماس التمام	قاطع	فرق	جیب التمام	م

۵۷ درجہ

۱۶۷۔ جدول صفحات ۲۴۴ تا ۲۴۸ سے ۵۷° اور ۵۸° کے درمیان جو زاویے واقع ہوں اُن کی نسبتوں کے جدولی لوگارتم بھی معلوم ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ل مس ۵۷° ۲۰′ مطلوب ہے، اگر ہم صفحہ مذکورہ کی سب سے نیچے کی سطر سے شروع ہو کر اُس خانے میں اوپر دیکھتے جائیں جس کے پائیں پر ماس لکھا ہوا ہے تو ہمیں ایک عدد ۱۰٫۱۹۳۰۲۸۶ ملے گا جس کے بائیں طرف افقی سطر کے آخیر میں عدد ۲۰ لکھا ہوا ہے، یہ عدد ل مس ۵۷° ۲۰′ کی قیمت ہے۔

امثلہ نمبری ۲۵

۱۔ معلوم ہے جم ط = ٫۹۷۲۵۳۸۲

جم ۱۳° ۲۷′ = ٫۹۷۲۵۷۳۳

فرق ۱′ کے لئے = ۶۷۷

زاویہ ط کی قیمت دریافت کرو

۲۔ ایک زاویے کی جیب ۳/۸ ہے اُس کو معلوم کرو

معلوم ہے جیب ۲۲° ۱′ = ٫۳۷۴۸۷۶۳

نیز ۱′ کے لئے فرق = ۲۶۹۶

۳۔ معلوم ہے قم ۶۵° ۲۴′ = ۱٫۰۹۹۸۲۴۳

فرق ۱′ کے لئے = ۱۳۶۴

قم ۶۵° ۲۴′ ۳۷″ کی قیمت دریافت کرو، نیز وہ زاویہ معلوم کرو جس کا

قاطع التمام ۹۹۶۹۳۸۰ء۱ ہو

۴ - ل مس ۲۲° ۳۷′ = ۹ء۶۱۹۷۲۰۵

فرق ۱′ کے لئے = ۳۵۵۷

ل مس ۲۲° ۳۷′ ۲۲″ کی قیمت دریافت کرو، نیز وہ زاویہ معلوم کرو جس کا ل مس = ۹ء۶۱۹۵۲۸۳

۵ - وہ زاویہ معلوم کرو جس کی ل جم برابر ۹ء۹۹۳ کے ہو -
معلوم ہے ل جم ۱۰° ۱۵′ = ۹ء۹۹۳۰۱۳۱

اور فرق ۱′ کے لئے = ۲۲۹

۶ - وہ زاویہ دریافت کرو جس کا ل قط برابر ۱۰ء۱۵ کے ہو معلوم ہے ل قط ۴۴° ۵۵′ = ۱۰ء۱۴۹۸۴۳ اور

۱′ کے لئے فرق = ۱۲۶۰

۷ - جدول صفحات ۲۴۳ تا ۲۴۸ سے جملات ذیل کی قیمتیں دریافت کرو۔

(۱) ل جب ۳۲° ۱۸′ ۲۳″ (۲) ل جم ۳۲° ۱۶′ ۴۹″

(۳) ل مم ۳۲° ۲۹′ ۴۳″ (۴) ل قط ۳۲° ۵۲′ ۲۷″

(۵) ل مس ۵۷° ۴۵′ ۲۸″ (۶) ل قم ۵۷° ۴۸′ ۲۱″

(۷) ل جم ۵۷° ۵۸′ ۲۹″

۸ - اسی جدول کی مدد سے ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) ل مس طہ = ۱۰ء۱۹۵۹۲۶۱

(۲) ل قم طہ = ۱۰ء۰۷۳۸۱۲۵

(۳) ل جم طہ = ۹ء۹۲۵۹۲۸۳

(۴) ل جب طہ = ۹ء۹۲۴۱۳۵۲

۹۔ جدولوں سے ل مس ۱۶° ۶′ ۲۳″ کی قیمت دریافت کرو اور ماس کے جذر کی قیمت کا حساب لگاؤ

۱۰۔ مقادیر ذیل کو لوکارثمی حسابات کے قابل بناؤ یعنی اُن کو حاصل ضرب کی صورت میں بیان کرو

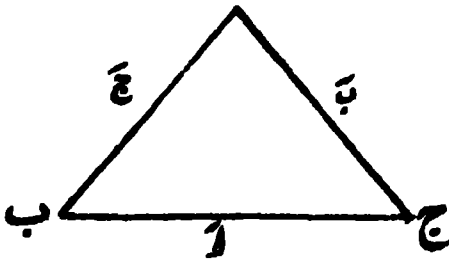
(۱) ۱+مس لا×مس ما (۲) ۱-مس لا×مس ما

(۳) مم لا+مس ما (۴) مم لا-مس ما

(۵) $\frac{\text{۱ - جم ۲ لا}}{\text{۱ + جم ۲ لا}}$ (۶) $\frac{\text{مس لا + مس ما}}{\text{مم لا + مم ما}}$

باب دوازدہم

مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کی مثلثی نسبتوں کے تعلقات

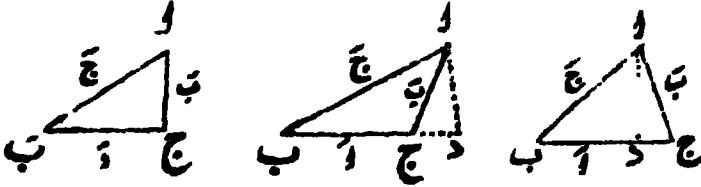
۱۶۸۔ مثلث کے زاویوں کو ہم آیندہ حروف ا، ب، ج سے اور ان کے مقابل کے اضلاع کو بالترتیب حروف اَ، بَ، جَ سے تعبیر کرینگے، یاد رہے کہ اَ، بَ، جَ اعداد ہیں کیونکہ وہ مثلث کے اضلاع کے طولوں کو کسی ایک پیمانہ واحد کی رقوم میں بیان کرتے ہیں۔

ب ج = اَ

ج ا = بَ

ا ب = جَ

۱۶۹۔ مسئلہ۔ کسی مثلث ا ب ج میں ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{اَ}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{جب ج}}{\text{جَ}}$$

یعنی مثلث کے زاویوں کی جیوب مقابل کے اضلاع کے متناسب ہوتی ہیں

زاویہ ا سے عمود اد مقابل کے ضلع ب ج یا ب ج ممدودہ پر نکالو جو اُس کو نقطہ د پر ملے۔

مثلث اب د میں

$\frac{اد}{اب}$ = جب ب یعنی اد = جَ جب ب

مثلث اج د میں

$\frac{اد}{اج}$ = جب ج یعنی اد = بَ جب ج

[اگر زاویہ ج منفرجہ ہو جیسا کہ دوسری شکل میں تو $\frac{اد}{بَ}$ = جب اج د = جب (۱۸۰° - ج) = جب ج (دفعہ ۷۶) یعنی اد = بَ جب ج]

اد کی یہ دونوں قیمتیں برابر رکھنے سے

جَ جب ب = بَ جب ج

یعنی $\frac{جب ب}{بَ} = \frac{جب ج}{جَ}$

اسی طرح زاویہ ب سے ج ا پر عمود نکالنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{اَ}} = \frac{\text{جب ج}}{\text{جَ}}$$

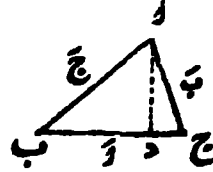
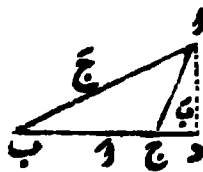
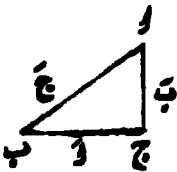
اگر زاویہ ج قائمہ ہو جیسا کہ تیسری شکل میں تو جب ج = ا

جب ا = $\frac{\text{اَ}}{\text{جَ}}$ اور جب ب = $\frac{\text{بَ}}{\text{جَ}}$

اس لئے $\frac{\text{جب ا}}{\text{اَ}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{ا}}{\text{جَ}} = \frac{\text{جب ج}}{\text{جَ}}$

پس ہر ایک صورت میں

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{اَ}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{جب ج}}{\text{جَ}}$$

۱۷۰۔ کسی مثلث میں کسی زاویہ کی جیب التمام کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج میں اگر زاویہ ا سے عمود اد مقابل کے ضلع ب ج یا ب ج ممدودہ پر نکالا جائے تو وہ اس کو نقطہ د پر ملتا ہے

صورت اول۔ فرض کرو کہ زاویہ ج حادہ ہے دیکھو شکل اوّل

بموجب اقلیدس م ۲ ش ۱۳

$$\text{ا ب}^2 = \text{ب ج}^2 + \text{ج ا}^2 - ۲ \text{ ب ج} \times \text{ج د} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۱)$$

لیکن $\frac{\text{ج د}}{\text{ج ا}}$ = جم ج یعنی ج د = ب جم ج اس لئے

(۱) سے حاصل ہوگا

$$\text{ج}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 - ۲\,\text{ا} \times \text{ب جم ج}$$

$$\text{یعنی } ۲\,\text{ا ب جم ج} = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{ج}^2$$

$$\text{یعنی جم ج} = \frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{ج}^2}{۲\,\text{ا ب}}$$

صورت دوم۔ فرض کرو کہ زاویہ ج منفرجہ ہے جیساکہ دوسری شکل میں

تب بموجب اقلیدس ہم ۲ ش ۱۲

$$\text{ا ب}^2 = \text{ب ج}^2 + \text{ج ا}^2 + ۲\,\text{ب ج} \times \text{ج د} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

لیکن $\frac{\text{ج د}}{\text{ج ا}}$ = جم ا ج د = جم (۱۸۰° − ج) = − جم ج

(دفعہ ۸۷)

پس ج د = − ب جم ج

اس لئے (۲) سے حاصل ہوگا

$$\text{ج}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + ۲\,\text{ا}\,(-\,\text{ب جم ج})$$

$$= \text{ا}^2 + \text{ب}^2 - ۲\,\text{ا ب جم ج}$$

پس موافق صورت اوّل

$$\text{جم ج} = \frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{ج}^2}{۲\,\text{ا ب}}$$

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جم ا} = \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2}{2\,\text{ب ج}}$$

$$\text{اور جم ب} = \frac{\text{ج}^2 + \text{ا}^2 - \text{ب}^2}{2\,\text{ج ا}}$$

اگر مثلث کا ایک زاویہ (مثلاً ج) قائمہ ہو تو اوپر کے ضابطے سے حاصل ہوگا $\text{ج}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$ یعنی جم ج = ۰ اور یہ درست ہے کیونکہ زاویہ ج قائمہ ہے۔

پس معلوم ہوا کہ ج کی ہر ایک قیمت کے لئے ضابطہ درست ہے

مثال۔ اگر ا = ۱۵، ب = ۳۶، ج = ۳۹

$$\text{تو جم ا} = \frac{36^2 + 39^2 - 15^2}{2 \times 36 \times 39}$$

$$= \frac{3^2(12^2 + 13^2 - 5^2)}{2 \times 3^2 \times 12 \times 13} = \frac{288}{24 \times 13} = \frac{12}{13}$$

۱۷۱۔ مثلث کے نصف زاویوں کی جیوب کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو

کسی مثلث میں بموجب دفعہ ۱۷۰

$$\text{جم ا} = \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2}{2\,\text{ب ج}}$$

لیکن بموجب دفعہ ۱۱۵

$$\text{جم ا} = 1 - 2\,\text{جب}^2 \frac{\text{ا}}{2}$$

$$\text{اس لئے } 2\,\text{جب}^2 \frac{\text{ا}}{2} = 1 - \text{جم ا} = 1 - \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2}{2\,\text{ب ج}}$$

$$= \frac{\text{۲ بَ جَ} - \text{بَ}^2 - \text{جَ}^2 + \text{اَ}^2}{\text{۲ بَ جَ}}$$

$$= \frac{\text{اَ}^2 - (\text{بَ}^2 + \text{جَ}^2 - \text{۲ بَ جَ})}{\text{۲ بَ جَ}} = \frac{\text{اَ}^2 - (\text{بَ} - \text{جَ})^2}{\text{۲ بَ جَ}}$$

$$= \frac{[\text{اَ} + (\text{بَ} - \text{جَ})][\text{اَ} - (\text{بَ} - \text{جَ})]}{\text{۲ بَ جَ}}$$

$$= \frac{(\text{اَ} + \text{بَ} - \text{جَ})(\text{اَ} - \text{بَ} + \text{جَ})}{\text{۲ بَ جَ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

فرض کرو کہ ۲ ن = اَ + بَ + جَ یعنی ن مثلث کے نصف مجموعۂ اضلاع کو تعبیر کرتا ہے۔

تب $\text{اَ} + \text{بَ} - \text{جَ} = \text{اَ} + \text{بَ} + \text{جَ} - \text{۲ جَ} = \text{۲ ن} - \text{۲ جَ} = ۲(\text{ن} - \text{جَ})$

اور $\text{اَ} - \text{بَ} + \text{جَ} = \text{اَ} + \text{بَ} + \text{جَ} - \text{۲ بَ} = \text{۲ ن} - \text{۲ بَ} = ۲(\text{ن} - \text{بَ})$

ربط (۱) سے حاصل ہوگا

$$\text{۲ جب}^2 \frac{\text{ا}}{۲} = \frac{۲(\text{ن} - \text{جَ}) \times ۲(\text{ن} - \text{بَ})}{\text{۲ بَ جَ}} = ۲\frac{(\text{ن} - \text{بَ})(\text{ن} - \text{جَ})}{\text{بَ جَ}}$$

$$\therefore \text{جب} \frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{(\text{ن} - \text{بَ})(\text{ن} - \text{جَ})}{\text{بَ جَ}}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اسی طرح سے $\text{جب} \frac{\text{ب}}{۲} = \sqrt{\frac{(\text{ن} - \text{جَ})(\text{ن} - \text{اَ})}{\text{جَ اَ}}}$

اور $\text{جب} \frac{\text{ج}}{۲} = \sqrt{\frac{(\text{ن} - \text{اَ})(\text{ن} - \text{بَ})}{\text{اَ بَ}}}$

۱۷۲- مثلث کے نصف زاویوں کی جیوب التمام کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو

بموجب دفعہ ۱۱۵

$$\text{جم ا} = \text{۲ جم}^2 \frac{\text{ا}}{\text{۲}} - \text{۱}$$

اس لئے

$$\text{۲ جم}^2 \frac{\text{ا}}{\text{۲}} = \text{۱} + \text{جم ا} = \text{۱} + \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2}{\text{۲ ب ج}}$$

$$= \frac{\text{۲ ب ج} + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2}{\text{۲ ب ج}} = \frac{(\text{ب} + \text{ج})^2 - \text{ا}^2}{\text{۲ ب ج}}$$

$$= \frac{[(\text{ب} + \text{ج}) + \text{ا}][(\text{ب} + \text{ج}) - \text{ا}]}{\text{۲ ب ج}} = \frac{(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})(\text{ب} + \text{ج} - \text{ا})}{\text{۲ ب ج}} \quad \ldots\ldots (\text{۱})$$

$$\text{اب } \text{ب} + \text{ج} - \text{ا} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{۲ا} = \text{۲ن} - \text{۲ا} = \text{۲}(\text{ن} - \text{ا})$$

پس (۱) سے حاصل ہوگا

$$\text{۲ جم}^2 \frac{\text{ا}}{\text{۲}} = \frac{\text{۲ن} \times \text{۲}(\text{ن} - \text{ا})}{\text{۲ ب ج}} = \text{۲} \frac{\text{ن}(\text{ن} - \text{ا})}{\text{ب ج}}$$

$$\therefore \text{جم} \frac{\text{ا}}{\text{۲}} = \sqrt{\frac{\text{ن}(\text{ن} - \text{ا})}{\text{ب ج}}} \quad \ldots\ldots (\text{۲})$$

اسی طرح سے

$$\text{جم} \frac{\text{ب}}{\text{۲}} = \sqrt{\frac{\text{ن}(\text{ن} - \text{ب})}{\text{ج ا}}} \quad \text{اور} \quad \text{جم} \frac{\text{ج}}{\text{۲}} = \sqrt{\frac{\text{ن}(\text{ن} - \text{ج})}{\text{ا ب}}}$$

۱۷۳- نصف زاویوں کے مماسات کو اضلاع کی رقوم

میں دریافت کرو

چونکہ $\text{مس}\frac{ا}{۲} = \frac{\text{جب}\frac{ا}{۲}}{\text{جم}\frac{ا}{۲}}$

اس لئے بموجب (۲) دفعات ۱۷۱ اور ۱۷۲

$$\text{مس}\frac{ا}{۲} = \sqrt{\frac{(ن-بَ)(ن-جَ)}{بَ جَ}} \div \sqrt{\frac{ن(ن-اَ)}{بَ جَ}}$$

$$= \sqrt{\frac{(ن-بَ)(ن-جَ)}{ن(ن-اَ)}}$$

اسی طرح سے

$$\text{مس}\frac{ب}{۲} = \sqrt{\frac{(ن-جَ)(ن-اَ)}{ن(ن-بَ)}} \quad \text{اور} \quad \text{مس}\frac{ج}{۲} = \sqrt{\frac{(ن-اَ)(ن-بَ)}{ن(ن-جَ)}}$$

چونکہ ہر ایک مثلث میں زاویہ ا ہمیشہ $> ۱۸۰^\circ$ اسلئے $\frac{ا}{۲}$ ہمیشہ $> ۹۰^\circ$

اس لئے $\frac{ا}{۲}$ کی جیب، جیب التمام اور مماس ہمیشہ مثبت ہونگے (دفعہ ۵۸)
اس لئے معلوم ہوا کہ اس دفعہ میں اور گذشتہ دو دفعات میں
علامات جذر کے ماقبل ہمیشہ مثبت علامت لینی چاہیئے -

۱۷۴- مثال - اگر اَ = ۱۳، بَ = ۱۴ اور جَ = ۱۵

تو $ن = \frac{۱۳+۱۴+۱۵}{۲} = ۲۱$، ن - اَ = ۸، ن - بَ = ۷

اور ن - جَ = ۶

اس لئے $\text{جب}\ \frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{۶ \times ۷}{۱۵ \times ۱۴}} = \frac{۱}{\sqrt{۵}} = \frac{۱}{۵}\sqrt{۵}$

$\text{جب}\ \frac{\text{ب}}{۲} = \sqrt{\frac{۸ \times ۶}{۱۴ \times ۱۵}} = \frac{۴}{\sqrt{۶۵}} = \frac{۴}{۶۵}\sqrt{۶۵}$

$\text{جم}\ \frac{\text{ج}}{۲} = \sqrt{\frac{۶ \times ۲۱}{۱۴ \times ۱۴}} = \frac{۳}{\sqrt{۱۳}} = \frac{۳}{۱۳}\sqrt{۱۳}$

$\text{مس}\ \frac{\text{ب}}{۲} = \sqrt{\frac{۸ \times ۶}{۷ \times ۲۱}} = \frac{۴}{۷}$

۱۷۵۔ مثلث کے کسی زاویہ کی جیب کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو۔

بموجب دفعہ ۱۱۵

$\text{جب ا} = ۲\ \text{جب}\ \frac{\text{ا}}{۲}\ \text{جم}\ \frac{\text{ا}}{۲}$

لیکن دفعات گزشتہ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ

$\text{جب}\ \frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{(\text{ن} - \bar{\text{ب}})(\text{ن} - \bar{\text{ج}})}{\bar{\text{ب}}\,\bar{\text{ج}}}}$ اور $\text{جم}\ \frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{\text{ن}(\text{ن} - \bar{\text{ا}})}{\bar{\text{ب}}\,\bar{\text{ج}}}}$

اس لئے $\text{جب ا} = ۲\sqrt{\frac{(\text{ن} - \bar{\text{ب}})(\text{ن} - \bar{\text{ج}})}{\bar{\text{ب}}\,\bar{\text{ج}}}}\sqrt{\frac{\text{ن}(\text{ن} - \bar{\text{ا}})}{\bar{\text{ب}}\,\bar{\text{ج}}}}$

$\therefore\ \text{جب ا} = \frac{۲}{\bar{\text{ب}}\,\bar{\text{ج}}}\sqrt{\text{ن}(\text{ن} - \bar{\text{ا}})(\text{ن} - \bar{\text{ب}})(\text{ن} - \bar{\text{ج}})}$

امثلہ نمبری ۲۶

کسی مثلث میں

۱۔ معلوم ہے $\bar{\text{ا}} = ۲۵$، $\bar{\text{ب}} = ۵۲$ اور $\bar{\text{ج}} = ۶۳$

مس $\frac{ا}{۲}$ ، مس $\frac{ب}{۲}$ اور مس $\frac{ج}{۲}$ معلوم کرو

۲- معلوم ہے اَ = ۱۲۵ ، بَ = ۱۲۳ اور جَ = ۶۲

مثلث کے نصف زاویوں کی جیوب اور زاویوں کی جیوب دریافت کرو

۳- معلوم ہے اَ = ۱۸ ، بَ = ۲۴ اور جَ = ۳۰

جب ا ، جب ب ، جب ج دریافت کرو

ہر صورت میں ترسیمی عمل سے تصدیق کرو

۴- معلوم ہے اَ = ۳۵ ، بَ = ۸۴ اور جَ = ۹۱

مس ا ، مس ب ، مس ج دریافت کرو

۵- معلوم ہے اَ = ۱۳ ، بَ = ۱۴ اور جَ = ۱۵

زاویوں کی جیوب دریافت کرو۔ نیز عمل ترسیمی سے اپنے نتائج کی تصدیق کرو

۶- معلوم ہے اَ = ۲۸۷ ، بَ = ۸۱۶ ، جَ = ۸۶۵

مس $\frac{ا}{۲}$ اور مس ا کی قیمتیں دریافت کرو۔

۷- معلوم ہے اَ = $\sqrt{۳}$ ، بَ = $\sqrt{۲}$ اور جَ = $\frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۲}$

مثلث کے زاویے دریافت کرو۔

۱۷۶- ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

اَ = بَ جم ج + جَ جم ب

دیکھو شکل دفعہ ۱۷۰

صورت اول میں

$\frac{ب د}{ب ا}$ = جم ب یعنی ب د = جَ جم ب

اور ج د / ج ا = جم ج یعنی ج د = بَ جم ج

اس لئے اَ = ب ج = ب د + د ج = جَ جم ب + بَ جم ج

صورت دوم میں

ب د / ب ا = جم ب یعنی ب د = جَ جم ب

اور ج د / ج ا = جم ا ج د = جم (۱۸۰° - ج)

= - جم ج (دفعہ ۷۸)

پس ج د = - بَ جم ج

اس لئے اس صورت میں

اَ = ب ج = ب د - ج د = جَ جم ب - (- بَ جم ج)

پس ہر ایک صورت میں

اَ = بَ جم ج + جَ جم ب

اسی طرح سے بَ = جَ جم ا + اَ جم ج

اور جَ = اَ جم ب + بَ جم ا

۱۷۷۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

مس (ب - ج)/۲ = (بَ - جَ)/(بَ + جَ) مم ا/۲

کسی مثلث میں

$$\frac{\text{بَ}}{\text{جَ}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب ج}}$$

$$\therefore \frac{\text{بَ} - \text{جَ}}{\text{بَ} + \text{جَ}} = \frac{\text{جب ب} - \text{جب ج}}{\text{جب ب} + \text{جب ج}} = \frac{\text{۲ جم}\,\frac{\text{ب}+\text{ج}}{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{۲}}}{\text{۲ جب}\,\frac{\text{ب}+\text{ج}}{\text{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{۲}}}$$

$$= \frac{\text{مس}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{۲}}}{\text{مس}\,\frac{\text{ب}+\text{ج}}{\text{۲}}} = \frac{\text{مس}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{۲}}}{\text{مس}\left(\text{۹۰}^\circ - \frac{\text{ا}}{\text{۲}}\right)}$$

$$= \frac{\text{مس}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{۲}}}{\text{مم}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}}} \qquad \text{(دفعہ ۷۵)}$$

$$\text{اس لئے} \quad \text{مس}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{۲}} = \frac{\text{بَ} - \text{جَ}}{\text{بَ} + \text{جَ}}\,\text{مم}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$$

۱۷۸۔ دفعہ ۱۷۰ کے ضابطوں سے ضوابط دفعہ ۱۷۶ حاصل ہو سکتے ہیں اور برعکس اس کے ۔

دفعہ ۱۷۰ کے پہلے اور تیسرے ضابطے سے حاصل ہوگا

$$\text{بَ جم ج} + \text{جَ جم ب} = \frac{\text{اَ}^2 + \text{بَ}^2 - \text{جَ}^2}{\text{۲اَ}} + \frac{\text{جَ}^2 + \text{اَ}^2 - \text{بَ}^2}{\text{۲اَ}} = \frac{\text{۲اَ}^2}{\text{۲اَ}} = \text{اَ}$$

$$\text{اس لئے} \quad \text{اَ} = \text{بَ جم ج} + \text{جَ جم ب}$$

اسی طرح سے دفعہ ۱۷۶ کے باقی ضابطے حاصل ہو سکتے ہیں

نیز دفعہ ۱۷۶ کے تین ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{اَ} = \text{بَ جم ج} + \text{جَ جم ب}$$

$$\text{ب} = \text{ج}\ \text{جم ا} + \text{ا}\ \text{جم ج}$$

$$\text{اور}\quad \text{ج} = \text{ا}\ \text{جم ب} + \text{ب}\ \text{جم ا}$$

ان تینوں کو بالترتیب ا، ب، ج سے ضرب دینے اور جمع کرنے

$$\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{ج}^2 = \text{ا}\,(\text{ب}\ \text{جم ج} + \text{ج}\ \text{جم ب})$$

$$+\ \text{ب}\,(\text{ج}\ \text{جم ا} + \text{ا}\ \text{جم ج}) - \text{ج}\,(\text{ا}\ \text{جم ب} + \text{ب}\ \text{جم ا}) = \text{۲ ا ب}$$

$$\therefore\ \text{جم ج} = \frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{ج}^2}{\text{۲ ا ب}}$$

اسی طرح سے دفعہ ۱۶۸ کے باقی ضابطے حاصل ہو سکتے ہیں۔

۱۷۹- طالب علم کو اکثر ایسی معادلات متماثلہ حل کرنی پڑینگ جن میں مثلث کے اضلاع اور زاویے دونوں شامل ہوں، ایسی میں بہتر ہوگا کہ وہ ضلعوں کو زاویوں کی رقوم میں یا زاویوں کی نسب کو ضلعوں کی رقوم میں بیان کرلے

مثال ۱- ثابت کرو کہ $\text{ا}\ \text{جم}\,\frac{\text{ب} - \text{ج}}{۲} = (\text{ب} + \text{ج})\ \text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}$

بموجب دفعہ ۱۶۹

$$\frac{\text{ب} + \text{ج}}{\text{ا}} = \frac{\text{جب ب} + \text{جب ج}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{۲ جب}\,\frac{\text{ب}+\text{ج}}{۲}\ \text{جم}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲}}{\text{۲ جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}\ \text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$$

$$= \frac{\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}\ \text{جم}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}\ \text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}} = \frac{\text{جم}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$$

$$\therefore\ (\text{ب} + \text{ج})\ \text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \text{ا}\ \text{جم}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲}$$

مثال ۲- ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$$(\text{ب}^2-\text{ج}^2)\,\text{مم}\,\text{ا}+(\text{ج}^2-\text{ا}^2)\,\text{مم}\,\text{ب}+(\text{ا}^2-\text{ب}^2)\,\text{مم}\,\text{ج}=۰$$

بموجب دفعہ ۱۶۹

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{ا}}=\frac{\text{جب ب}}{\text{ب}}=\frac{\text{جب ج}}{\text{ج}}=\text{ک}\quad(\text{فرض کرو})$$

پس جملہ معلومہ

$$=(\text{ب}^2-\text{ج}^2)\frac{\text{جم ا}}{\text{ا ک}}+(\text{ج}^2-\text{ا}^2)\frac{\text{جم ب}}{\text{ب ک}}+(\text{ا}^2-\text{ب}^2)\frac{\text{جم ج}}{\text{ج ک}}$$

$$=\frac{1}{\text{ک}}\Big[(\text{ب}^2-\text{ج}^2)\frac{\text{ب}^2+\text{ج}^2-\text{ا}^2}{۲\,\text{ا ب ج}}+(\text{ج}^2-\text{ا}^2)\frac{\text{ج}^2+\text{ا}^2-\text{ب}^2}{۲\,\text{ا ب ج}}$$

$$+(\text{ا}^2-\text{ب}^2)\frac{\text{ا}^2+\text{ب}^2-\text{ج}^2}{۲\,\text{ا ب ج}}\Big]$$

$$=\frac{1}{۲\,\text{ا ب ج ک}}\Big[\text{ب}^4-\text{ج}^4-\text{ا}^2(\text{ب}^2-\text{ج}^2)+\text{ج}^4-\text{ا}^4$$

$$-\text{ب}^2(\text{ج}^2-\text{ا}^2)+\text{ا}^4-\text{ب}^4-\text{ج}^2(\text{ا}^2-\text{ب}^2)\Big]=۰$$

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$$(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})\left(\text{مس}\frac{\text{ا}}{۲}+\text{مس}\frac{\text{ب}}{۲}\right)=۲\,\text{ج}\,\text{مم}\frac{\text{ج}}{۲}$$

دائیں طرف کا رکن

$$=۲\text{ن}\left[\sqrt{\frac{(\text{ن}-\text{ب})(\text{ن}-\text{ج})}{\text{ن}(\text{ن}-\text{ا})}}+\sqrt{\frac{(\text{ن}-\text{ج})(\text{ن}-\text{ا})}{\text{ن}(\text{ن}-\text{ب})}}\right]\quad\text{دفعہ ۱۷۳}$$

$$=۲\text{ن}\sqrt{\frac{\text{ن}-\text{ج}}{\text{ن}}}\left[\sqrt{\frac{\text{ن}-\text{ب}}{\text{ن}-\text{ا}}}+\sqrt{\frac{\text{ن}-\text{ا}}{\text{ن}-\text{ب}}}\right]$$

$$= \text{۲}\sqrt{\text{ن}(\text{ن} - \text{جَ})}\left[\frac{\text{ن} - \text{بَ} + \text{ن} - \text{اَ}}{\sqrt{(\text{ن} - \text{اَ})(\text{ن} - \text{بَ})}}\right]$$

$$= \frac{\text{۲}\sqrt{\text{ن}(\text{ن} - \text{جَ})} \times \text{جَ}}{\sqrt{(\text{ن} - \text{اَ})(\text{ن} - \text{بَ})}} \quad \text{چونکہ } \text{۲ن} = \text{اَ} + \text{بَ} + \text{جَ}$$

$$= \text{۲ جَ مم } \frac{\text{ج}}{\text{۲}}$$

یہ مماثلہ اضلاع کو زاویوں کی رقوم میں بیان کرنے سے بھی ثابت ہو سکتی ہے دفعہ ۱۶۹ کی مدد سے

$$\frac{\text{اَ} + \text{بَ} + \text{جَ}}{\text{جَ}} = \frac{\text{جب ا} + \text{جب ب} + \text{جب ج}}{\text{جب ج}}$$

$$= \frac{\text{۴ جم } \frac{\text{ا}}{\text{۲}} \text{ جم } \frac{\text{ب}}{\text{۲}} \text{ جم } \frac{\text{ج}}{\text{۲}}}{\text{۲ جب } \frac{\text{ج}}{\text{۲}} \text{ جم } \frac{\text{ج}}{\text{۲}}} \quad \text{دفعہ ۱۳۳}$$

$$= \frac{\text{۲ جم } \frac{\text{ا}}{\text{۲}} \text{ جم } \frac{\text{ب}}{\text{۲}}}{\text{جب } \frac{\text{ج}}{\text{۲}}}$$

$$\text{نیز } \frac{\text{۲ مم } \frac{\text{ج}}{\text{۲}}}{\text{مس } \frac{\text{ا}}{\text{۲}} + \text{مس } \frac{\text{ب}}{\text{۲}}} = \frac{\text{۲ مم } \frac{\text{ج}}{\text{۲}} \text{ جم } \frac{\text{ا}}{\text{۲}} \text{ جم } \frac{\text{ب}}{\text{۲}}}{\text{جب } \frac{\text{ج}}{\text{۲}}\left[\text{جب } \frac{\text{ا}}{\text{۲}} \text{ جم } \frac{\text{ب}}{\text{۲}} + \text{جم } \frac{\text{ا}}{\text{۲}} \text{ جب } \frac{\text{ب}}{\text{۲}}\right]}$$

$$= \frac{\text{۲ جم } \frac{\text{ا}}{\text{۲}} \text{ جم } \frac{\text{ب}}{\text{۲}} \text{ جم } \frac{\text{ج}}{\text{۲}}}{\text{جب } \frac{\text{ج}}{\text{۲}} \text{ جب } \frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{۲}}} = \frac{\text{۲ جم } \frac{\text{ا}}{\text{۲}} \text{ جم } \frac{\text{ب}}{\text{۲}}}{\text{جب } \frac{\text{ج}}{\text{۲}}} \quad (\text{دفعہ ۷۵})$$

اس لئے

$$\frac{\text{اَ} + \text{بَ} + \text{جَ}}{\text{جَ}} = \frac{\text{۲ مم}\frac{\text{ج}}{\text{۲}}}{\text{مس}\frac{\text{ا}}{\text{۲}} + \text{مس}\frac{\text{ب}}{\text{۲}}}$$

یعنی $(\text{اَ} + \text{بَ} + \text{جَ})\left(\text{مس}\frac{\text{ا}}{\text{۲}} + \text{مس}\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\right) = \text{۲ جَ مم}\frac{\text{ج}}{\text{۲}}$

مثال ۴۔ اگر کسی مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ نصف زاویوں کے ماس التمام بھی سلسلہ حسابیہ میں ہوں گے۔

معلوم ہے $\text{اَ} + \text{جَ} = \text{۲ بَ}$ .... (۱)

اور ثابت کرنا مطلوب ہے

$\text{مم}\frac{\text{ا}}{\text{۲}} + \text{مم}\frac{\text{ج}}{\text{۲}} = \text{۲ مم}\frac{\text{ب}}{\text{۲}}$ .... (۲)

ربط (۲) درست ہوگا اگر

$$\sqrt{\frac{\text{ن}(\text{ن} - \text{اَ})}{(\text{ن} - \text{بَ})(\text{ن} - \text{جَ})}} + \sqrt{\frac{\text{ن}(\text{ن} - \text{جَ})}{(\text{ن} - \text{اَ})(\text{ن} - \text{بَ})}} = \text{۲}\sqrt{\frac{\text{ن}(\text{ن} - \text{بَ})}{(\text{ن} - \text{جَ})(\text{ن} - \text{اَ})}}$$

یاطرفین کو $\sqrt{\frac{(\text{ن} - \text{اَ})(\text{ن} - \text{بَ})(\text{ن} - \text{جَ})}{\text{ن}}}$ میں ضرب دینے سے ربط (۲) درست ہوگا اگر

$$(\text{ن} - \text{اَ}) + (\text{ن} - \text{جَ}) = \text{۲}(\text{ن} - \text{بَ})$$

یعنی اگر $\text{۲ ن} - (\text{اَ} + \text{جَ}) = \text{۲ن} - \text{۲ بَ}$

یعنی اگر $\text{اَ} + \text{جَ} = \text{۲ بَ}$ جو ربط (۱) ہے

پس معلوم ہوا کہ اگر ربط (۱) صحیح ہو تو ربط (۲) بھی صحیح ہوتا ہے۔

امثلہ نمبری ۲۷

ثابت کرو کہ کسی مثلث ابج میں

۱۔ $$\text{جب}\,\frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲} = \frac{\text{بَ}-\text{جَ}}{\text{اَ}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}$$

۲۔ $$\text{بَ}^۲\,\text{جب}\,۲\text{ج} + \text{جَ}^۲\,\text{جب}\,۲\text{ب} = ۲\,\text{بَ}\,\text{جَ}\,\text{جب}\,\text{ا}$$

۳۔ $$\text{اَ}\,(\text{بَ}\,\text{جم}\,\text{ج} - \text{جَ}\,\text{جم}\,\text{ب}) = \text{بَ}^۲ - \text{جَ}^۲$$

۴۔ $$(\text{بَ}+\text{جَ})\,\text{جم}\,\text{ا} + (\text{جَ}+\text{اَ})\,\text{جم}\,\text{ب} + (\text{اَ}+\text{بَ})\,\text{جم}\,\text{ج} = \text{اَ}+\text{بَ}+\text{جَ}$$

۵۔ $$\text{اَ}\,(\text{جم}\,\text{ب} + \text{جم}\,\text{ج}) = ۲\,(\text{بَ}+\text{جَ})\,\text{جب}^۲\,\frac{\text{ا}}{۲}$$

۶۔ $$\text{اَ}\,(\text{جم}\,\text{ج} - \text{جم}\,\text{ب}) = ۲\,(\text{بَ}-\text{جَ})\,\text{جم}^۲\,\frac{\text{ا}}{۲}$$

۷۔ $$\frac{\text{جب}\,(\text{ب}-\text{ج})}{\text{جب}\,(\text{ب}+\text{ج})} = \frac{\text{بَ}^۲-\text{جَ}^۲}{\text{اَ}^۲}$$

۸۔ $$\frac{\text{اَ}+\text{بَ}}{\text{اَ}-\text{بَ}} = \text{مس}\,\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۲}\,\text{مم}\,\frac{\text{ا}-\text{ب}}{۲}$$

۹۔ $$\text{اَ}\,\text{جب}\,(\frac{\text{ا}}{۲}+\text{ب}) = (\text{بَ}+\text{جَ})\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}$$

۱۰۔ $$\frac{\text{اَ}^۲\,\text{جب}\,(\text{ب}-\text{ج})}{\text{جب}\,\text{ب}+\text{جب}\,\text{ج}} + \frac{\text{بَ}^۲\,\text{جب}\,(\text{ج}-\text{ا})}{\text{جب}\,\text{ج}+\text{جب}\,\text{ا}} + \frac{\text{جَ}^۲\,\text{جب}\,(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جب}\,\text{ا}+\text{جب}\,\text{ب}} = ۰$$

۱۱۔ $$(\text{بَ}+\text{جَ}-\text{اَ})\,(\text{مم}\,\frac{\text{ب}}{۲}+\text{مم}\,\frac{\text{ج}}{۲}) = ۲\,\text{اَ}\,\text{مم}\,\frac{\text{ا}}{۲}$$

۱۲۔ $$\text{اَ}^۲+\text{بَ}^۲+\text{جَ}^۲ = ۲\,(\text{بَ}\,\text{جَ}\,\text{جم}\,\text{ا} + \text{جَ}\,\text{اَ}\,\text{جم}\,\text{ب} + \text{اَ}\,\text{بَ}\,\text{جم}\,\text{ج})$$

$$(\text{اَ}^2-\text{بَ}^2+\text{جَ}^2)\,\text{مس ب}=(\text{اَ}^2+\text{بَ}^2-\text{جَ}^2)\,\text{مس ج}$$

$$\text{جَ}^2=(\text{اَ}-\text{بَ})^2\,\text{جم}^2\frac{\text{ج}}{۲}+(\text{اَ}+\text{بَ})^2\,\text{جب}^2\frac{\text{ج}}{۲}$$

$$\text{اَ جب}(\text{ب}-\text{ج})+\text{بَ جب}(\text{ج}-\text{ا})+\text{جَ جب}(\text{ا}-\text{ب})=۰$$

$$\frac{\text{اَ جب}(\text{ب}-\text{ج})}{\text{بَ}^2-\text{جَ}^2}=\frac{\text{بَ جب}(\text{ج}-\text{ا})}{\text{جَ}^2-\text{اَ}^2}=\frac{\text{جَ جب}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{اَ}^2-\text{بَ}^2}$$

$$\text{اَ جب}\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{جب}\frac{\text{ب}-\text{ج}}{۲}+\text{بَ جب}\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جب}\frac{\text{ج}-\text{ا}}{۲}+\text{جَ جب}\frac{\text{ج}}{۲}\,\text{جب}\frac{\text{ا}-\text{ب}}{۲}=۰$$

$$\text{اَ}^2(\text{جم}^2\,\text{ب}-\text{جم}^2\,\text{ج})+\text{بَ}^2(\text{جم}^2\,\text{ج}-\text{جم}^2\,\text{ا})+\text{جَ}^2(\text{جم}^2\,\text{ا}-\text{جم}^2\,\text{ب})=۰$$

$$\frac{\text{بَ}^2-\text{جَ}^2}{\text{اَ}^2}\,\text{جب ۲ا}+\frac{\text{جَ}^2-\text{اَ}^2}{\text{بَ}^2}\,\text{جب ۲ب}+\frac{\text{اَ}^2-\text{بَ}^2}{\text{جَ}^2}\,\text{جب ۲ج}=۰$$

$$\frac{(\text{اَ}+\text{بَ}+\text{جَ})^2}{\text{اَ}^2+\text{بَ}^2+\text{جَ}^2}=\frac{\text{مم}\frac{\text{ا}}{۲}+\text{مم}\frac{\text{ب}}{۲}+\text{مم}\frac{\text{ج}}{۲}}{\text{مم ا}+\text{مم ب}+\text{مم ج}}$$

$$\text{اَ}^3\,\text{جم}(\text{ب}-\text{ج})+\text{بَ}^3\,\text{جم}(\text{ج}-\text{ا})+\text{جَ}^3\,\text{جم}(\text{ا}-\text{ب})=۳\,\text{اَ بَ جَ}$$

اگر کسی مثلث کے اضلاع ۳ ، ۴ ، $\sqrt{۳۸}$ فٹ ہوں تو ثابت کرو
(ک)ہ اس کا سب سے بڑا زاویہ ۱۲۰° سے بڑا ہوگا ۔

۲۳- ایک مثلث قایم الزاویہ کے اضلاع ۲۱ اور ۲۸ فٹ ہیں، اگر قائم الزاویہ سے وتر پر عمود نکالا جائے تو اس کا طول دریافت کرو

۲۴- اگر ایک مثلث کے زاویوں کی باہمی نسبتیں ۱ : ۲ : ۳ ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے مقابل کے اضلاع کی نسبتیں ۱ : $\sqrt{3}$: ۲ ہوں گی -

۲۵- اگر کسی مثلث میں

$$\text{مس}\ \frac{ا}{۲} = \frac{۵}{۶} \quad \text{اور مس}\ \frac{ب}{۲} = \frac{۲۰}{۳۷}$$

تو مس $\frac{ج}{۲}$ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اس مثلث میں ا + ج = ۲ ب

۲۶- کسی مثلث قائم الزاویہ متساوی الساقین میں ایک مستقیم خط مساوی ضلعوں میں سے ایک کے نقطہ وسط کو مقابل کے زاوئے سے وصل کرتا ہے، ثابت کرو کہ یہ زاوئے کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے مماس التمام ۲ اور ۳ ہیں

۲۷- کسی مثلث ا ب ج میں عمود ا د قاعدے کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے کہ خطوط ب د، ج د اور ا د کی باہمی نسبتیں ۲، ۳، ۶ ہیں، ثابت کرو کہ مثلث کا زاویۂ راس $45°$ ہے

۲۸- ایک وزن مدار حلقہ کا قطر ۱۰ انچ ہے اور وہ ایک نقطہ سے جس کا راسی فاصلہ مرکز سے ۱ فٹ ہے چھ مساوی رسیوں کے ذریعہ جو محیط کے برابر برابر فاصلوں پر بندھی ہوئی ہیں آویزاں ہے، متصل رسیوں کے درمیانی زاویہ کی جیب التمام دریافت کرو۔

۲۹- اگر اَا، بَا، جَا سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ مم ا، مم ب، مم ج بھی سلسلہ حسابیہ میں ہوں گے

۳۰- اگر اَ، بَ، جَ سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ جم ا مم $\frac{ا}{۲}$، جم ب مم $\frac{ب}{۲}$ اور جم ج مم $\frac{ج}{۲}$ بھی سلسلہ حسابیہ

ہونگے

- اگر ا، ب، ج سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ
$\frac{ا}{۲}$، جب^۲ $\frac{ب}{۲}$ اور جب^۲ $\frac{ج}{۲}$ بھی سلسلہ موسیقیہ میں ہونگے

۱- ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب سے بڑا اور سب سے چھوٹا زاویہ بالترتیب طہ اور فہ ہے ثابت کرو کہ

$۴(۱-\text{جم طہ})(۱-\text{جم فہ}) = \text{جم طہ} + \text{جم فہ}$

۲- ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب سے بڑا زاویہ سب سے چھوٹے زاویئے سے بقدر ۹۰° کے زیادہ ہے ثابت کرو کہ اضلاع $\sqrt{۷}+۱$، $\sqrt{۷}$ اور $\sqrt{۷}-۱$ کے متناسب ہیں

۳- اگر ج = ۹۰° تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۳}{ا+ب+ج} = \frac{۱}{ب+ج} + \frac{۱}{ا+ج}$$

۱- اگر کسی مثلث ا ب ج میں قاعدہ ب ج پر ایک ایسا نقطہ د مقرر کریں کہ ب د : د ج :: م : ن اور اگر
$\angle$ ب ا د = عہ، $\angle$ د ا ج = بہ، $\angle$ ج د ا = طہ اور
ا د = لا تو ثابت کرو کہ

$$(م+ن)\ \text{مم طہ} = م\ \text{مم عہ} - ن\ \text{مم بہ}$$
$$= ن\ \text{مم ب} - م\ \text{مم ج}$$
$$(م+ن)^۲ \times لا^۲ = (م+ن)(م\ ب^۲ + ن\ ج^۲) - م\ ن\ ا^۲$$

۲- اگر کسی مثلث میں ضلع ج کا منصف ضلع ب پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ ۲ مس ا + مس ج = ۰

۳۷- ثابت کرو کہ اگر کسی مثلث میں طہ کوئی زاویہ ہو تو

بَ جم طہ = جَ جم (ا - طہ) + اَ جم (ج + طہ)

۳۸- اگر کسی مثلث کے زاویوں ا اور ب سے دو عمود ع اور م ایک ایسے خط پر نکالے جائیں جو مثلث کے راس ج میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ

اَ^{2} ع^2 + بَ^{2} م^2 - ۲ اَ بَ ع م جم ج = اَ^{2} بَ^{2} جب^2 ج

۳۹- کسی مثلث ا ب ج میں خطوط و ا، و ب اور و ج اس طرح کھینچے گئے ہیں کہ

$\angle$ و ا ب = $\angle$ و ب ج = $\angle$ و ج ا = سہ

تو ثابت کرو کہ

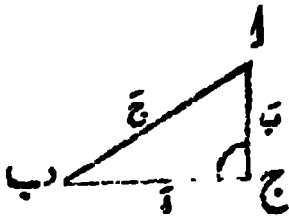
ظم سہ = ظم ا + ظم ب + ظم ج

اور قم^2 سہ = قم^2 ا + قم^2 ب + قم^2 ج

باب سیزدہم

مثلثوں کا حل

۱۔ کسی مثلث کے تین ضلعوں اور تین زاویوں کو
ث کے اجزا کہتے ہیں اگر کوئی سے تین اجزا کسی مثلث
معلوم ہوں بشرطیکہ وہ تین زاویے نہوں تو باقی اضلاع
راوئے معلوم ہو سکتے ہیں لیکن جب تین زاوئے معلوم
ں تو صرف اضلاع کے طولوں کی باہمی نسبتیں معلوم ہوسکتی
یعنی مثلث کی شکل دریافت ہو سکتی ہے اور مقدار نہیں
م ہوسکتی، جب مثلث کے تین اجزا معلوم ہوں تو باقی
اجزا معلوم کرنے کے عمل کو مثلث کا حل کہتے ہیں۔
سب سے پہلے ہم مثلث قائم الزاویہ کے حل پر بحث
ں گے۔ مثلث قائم الزاویہ وہ ہے جس کا ایک زاویہ قائمہ ہو
کی چار دفعات ایسے مثلثات کے متعلق ہیں، زاویہ ج
ہے۔

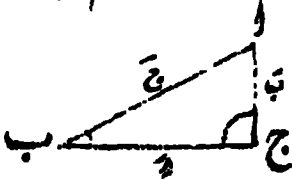
۱۔ صورت اوّل۔ مثلث قائم الزاویہ کا وتر اور ایک
معلوم ہے مثلث کو حل کرو۔

فرض کرو کہ ضلع بَ اور وتر جَ معلوم ہیں،
ربط جب ب = $\frac{\text{بَ}}{\text{جَ}}$ سے زاویہ ب معلوم ہو سکتا ہے۔

∴ ل جب ب = ۱۰ + لوک بَ - لوک جَ

اب چونکہ بَ اور جَ معلوم ہیں اس لئے ل جب ب اور ب معلوم ہو سکتے ہیں اور اس لئے زاویہ ا (= ۹۰° - ب) معلوم ہو سکتا ہے۔

ضلع اَ ذیل کے کسی ایک ربط سے معلوم ہو سکتا ہے

جم ب = $\frac{\text{اَ}}{\text{جَ}}$ ، مس ب = $\frac{\text{بَ}}{\text{اَ}}$ یا اَ = $\sqrt{(\text{جَ} - \text{بَ})(\text{جَ} + \text{بَ})}$

۱۸۲۔ صورت دوم۔ اضلاع اَ اور بَ معلوم ہیں مثلث کو حل کرو۔

اس صورت میں زاویہ ب ربط مس ب = $\frac{\text{بَ}}{\text{اَ}}$ سے معلوم ہو سکتا ہے۔

یعنی ل مس ب = ۱۰ + لوک بَ - لوک اَ

اس لئے ل مس ب اور اس لئے ب معلوم ہو سکتا ہے
نیز زاویہ ا (= ۹۰° - ب) معلوم ہو سکتا ہے
ربط جَ = $\sqrt{\text{اَ}^2 + \text{بَ}^2}$ سے وتر جَ دریافت ہو سکتا ہے
لیکن یہ ربط لوگارثمی حسابات کے لئے اتنا موزوں نہیں ہے

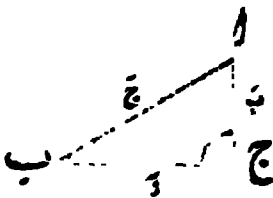
[و]تر جَ دریافت کرنے کے لئے طریق ذیل بہتر ہوگا۔

جب ب = بَ/جَ یعنی جَ = بَ/جب ب

لوک جَ = لوک بَ - لوک جب ب

= ۱۰ + لوک بَ - ل جب ب جس سے جَ معلوم ہو سکتا ہے

۱۸۳ - صورت سوم - مثلث کا زاویہ ب اور ایک ضلع معلوم ہے، مثلث کو حل کرو

[ا]س صورت میں ا (= ۹۰° - ب) معلوم ہے [ض]لع بَ کو ربط بَ/دَ = مس ب سے اور [جَ] کو ربط دَ/جَ = جم ب سے دریافت کرو۔

۱۸۴ - صورت چہارم - زاویہ [ب] اور وتر جَ معلوم ہیں مثلث کو حل کرو۔ [ا] معلوم ہے اور اضلاع دَ اور بَ ارتباطات [ذیل] سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

دَ/جَ = جم ب اور بَ/جَ = جب ب

امثلہ نمبری ۲۸

[۱] - مثلث قائم الزاویہ ا ب ج میں ج قائمہ ہے، اگر اَ = ۵۰ اور [ب] = ۴۵° تو اضلاع دریافت کرو (مس ۴۵° = ۲ + ۱.۳۱۴)

[۲] - مثلث کے دو ضلعے ۱۰ اور ۲۰ فٹ ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ

۹۰ ب ہے، مثلث کو حل کرو۔ معلوم ہے لوک ۲۰ = ۳۰۱۰۳ء۱
اور ل مس ۲۶° ۴۳' = ۹ء۶۹۸۶۸۴۷
نیز فرق آ کے لئے = ۳۱۶۰

۳۔ اگر مثلث کے ایک زاویئے سے اس کے قاعدے پر عمود نکالا جائے تو اس کا طول ۳ انچ ہوتا ہے اور اُس زاویہ کو احاطہ کرنے والے اضلاع کے طول ۴ اور ۵ انچ ہیں، مثلث کے زاویے دریافت کرو۔
معلوم ہے لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء
ل جب ۳۶° ۵۲' = ۹ء۷۷۸۱۱۸۶ فرق آ کے لئے = ۱۶۸۴ اور
ل جب ۴۸° ۳۵' = ۹ء۸۷۵۰۱۴۲ فرق آ کے لئے = ۱۱۱۵

۴۔ ایک مثلث قائم الزاویہ میں وتر اُس عمود کا چار گنا ہے جو زاویہ قائمہ سے وتر پر نکالا جائے، مثلث کے حادے زاویئے دریافت کرو۔

۱۸۵۔ اب ہم ایسے مثلثوں کے حل کے متعلق بحث کریں گے جن کا کوئی زاویہ قائمہ نہ ہو۔
اس کی مختلف صورتیں یہ ہیں
صورت اوّل۔ تین اضلاع معلوم ہیں
صورت دوم۔ دو اضلاع اور درمیانی زاویہ معلوم ہے
صورت سوم۔ دو اضلاع اور ایک کے مقابل کا زاویہ معلوم ہے
صورت چہارم۔ ایک ضلع اور دو زاویئے معلوم ہیں
صورت پنجم۔ تینوں زاویئے معلوم ہیں۔

۱۸۶۔ صورت اول۔ تینوں اضلاع اَ، بَ، جَ معلوم ہیں
چونکہ اضلاع معلوم ہیں اس لئے ن اور اس لئے مقادیر

ن - ا ، ن - ب ، ن - ج معلوم ہیں۔ نصف زاویے $\frac{\text{ا}}{۲}$ ، $\frac{\text{ب}}{۲}$ ، $\frac{\text{ج}}{۲}$ ذیل کے ضابطوں سے معلوم ہو سکتے ہیں۔

$$\text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{(\text{ن}-\text{ب})(\text{ن}-\text{ج})}{\text{ن}(\text{ن}-\text{ا})}}$$

$$\text{مس}\,\frac{\text{ب}}{۲} = \sqrt{\frac{(\text{ن}-\text{ج})(\text{ن}-\text{ا})}{\text{ن}(\text{ن}-\text{ب})}} \quad \text{اور} \quad \text{مس}\,\frac{\text{ج}}{۲} = \sqrt{\frac{(\text{ن}-\text{ا})(\text{ن}-\text{ب})}{\text{ن}(\text{ن}-\text{ج})}}$$

صرف دو زاویوں کا دریافت کرنا کافی ہوگا کیونکہ ان دو کے مجموعہ کو ۱۸۰° سے تفریق کرنے سے تیسرا زاویہ معلوم ہو سکتا ہے۔

اوپر کے زاویوں کی قیمتیں نصف زاویوں کی جیب یا جیوب التمام کے ضابطوں کو استعمال کرنے سے بھی حاصل ہو سکتی ہیں دیکھو دفعات ۱۷۱ اور ۱۷۲

یہ سب ضابطے لوکارثمی حسابات کے لئے موزوں ہیں۔

نیز زاویہ ا ضابطہ $\text{جم ا} = \frac{\text{ب}^۲ + \text{ج}^۲ - \text{ا}^۲}{۲\,\text{ب}\,\text{ج}}$ (دفعہ ۱۷۰) سے بھی معلوم ہو سکتا ہے۔

لیکن بالعموم یہ ضابطہ لوکارثمی حسابات کے لئے موزوں نہیں ہوتا مگر جب اضلاع ا، ب، ج مقدار میں قلیل ہوں تو اُس وقت اس ضابطے کو استعمال کرنے میں سہولت ہوگی۔

مثال۔ ایک مثلث کے اضلاع ۳۲، ۴۰، ۶۶ فٹ ہیں، سب سے بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲۰۷ = ۳ء۲ ۳۱۵۹۷ء۲ ، لوک ۱۰۷۳ = ۳ء۰۳۰۵۹۹۷

ل مم ۶۶° ۱۸ = ۱۳۳۱ ۹ء۹۶۴۲۴۳۴ ، جدولوں سے فرق ۱ کے لئے = ۳۴۳۱

اس جگہ ا = ۳۲ ، ب = ۴۰ ، ج = ۶۶

یعنی ن = $\frac{۶۶ + ۴۰ + ۳۲}{۲}$ = ۶۹ ، ن - ا = ۳۷ ، ن - ب = ۲۹

اور ن - ج = ۳

اس لئے مم $\frac{ج}{۲}$ = $\sqrt{\frac{ن(ن - ج)}{(ن - ا)(ن - ب)}}$ = $\sqrt{\frac{۳ \times ۶۹}{۲۹ \times ۳۷}}$ = $\sqrt{\frac{۲۰۷}{۱۰۷۳}}$

ل مم $\frac{ج}{۲}$ = ۱۰ + $\frac{۱}{۲}$ [لوک ۲۰۷ - لوک ۱۰۷۳]

= ۱۰ + ۱ء۱۵۷۹۸۵۱۵ - ۱ء۵۱۵۲۹۹۸۵

= ۹ء۶۴۲۶۸۵۳

ل مم $\frac{ج}{۲}$ اس لئے ل مم ۶۶° ۱۸ سے بڑا ہے یعنی $\frac{ج}{۲}$ زاویہ ۶۶° ۱۸ سے کم ہے۔

فرض کرو کہ $\frac{ج}{۲}$ = ۶۶° ۱۸ - لاً

زاویہ کی قیمت کا فرق لاً ہے، اس کے مقابل لوکارتم کا فرق

= ۹ء۶۴۲۶۸۵۳
- ۹ء۶۴۲۴۳۴۱

= ۰ء۰۰۰۲۵۱۲

نیز فرق ۶۰" کے لئے = ۰ء۰۰۰۳۴۳۱

اس لئے $\frac{لا}{۶۰}$ = $\frac{۰ء۰۰۰۲۵۱۲}{۰ء۰۰۰۳۴۳۱}$

یعنی لا = $\frac{۲۵۱۲}{۳۴۳۱}$ × ۶۰ = ۴۴ تقریباً

∴ ج/٢ = ٩٦° ١٨′ − ٤٤″ = ٩٦° ١٧′ ١٦″

اور اس لئے ج = ١٣٢° ٣٤′ ٣٢″

امثلہ نمبری ۲۹

[طالب علم کو امثلہ ذیل میں سے بعض (مثلاً ۱، ۷، ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۲) کے نتائج کی تصدیق عمل ترسیمی سے کرنی چاہیئے]

۱۔ ایک مثلث کے اضلاع ۵۶، ۶۵، ۳۳ فٹ ہیں اس کا سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو۔

۲۔ مثلث کے اضلاع بالترتیب ۷، ۴ √۳، √۱۳ گز ہیں، سب سے چھوٹے زاویہ میں درجوں کی تعداد دریافت کرو۔

۳۔ ایک مثلث کے اضلاع لا² + لا + ۱، ۲ لا + ۱ اور لا² − ۱ ہیں ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا زاویہ ۱۲۰° ہے۔

۴۔ مثلث کے اضلاع ا، ب، √(ا² + اب + ب²) فٹ ہیں سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو۔

۵۔ اگر ا = ۲، ب = √۶ اور ج = √۳ − ۱ تو مثلث کو حل کرو

۶۔ اگر ا = ۲، ب = √۶ اور ج = √۳ + ۱ تو مثلث کو حل کرو

۷۔ اگر ا = ۹، ب = ۱۰، ج = ۱۱ تو ب معلوم کرو۔ معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء

ل مس ۲۹° ۲۹′ = ۹ء۷۵۲۳۴۷۲

اور ل مس ۲۹° ۳۰′ = ۹ء۷۵۲۶۴۲۰

۸۔ ایک مثلث کے اضلاع ۱۳۰، ۱۲۳، ۷۷ فٹ ہیں، سب سے بڑا

زاویہ دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۰ء۳۰۱۰۳، ل مس ۳۸° ۳۹' = ۹ء۹۰۲۹۳۷۶

اور ل مس ۳۸° ۴۰' = ۹ء۹۰۳۱۹۶۶

۹۔ ایک مثلث کے اضلاع ۲۴۲، ۱۸۸، ۲۷۰ فٹ ہیں، سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو۔ معلوم ہے

لوک ۲ = ۰ء۳۰۱۰۳، لوک ۳ = ۰ء۴۷۷۱۲۱۳

لوک ۷ = ۰ء۸۴۵۰۹۸۰، ل مس ۳۸° ۲۰' = ۹ء۸۹۸۰۱۰۴

اور ل مس ۳۸° ۱۹' = ۹ء۸۹۷۷۵۰۷

۱۰۔ ایک مثلث کے اضلاع ۲، ۳، ۴ ہیں، سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو۔ معلوم ہے

لوک ۲ = ۰ء۳۰۱۰۳، لوک ۳ = ۰ء۴۷۷۱۲۱۳

ل مس ۵۲° ۱۴' = ۱۰ء۱۱۰۸۳۹۵

اور ل مس ۵۲° ۱۵' = ۱۰ء۱۱۱۱۰۰۴

جدولوں کو استعمال کرنے سے اُن مثلثوں کے سب زاویے دریافت کرو جن میں

۱۱۔ اَ = ۲۵، بَ = ۲۶، جَ = ۲۷

۱۲۔ اَ = ۱۷، بَ = ۲۰، جَ = ۲۷

۱۳۔ اَ = ۲۰۰۰، بَ = ۱۰۵۰، جَ = ۱۱۵۰

۱۸۷۔ صورت دوم۔ دو اضلاع ب اور ج معلوم ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ ا بھی معلوم ہے، مثلث کو حل کرو۔

فرض کرو کہ ضلع بَ ضلع جَ
سے بڑا ہے تب

$$\text{مس}\,\frac{\text{ب} - \text{ج}}{۲} = \frac{\text{بَ} - \text{جَ}}{\text{بَ} + \text{جَ}}\,\text{مم}\,\frac{\text{ا}}{۲} \quad (\text{دفعہ ۱۷۷}) \;\ldots\ldots\; (۱)$$

$$\frac{\text{ب} + \text{ج}}{۲} = ۹۰ - \frac{\text{ا}}{۲} \;\ldots\ldots\; (۲)$$

دو ربطوں سے $\frac{\text{ب} - \text{ج}}{۲}$ اور $\frac{\text{ب} + \text{ج}}{۲}$ کی قیمتیں اور اسلئے
اور تفریق کرنے سے ب اور ج کی قیمتیں حاصل ہونگی
اس کے بعد تیسرا ضلع، از ربط $\frac{\text{اَ}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جب ب}}$ سے حاصل
ملتا ہے

یعنی $\text{اَ} = \text{بَ}\,\frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}$ جس سے اَ حاصل ہوگا

اَ ضابطہ ذیل سے بھی حاصل ہو سکتا ہے

$$\text{اَ}^۲ = \text{بَ}^۲ + \text{جَ}^۲ - ۲\,\text{بَ جَ جم ا}$$

ابطہ لوکارثمی حسابات کے لئے اتنا موزوں نہیں، لیکن
ں صورت میں اکثر مفید ثابت ہوتا ہے جبکہ اضلاع اَ اور
مقداریں نہایت ہی قلیل ہوں ۔

۱۸ا۔ مثال ۱۔ اگر $\text{بَ} = ۳\frac{۱}{۲}$، جَ = ۱ اور ا = ۳۰° تو مثلث کو
رو ۔

$$\text{مس}\,\frac{ب-ج}{۲}=\frac{بَ-جَ}{بَ+جَ}\,\text{مم}\,\frac{ا}{۲}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}+۱}\,\text{مم}\,۱۵^\circ$$

اب $\text{مس}\,۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}+۱}$ (دفعہ ۱۰۷)

یعنی $\text{مم}\,۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}-۱}$

اس لئے $\text{مس}\,\frac{ب-ج}{۲}=۱$

$\therefore\ \frac{ب-ج}{۲}=۴۵^\circ$ .... (۱)

نیز $\frac{ب+ج}{۲}=۹۰^\circ-\frac{ا}{۲}=۹۰^\circ-۱۵^\circ=۷۵^\circ$ .... (۲)

جمع کرنے سے $ب=۱۲۰^\circ$

تفریق کرنے سے $ج=۳۰^\circ$

چونکہ $ا=ج$ ، اس لئے $اَ=جَ=۱$

یا بطریق ذیل

$$اَ^{۲}=بَ^{۲}+جَ^{۲}-۲\,بَ\,جَ\,\text{جم}\,ا=۳+۱-۲\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱$$

یعنی $اَ=۱=جَ$

$\therefore\ ج=ا=۳۰^\circ$

اور $ب=۱۸۰^\circ-ا-ج=۱۲۰^\circ$

مثال ۲- اگر $بَ=۲۱۵$ ، $جَ=۱۰۵$ اور $ا=۴۷^\circ\,۲۴'$ تو باقی دو زاوئے نیز تیسرا ضلع دریافت کرو۔ معلوم ہے

لوک ۲ = ۰،۳۰۱۰۳۰۰ ، لوک ۱۱ = ۱،۰۴۱۳۹۲۷

لوک ۱۰۵ = ۲،۰۲۱۱۸۹۳ ، لوک ۲۱۲،۴۷۶ = ۲،۳۲۷۳۱۰۳

۳۷° ۱۳' = ۱۰٫۱۱۹۴۷۲۳، فرق ۱' کے لئے = ۳۱۲۲

س ۲۴° ۲۰' = ۹٫۶۵۵۳۴۷۷، فرق ۱' کے لئے = ۳۳۶۴

ب ۲۴° ۲۷' = ۹٫۹۸۳۸۰۵۲

قم ۲۸° ۲۵' = ۱۰٫۳۲۲۵۰۲۵، فرق ۱' کے لئے = ۲۳۳۴

گارس (ب - ج)/۲ = (ب - ج)/(ب + ج) مم ا/۲ = ۱۱/۳۲ مم ۳۷° ۱۳' ۴۰''

لمم ۳۷° ۱۳' = ۱۰٫۱۱۹۴۷۲۳

فرق ۴۰'' کیلئے = -۱۳۱۱ ء

مم ۳۷° ۱۳' ۴۰'' = ۱۰٫۱۱۹۳۴۱۲

لوک ۱۱ = ۱٫۰۴۱۳۹۲۷

۱۱٫۱۶۰۷۳۳۹

لوک ۳۲ = ۱٫۵۰۵۱۵

لس ۱/۲(ب - ج) = ۹٫۶۵۵۵۸۳۹

لس ۲۴° ۲۰' = ۹٫۶۵۵۳۴۷۷

فرق = ۲۳۶۲

= فرق ۲۳۶۲/۳۳۶۴ × ۶۰'' کے لئے

= فرق ۴۲٫۱'' کے لئے

ء۳۰۱۰۳
× ۵
۱٫۵۰۵۱۵

۲۳۶۲
× ۶۰
۳۳۶۴) ۱۴۱۷۲۰ (۴۲٫۱
۱۳۴۵۶
۷۱۶۰
۶۷۲۸
۴۳۲۰

(ب - ج)/۲ = ۲۴° ۲۰' ۴۲''

(ب + ج)/۲ = ۹۰° - ا/۲ = ۵۲° ۴۶' ۳۰''

∴ جمع کرنے سے ب = ۸۶° ۴۲' ۱۲''

اور تفریق کرنے سے ج = ۲۸° ۲۵' ۴۸''

نیز $\frac{\text{اَ}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جب ج}} = \text{جَ قم ج}$

∴ اَ = ۱۰۵ جب ۴۳° ۱۷' قم ۲۸° ۲۵' ۴۸''

لیکن ل قم ۲۸° ۲۵' = ۱۰٫۳۲۲۵۰۲۵ 　　　　 $۲۳۳۴ \times \frac{۴۸}{۶۰}$

فرق ۴۸'' کیلئے = −۱۸۶۷ 　　　　 $= ۲۳۳۴ \times \frac{۴}{۵}$

ل قم ۲۸° ۲۵' ۴۸'' = ۱۰٫۳۲۲۳۱۵۸ 　　　　 = ۱۸۶۷

ل جب ۴۳° ۱۷' = ۹٫۹۸۳۸۰۵۲

لوک ۱۰۵ = ۲٫۰۲۱۱۸۹۳

۲۲٫۳۲۷۳۱۰۳
۲۰

∴ لوک اَ = ۲٫۳۲۷۳۱۰۳

∴ اَ = ۲۱۲٫۴۷۶

۱۸۹ — صورت دوم میں مثلث کا تیسرا ضلع اَ زاویوں ب اور ج کو دریافت کرنے کے بغیر بھی معلوم ہو سکتا ہے۔ دو طریقے حسب ذیل ہیں

(۱) چونکہ $\text{اَ}^2 = \text{بَ}^2 + \text{جَ}^2 - ۲\,\text{بَ جَ جم ا}$

$= \text{بَ}^2 + \text{جَ}^2 - ۲\,\text{بَ جَ} \left(۲\,\text{جم}^2 \frac{\text{ا}}{۲} - ۱\right)$

$= (\text{بَ} + \text{جَ})^2 - ۴\,\text{بَ جَ جم}^2 \frac{\text{ا}}{۲}$

∴ $\text{اَ}^2 = (\text{بَ} + \text{جَ})^2 \left[۱ - \frac{۴\,\text{بَ جَ}}{(\text{بَ} + \text{جَ})^2}\,\text{جم}^2 \frac{\text{ا}}{۲}\right]$

اس لئے اگر $\text{جب}^2\,\text{ط} = \frac{۴\,\text{بَ جَ}}{(\text{بَ} + \text{جَ})^2}\,\text{جم}^2 \frac{\text{ا}}{۲}$

تو اَ۲ = (بَ + جَ)۲ [۱ - جب۲ طہ] = (بَ + جَ)۲ جم۲ طہ

یعنی اَ = (بَ + جَ) جم طہ

پس اگر جب طہ کو ربط جب طہ = $\frac{۲\sqrt{بَ جَ}}{بَ + جَ}$ جم $\frac{ا}{۲}$ سے معلوم کیا جائے تو حاصل ہوگا

اَ = (بَ + جَ) جم طہ

(۲) اَ۲ = بَ۲ + جَ۲ - ۲ بَ جَ جم ا

= بَ۲ + جَ۲ - ۲ بَ جَ (۱ - ۲ جب۲ $\frac{ا}{۲}$) = (بَ - جَ)۲ + ۴ بَ جَ جب۲ $\frac{ا}{۲}$

= (بَ - جَ)۲ [۱ + $\frac{۴ بَ جَ}{(بَ - جَ)^۲}$ جب۲ $\frac{ا}{۲}$]

فرض کرو کہ $\frac{۴ بَ جَ}{(بَ - جَ)^۲}$ جب۲ $\frac{ا}{۲}$ = مس۲ فہ

یعنی مس فہ = $\frac{۲\sqrt{بَ جَ}}{بَ - جَ}$ جب $\frac{ا}{۲}$

اس لئے فہ معلوم ہو سکتا ہے

نیز اَ۲ = (بَ - جَ)۲ [۱ + مس۲ فہ] = $\frac{(بَ - جَ)^۲}{جم^۲ فہ}$

یعنی اَ = (بَ - جَ) قط فہ

اس سے اَ بآسانی معلوم ہو سکتا ہے

اس دفعہ کے حسابات میں زاویئے طہ اور فہ تسہیل عمل کے لئے داخل کئے گئے ہیں ان کو امدادی زاویئے کہتے ہیں (دفعہ ۱۳۵)

امثلہ نمبری ۳۰

[طالب علم کو امثلہ ذیل میں سے بعض (مثلاً ۴، ۵، ۶، ۱۱) کے نتائج کی تصدیق ترسیمی عمل سے کرنی چاہیئے]

۱- اگر بَ = ۹۰، جَ = ۷۰ اور اَ = ۲ ۴۸ َ۳۰ ً تو ب اور ج دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، ل مم ۳۶ ۲۴ َ۱۵ ً = ۱۰ء۱۳۲۳۱۱۱

ل سس ۹ ۳۷ َ = ۹ء۲۲۹۰۰۷۱

اور ل سس ۹ ۳۸ َ = ۹ء۲۲۹۷۷۳۵

۲- اگر اَ = ۲۱، بَ = ۱۱ اور ج = ۳۴ ۴۲ َ۳۰ ً تو ا اور ب دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء

اور ل سس ۷۲ ۳۸ َ۴۵ ً = ۱۰ء۵۰۵۱۵

۳- اگر کسی مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہوں اور سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے اضلاع کے طول بالترتیب ۲۴ اور ۱۶ فٹ ہوں تو مثلث کے زاویئے دریافت کرو، نیز تیسرے ضلع کا طول معلوم کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء

اور ل سس ۱۹ ۹ َ = ۹ء۵۳۹۴۲۸۷ فرق اَ کے لئے = ۴۰۸۴

۴- اگر اَ = ۱۳، بَ = ۷ اور ج = ۶۰ تو ا اور ب کی قیمتیں دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۳ = ٫۴۷۷۱۲۱۳

اور ل مس ۲۷° ۲۶′ = ۹٫۷۱۵۵۵۰۸، فرق ۱′ کے لئے = ۳۰۸۷

۵۔ اگر ا = ۲ ب اور ج = ۱۲۰° تو ا اور ب کی قیمتیں دریافت کرو، نیز ج اور ا کی باہمی نسبت معلوم کرو؛ معلوم ہے

لوک ۳ = ٫۴۷۷۱۲۱۳

ورل مس ۱۰° ۵۳′ = ۹٫۲۸۳۹۰۷۰، فرق ۱′ کے لئے = ۶۸۰۸

۶۔ اگر ب = ۱۴، ج = ۱۱ اور ا = ۶۰° تو ب اور ج کی قیمتیں دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳، لوک ۳ = ٫۴۷۷۱۲۱۳

ل مس ۱۱° ۴۴′ = ۹٫۳۱۷۴۲۹۹

اور ل مس ۱۱° ۴۵′ = ۹٫۳۱۸۰۶۴۰

۷۔ ایک مثلث کے دو ضلعوں کے طول بالترتیب ۵۴۰ اور ۴۲۰ ہیں اوران کا درمیانی زاویہ ۵۲° ۶′ ہے، باقی زاویے دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳، ل مس ۲۶° ۳′ = ۹٫۶۸۹۱۴۳۰

ل مس ۱۴° ۲۰′ = ۹٫۴۰۷۴۱۸۹ اور ل مس ۱۴° ۲۱′ = ۹٫۴۰۷۹۴۵۳

۸۔ اگر ب = ۲½ فٹ، ج = ۲ فٹ اور ا = ۲۲° ۲۰′ تو باقی زاویے دریافت کرو اور ثابت کرو کہ تیسرا ضلع تقریباً ۱ فٹ ہے، معلوم ہے

لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳، لوک ۳ = ٫۴۷۷۱۲

ل مم ۱۱° ۱۰′ = ۱۰٫۷۰۴۶۵، ل جب ۲۲° ۲۰′ = ۹٫۵۷۹۷۷

ل مس ۲۹° ۲۲′ ۲۰″ = ۹٫۷۵۰۳۸، ل مس ۲۹° ۲۲′ ۳۰″ = ۹٫۷۵۰۴۳

اور ل جب ۴۹° ۲۷′ ۳۴″ = ۹٫۸۸۰۷۹

۹۔ اگر اَ = ۲، بَ = ۱ + ۳√ اور ج = ۹۰° تو مثلث کو حل کرو۔

۱۰۔ مثلث کے دو اضلاع ۳√ + ۱ اور ۳√ − ۱ ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ ۹۰° ہے، تیسرا ضلع اور باقی زاویے دریافت کرو

۱۱۔ اگر بَ = ۱، جَ = ۳√ − ۱ اور ا = ۹۰° تو ضلع اَ کا طول دریافت کرو

۱۲۔ اگر بَ = ۹۱، جَ = ۱۲۵؛ اور مس $\frac{ا}{۲}$ = $\frac{۱۷}{۶}$ تو ثابت کرو کہ اَ = ۲۰۴

۱۳۔ اگر اَ = ۵، بَ = ۴ اور جم (ا − ب) = $\frac{۳۱}{۳۲}$ تو ثابت کرو کہ تیسرا ضلع جَ = ۶

۱۴۔ ایک مثلث کا ایک زاویہ ۳۰° ہے اور اس کے متصل ضلعوں کے طول ۴۰ اور ۴۰ ۳√ گز ہیں، تیسرے ضلع کا طول دریافت کرو نیز باقی زاویوں میں انگریزی درجوں کی تعداد معلوم کرو

۱۵۔ ایک مثلث کے اضلاع ۹ اور ۳ ہیں اور ان کے مقابل کے زاویوں کا فرق ۹۰° ہے، مثلث کا قاعدہ اور اس کے زاویے دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳٫، لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳٫

لوک ۷۵۸۹۴ = ۴٫۸۸۰۲۰۷۴، لوک ۷۵۸۹۵ = ۴٫۸۸۰۲۱۳۲

ل مس ۲۶° ۳۳′ = ۹٫۶۹۸۶۸۴۷

اور ل مس ۲۶° ۳۴′ = ۹٫۶۹۹۰۰۰۶

۱۶۔ اگر مس فہ = $\frac{اَ - بَ}{اَ + بَ}$ م $\frac{ج}{۲}$ تو ثابت کرو کہ

جَ = (اَ + بَ) $\frac{\text{جب} \frac{ج}{۲}}{\text{جم فہ}}$

اگر اَ = ۳ ، بَ = ۱ اور ج = ۵۳° ۷′ ۴۸″

تو ا اور ب کو دریافت کرنے کے بغیر جَ دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ء۳۰۱۰۳ ، لوک ۲۵۲۹۸ = ۴ء۴۰۳۰۸۶۲

لوک ۲۵۲۹۹ = ۴ء۴۰۳۱۰۴۴ ، ل جم ۲۶° ۳۳′ ۵۴″ = ۹ء۹۵۱۵۴۵۲

اور ل مس ۲۶° ۳۳′ ۵۴″ = ۹ء۶۹۹۹۷۰۰

۱۷- ایک مثلث کے دو اضلاع ۲۳۷ اور ۱۵۸ فٹ ہیں اور اُن کا درمیانی زاویہ ۶۶° ۴۸′ ہے، قاعدہ اور باقی زاویے دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ء۳۰۱۰۳ ، لوک ۷۹ = ۱ء۸۹۷۶۳

لوک ۲۲۹۸۷ = ۴ء۳۵۵۷۸ ، ل مم ۳۳° ۲۰′ = ۱۰ء۱۸۱۹۷

ل جب ۳۳° ۲۰′ = ۹ء۷۳۹۹۸ ، ل مس ۱۶° ۵۴′ = ۹ء۴۸۲۶۲

ل مس ۱۶° ۵۵′ = ۹ء۴۸۳۰۸ ، ل قط ۱۶° ۵۴′ = ۱۰ء۰۱۹۱۷

اور ل قط ۱۶° ۵۵′ = ۱۰ء۰۱۹۲۱

[ضابطہ جم (ب - ج)/۲ = (بَ + جَ)/اَ جب ا/۲ کو استعمال کرو یا ضابطہ مثال ۴۱ کو]

ذیل کی چار مثالوں میں مطلوبہ لوکارتموں کو جدولوں سے لو

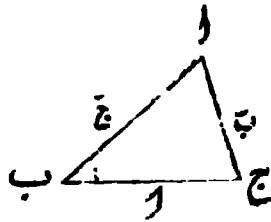
۱۸- اگر اَ = ۵ء۲۴۲ ، بَ = ۳ء۱۴۳ اور ج = ۵۴° ۳۶′ تو مثلث کو حل کرو

۱۹- اگر بَ = ۱۳۰ ، جَ = ۹۳ اور ا = ۴۲° ۱۵′ ۳۰″ تو مثلث کو حل کرو

۲۰- مثلث کے دو اضلاع ۴ء۲۲۶۵ اور ۱۷۷۹ فٹ ہیں اور اُن کا درمیانی زاویہ ۵۸° ۱۷′ ہے، باقی زاویے دریافت کرو

۲۱۔ مثلث کے دو اضلاع ۲۳۷۰۹ء۰ اور ۹۶ء۱۳۰ فٹ ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ ۵۷° ۵۹ ہے، باقی زاویے دریافت کرو

۱۹۰۔ صورت سوم۔ دو اضلاع بَ اور جَ معلوم ہیں اور اُن میں سے ایک کے مقابل کا زاویہ ب معلوم ہے، مثلث کو حل کرو۔

زاویہ ج ربط $\frac{\text{جب ج}}{\text{جَ}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{بَ}}$ سے

یعنی جب ج = $\frac{\text{جَ}}{\text{بَ}}$ جب ب .... (۱)

سے معلوم ہو سکتا ہے۔

طرفین کے لوگارتم لینے سے زاویہ ج معلوم ہو سکتا ہے اور پھر ا = ۱۸۰ - ب - ج جس سے ا حاصل ہوتا ہے

ضلع اَ ربط $\frac{\text{اَ}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جب ب}}$

یعنی اَ = بَ $\frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}$ .... (۲)

سے دریافت ہو سکتا ہے۔

۱۹۱۔ دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) سے بعض صورتوں

میں ج کی کوئی قیمت حاصل نہیں ہوتی اور بعض دفعہ ایک قیمت حاصل ہوتی ہے اور بعض دفعہ دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں
صورت اوّل۔ فرض کرو کہ زاویہ ب حادہ ہے
(ا) اگر بَ < جَ جب ب تو مساوات (۱) میں دائیں طرف کا رکن ایک سے بڑا ہوگا اور اس مساوات کے موافق ج کی کوئی قیمت نہیں ہوسکتی۔
(ب) اگر بَ = جَ جب ب تو (۱) میں دائیں طرف کا رکن ایک کے برابر ہوگا اور اس صورت میں ج کی قیمت ۹۰° درجہ ہوگی۔
(ج) اگر بَ > جَ جب ب تو ج کی دو قیمتیں ایسی ہونگی جن میں سے ہر ایک کی جیب $\frac{\text{جَ جب ب}}{\text{بَ}}$ ہوگی، ایک قیمت ۰° اور ۹۰° کے درمیان واقع ہوگی اور دوسری ۹۰° اور ۱۸۰° کے درمیان لیکن یہ دونوں قیمتیں ہمیشہ شرائط سوال کو پورا نہیں کرینگی۔
کیونکہ اگر بَ > جَ تو ب > ج، اب اس صورت میں ج کی منفرجہ قیمت جائز نہیں ہوسکتی کیونکہ ج زاویہ منفرجہ نہیں ہوسکتا جب تک کہ ب زاویہ منفرجہ ہو اور ایک ہی مثلث میں دو زاویوں میں سے ہر ایک کا قائمہ سے بڑا ہونا صریحاً ناممکن ہے۔
اگر بَ < جَ اور زاویہ ب حادہ ہو تو ج کی دونوں قیمتیں شرائط سوال کو پورا کریں گی، اس صورت میں ا کی دو قیمتیں ہونگی اور اس لئے ارتباط (۲) سے اَ کی بھی دو قیمتیں حاصل

ہونگی اور اس لئے دو مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا کریں گے ۔
صورت دوم۔ فرض کرو کہ ب منفرجہ ہے
اگر بَ < یا = جَ تو ب بالترتیب کم ہوگا یا برابر ہوگا ج کے
اس لئے ج زاویہ منفرجہ ہوگا اس صورت میں مثلث کا بننا ہی
ناممکن ہوگا
اگر بَ > جَ تو زاویہ ج کی حادہ قیمت جو مساوات (۱) سے
حاصل ہوگی شرائط سوال کو پورا کرے گی مگر منفرجہ قیمت جائز
نہیں ہوگی اس صورت میں مثلث کا صرف ایک جائز حل ہوگا
چونکہ بَ، جَ اور ب کی بعض قیمتوں کے لئے مثلث کے
حل کرنے میں شک یا اشتباہ واقع ہوتا ہے اس لئے اس
صورت کو مثلثوں کے حل کی **مشتبہ صورت** کہتے ہیں
۱۹۲۔ صورت مشتبہ پر بحث بطریق ہندسی اس طرح ہوسکتی ہے
فرض کرو کہ اجزاء بَ، جَ اور ب معلوم ہیں اور ہم مثلث کو بنانے
کی کوشش کرتے ہیں۔
سب سے اوّل زاویہ ا ب د برابر زاویہ ب کے بناؤ اسکے
بعد سمت ب ا میں طول ب ا کو جَ کے مساوی قطع کرو اس
طرح سے زاویہ ا کا نقطۂ راس معلوم ہو جائے گا۔
اب ہمیں ایک تیسرا نقطہ ج معلوم کرنا ہے جو ب د پر واقع ہو
اور جس کا فاصلہ نقطہ ا سے بَ کے برابر ہو، اس نقطہ کا مقام
دریافت کرنے کے لئے ا کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچو جس کا
نصف قطر بَ ہو، اب اگر یہ دائرہ ب د کو قطع کرے تو جو

نقطہ یا نقاط تقاطع اس طرح حاصل ہونگے ان سے ج کا مقام معلوم ہو جائے گا

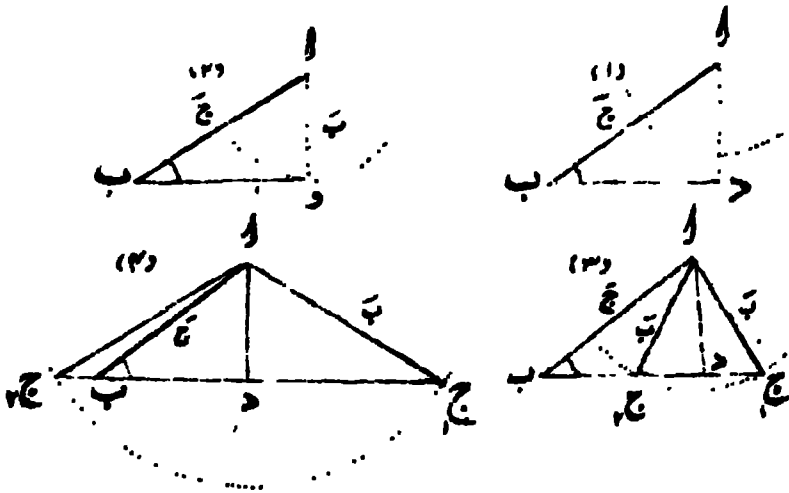
ب د پر عمود ا د نکالو پس

ا د = ا ب جب ب = ج جب ب

ذیل کی صورتوں میں سے ایک نہ ایک پیدا ہوگی

ممکن ہے کہ دائرہ ب د کو قطع نہ کرے (شکل اوّل)

یا ممکن ہے کہ دائرہ ب د کو مس کرے (شکل دوم)

یا دائرہ ب د کو دو نقطوں ج، اور ج۲ پر قطع کرے (اشکال سوم و چہارم)

پہلی شکل سے ظاہر ہے کہ اس صورت میں کوئی ایسا مثلث نہیں ہو سکتا جو شرائط مطلوبہ کو پورا کرے

اس صورت میں ب ج < ا د یعنی < ج جب ب

دوسری شکل سے ایک مثلث ا ب د حاصل ہوتا ہے جسمیں

زاویہ د قائمہ ہے

اس صورت میں بَ = اد = جَ جب ب

تیسری شکل سے دو مثلث ا ب ج۱ اور ا ب ج۲ حاصل ہوتے ہیں

اس صورت میں بَ بلحاظ مقدار کے اد اور جَ کے درمیان واقع ہے یعنی

بَ > جَ جب ب اور < جَ

چوتھی شکل میں صرف ایک مثلث ا ب ج۱ ایسا ہے جو شرائط سوال کو پورا کرتا ہے،

[مثلث ا ب ج۲ شرائط معلوبہ کو پورا نہیں کرتا کیونکہ اس میں مقام ب پر جو زاویہ بنتا ہے وہ زاویہ ب کے برابر نہیں لیکن وہ زاویہ ۱۸۰° - ب کے برابر ہے] ظاہر ہے کہ اس صورت میں مقدار بَ مقادیر جَ جب ب اور جَ دونوں سے بڑی ہے۔

اگر زاویہ ب منفرجہ ہو تو مناسب شکلیں کھینچنے سے معلوم ہوگا کہ اگر بَ < جَ تو کوئی مثلث شرائط معلوبہ کو پورا نہیں کر سکتا (کیونکہ مثلثوں ا ب ج۱ اور ا ب ج۲ میں مقام ب پر جو زاویہ بنے گا وہ ۱۸۰° - ب کے برابر ہوگا اور ب کے برابر نہیں ہوگا) اگر بَ > جَ تو معلوم ہوگا کہ اس صورت میں صرف ایک مثلث شرائط معلوبہ کو پورا کر سکتا ہے

اوپر کے نتائج کا خلاصہ یہ ہے

فرض کرو کہ مثلث کے اجزا بَ، جَ، ب معلوم ہیں

(۱) اگر بَ < جَ جب ب تو اس صورت میں کوئی مثلث

شرائط سوال کو پورا نہیں کرتا۔

(۲) اگر بَ = جَ جب ب تو ایک مثلث قائم الزاویہ شرائط سوال کو پورا کرتا ہے

(۳) اگر بَ > جَ جب ب اور < جَ اور زاویہ ب حادہ ہو تو دو مثلث شرائط معلومہ کو پورا کرتے ہیں

(۴) اگر بَ > جَ تو اس صورت میں صرف ایک مثلث ہوگا

صریحاً اگر بَ = جَ تو شکل سوم میں نقاط ب اور ج ایک دوسرے پر منطبق ہونگے اور اس صورت میں صرف ایک مثلث ہوگا،

(۵) اگر ب منفرجہ ہو تو کوئی مثلث شرائط سوال کو پورا نہیں کر سکتا سوائے اس صورت کے جبکہ بَ > جَ

۱۹۳ – صورت مشتبہ پر بحث بطریق جبریہ اس طرح ہو سکتی ہے۔

شکل دفعہ ۱۹۰ سے حاصل ہوگا

$$\text{بَ}^2 = \text{جَ}^2 + \text{اَ}^2 - 2\,\text{جَ}\,\text{اَ}\ \text{جم ب}$$

$$\therefore\ \text{اَ}^2 - 2\,\text{اَ}\,\text{جَ}\ \text{جم ب} + \text{جَ}^2\,\text{جم}^2\text{ب}$$

$$= \text{بَ}^2 - \text{جَ}^2 + \text{جَ}^2\,\text{جم}^2\text{ب} = \text{بَ}^2 - \text{جَ}^2\,\text{جب}^2\text{ب}$$

$$\therefore\ \text{اَ} - \text{جَ}\ \text{جم ب} = \pm\sqrt{\text{بَ}^2 - \text{جَ}^2\,\text{جب}^2\text{ب}}$$

یعنی $\text{اَ} = \text{جَ}\ \text{جم ب} \pm \sqrt{\text{بَ}^2 - \text{جَ}^2\,\text{جب}^2\text{ب}}$ ...... (۱)

مساوات (۱) سے اَ کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے اگر بَ، جَ

اور ب معلوم ہوں

(ا) اگر ب < ج جب ب تو مقدار $\sqrt{ب^2 - ج^2 جب^2 ب}$ خیالی ہوگی اور (۱) سے ا کی کوئی حقیقی قیمت حاصل نہ ہوگی

(ب) اگر ب = ج جب ب تو ا کی صرف ایک قیمت ج جب ب ہوگی

پس اس صورت میں صرف ایک مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا کرے گا اور وہ مثلث قائم الزاویہ ہوگا۔

(ج) اگر ب > ج جب ب تو ا کی دو قیمتیں ہونگی لیکن چونکہ ا کا مثبت ہونا ضروری ہے اس لئے مساوات (۱) میں ہم علامت جذر کے ماقبل منفی علامت صرف اُس صورت میں لے سکتے ہیں

جبکہ ج جم ب - $\sqrt{ب^2 - ج^2 جب^2 ب}$ مثبت ہو

یعنی جبکہ $\sqrt{ب^2 - ج^2 جب^2 ب}$ < ج جم ب

یعنی $ب^2 - ج^2 جب^2 ب < ج^2 جم^2 ب$ یعنی $ب^2 < ج^2$

اس لئے معلوم ہوا کہ دو مثلث صرف اُسی صورت میں حاصل ہونگے جبکہ ب > ج جب ب اور ساتھ ہی < ج

(د) اگر زاویہ ب منفرجہ ہو تو ج جم ب منفی ہوگا اور ا کی ایک قیمت ہمیشہ منفی ہوگی اور مثلث ناممکن ہوگا

دوسری قیمت صرف اُس صورت میں مثبت ہوگی

اگر ج جم ب + $\sqrt{ب^2 - ج^2 جب^2 ب}$ مثبت ہو

یعنی اگر √(بَ^۲ - جَ^۲ جب^۲ ب) > - جَ جم ب

یعنی اگر بَ^۲ > جَ^۲ جب^۲ ب + جَ^۲ جم^۲ ب

یعنی اگر بَ > جَ

اس لئے معلوم ہوا کہ جب زاویہ ب منفرجہ ہو تو کوئی مثلث شرائط سوال کو پورا نہیں کر سکتا اگر بَ < جَ، اور صرف ایک مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا کرے گا اگر بَ > جَ

۱۹۴- مثال- معلوم ہے بَ = ۱۶، جَ = ۲۵ اور ب = ۳۳° ۱۵'، ثابت کرو کہ مثلث کا حل مشتبہ ہے، باقی زاویے دریافت کرو معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳،۰، ل جب ۳۳° ۱۵' = ۹٫۷۳۹۰۱۲۹

ل جب ۵۸° ۵۶' = ۹٫۹۳۲۷۶۱۶

اور ل جب ۵۸° ۵۷' = ۹٫۹۳۲۸۳۷۶

جب ج = جَ/بَ جب ب = ۲۵/۱۶ جب ب = ۱۰۰/۶۴ جب ب = ۱۰^۲/۲^۶ جب ۳۳° ۱۵'

اس لئے ل جب ج = ۲ + ل جب ۳۳° ۱۵' - ۶ لوک ۲ = ۹٫۹۳۲۸۳۲۹

اس لئے ل جب ج = ۹٫۹۳۲۸۳۲۹

ل جب ۵۸° ۵۶' = ۹٫۹۳۲۷۶۱۶

فرق = ۷۱۳

ل جب ۵۸° ۵۷' = ۹٫۹۳۲۸۳۷۶

ل جب ۵۸° ۵۶' = ۹٫۹۳۲۷۶۱۶

فرق اَ کے لئے = ۷۶۰

∴ زاوی فرق = ۷۱۳/۷۶۰ × ۶۰"

= ۵۶" تقریباً

۷۱۳
۶
۷۶)۴۲۷۸(۵۶
۳۸۰
۴۷۸
۴۵۶

∴ ج = ۵۸° ۵۶′ ۵۶″ یا ۱۸۰° − ۵۸° ۵۶′ ۵۶″

اس لئے (شکل ۳ دفعہ ۱۹۲) سے حاصل ہوگا

ج = ۵۸° ۵۶′ ۵۶″ اور ج۱ = ۱۲۱° ۳′ ۴″

∴ ∠ ب ا ج = ۱۸۰° − ۳۳° ۱۵′ − ۵۸° ۵۶′ ۵۶″

= ۸۷° ۴۸′ ۴″

اور ب ا ج۱ = ۱۸۰° − ۳۳° ۱۵′ − ۱۲۱° ۳′ ۴″

= ۲۵° ۴۱′ ۵۶″

امثلہ نمبری ۳۱

[طالب علم کو امثلہ ذیل میں سے بعض (مثلاً ۳، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۳) کے نتائج کی ترسیمی حل سے تصدیق کرنی چاہیئے]

۱- اگر ا = ۵، ب = ۷ اور جب ا = ۳/۴ تو معلوم کرو کہ مثلث کے حل کرنے میں مشتبہ صورت پیدا ہوگی یا نہیں۔

۲- اگر ا = ۲، ج = √۳ + ۱ اور ا = ۴۵° تو مثلث کو حل کرو

۳- اگر ا = ۱۰۰، ج = ۱۰۰ √۲ اور ا = ۳۰° تو مثلث کو حل کرو

۴- اگر ۲ ب = ۳ ا اور مس ا = ۳/۵ تو ثابت کرو کہ تیسرے ضلع کی دو قیمتیں ہوسکتی ہیں جن میں سے ایک دوسری کی دوچند ہے

۵- اگر ا = ۳۰°، ب = ۸ اور ا = ۶ تو ج دریافت کرو

۶- معلوم ہے ب = ۳۰°، ج = ۱۵۰ اور ب = ۵۰ √۳ ثابت کرو کہ اُن دو مثلثوں میں سے جو شرائط سوال کو پورا کرتے ہیں ایک مثلث متساوی الساقین ہے اور دوسرا مثلث قائم الزاویہ ہے،

تیسرے ضلع کی بڑی قیمت دریافت کرو

اگر ب = ۳۰°، ج = ۱۵۰ اور ب = ۷۵ تو کیا حل مشتبہ ہوگا؟

۷ - صورت مشتبہ میں آ، ب اور ا معلوم ہیں، ثابت کرو کہ ج کی دو قیمتوں کا تفاوت ۲ √(آ² - ب² جب² ا) ہے

۸ - اگر آ = ۵، ب = ۴ اور ا = ۴۵° تو مثلث کے باقی زاوے دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، ل جب ۳۳° ۴۹′ = ۹ء۷۴۵۲۰۵۰۷

اور ل جب ۳۳° ۳۰′ = ۹ء۷۵۳۰۹۹۳

۹ - اگر آ = ۹، ب = ۱۲ اور ا = ۳۰° تو ج دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء لوک ۳ = ۴۷۷۱۲ء

لوک ۱۷۱ = ۲ء۲۳۳۰۱ لوک ۳۶۸ = ۲ء۵۶۵۳۵

ل جب ۴۱° ۴۸′ ۳۹″ = ۹ء۸۲۳۹۱، ل جب ۱۰۸° ۱۱′ ۲۱″ = ۹ء۳۱۱۰۸

اور ل جب ۱۰۸° ۱۱′ ۲۱″ = ۹ء۹۷۷۴

۱۰ - معلوم کرو کہ ذیل کے مثلثوں کے حل مشتبہ ہیں یا نہیں۔ صورت مشتبہ میں تیسرے ضلع کی چھوٹی قیمت اور دونوں صورتوں میں باقی زاوے دریافت کرو

(۱) ا = ۳۰°، ج = ۲۵۰ فٹ اور آ = ۱۲۵ فٹ

(۲) ا = ۳۰°، ج = ۲۵۰ فٹ اور آ = ۲۰۰ فٹ

معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء، لوک ۹۶ء۰۳۸۹۳ = ۷۸۰۹۶۰۱ء

ل جب ۳۸° ۴۱′ ۴۱″ = ۹ء۷۹۵۸۸۰۰

اور　ل جب ۸° ۴۱′ = ۹٫۱۷۸۹۰۰۱

۱۱- معلوم ہے اَ = ۲۵۰، بَ = ۲۴۰ اور اِ = ۷۲° ۴′ ۴۸″ زاویے ب اور ج دریافت کرو اور نیز یہ بھی معلوم کرو کہ کیا ان کی ایک سے زیادہ قیمت ہوسکتی ہے؟

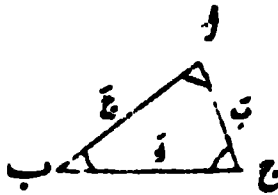
معلوم ہے، لوک ۲٫۵ = ۰٫۳۹۷۹۴۰۰، لوک ۲٫۴ = ۰٫۳۸۰۲۱۱۲،
ل جب ۷۲° ۴′ = ۹٫۹۷۸۳۶۰۲، ل جب ۷۲° ۵′ = ۹٫۹۷۸۴۱۱۱
اور　ل جب ۶۵° ۵۹′ = ۹٫۹۶۰۶۷۳۹

۱۲- دو سیدھی سڑکیں ایک دوسرے کو زاویہ ۳۰° پر قطع کرتی ہیں اور اُن کے مقام تقاطع سے دو مسافر ا اور ب ایک ہی وقت پر روانہ ہوتے ہیں، ا ایک سڑک پر ۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جاتا ہے اور ب یکساں رفتار سے دوسری سڑک پر چلتا ہے، تین گھنٹہ کے بعد اُن کا باہمی فاصلہ ۹ میل ہے ثابت کرو کہ اس شرط کو پورا کرنے کے لئے ب کی رفتار کی دو قیمتیں ہوسکتی ہیں، انکو معلوم کرو

۱۳- ایک مثلث کا ایک ضلع ۷۳۲ فٹ ہے اور اس کے مقابل کا زاویہ ۴۰° ہے، مثلث کا دوسرا ضلع ۱۰۱۵ فٹ ہے، اسکے مقابل کا زاویہ دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اس زاویہ کی ایک سے زیادہ قیمتیں ہوسکتی ہیں۔

۱۴- ایک مثلث کے دو اضلاع ۵۳۷۴٫۵ اور ۱۵۸۹٫۶ فٹ ہیں اور ضلع ۱۵۸۶٫۶ کے مقابل کا زاویہ ۱۵° ۱۱′ ہے، مثلث یا مثلثوں کے باقی زاویے دریافت کرو

۱۵- معلوم ہے اِ = ۱۰°، اَ = ۲۳۰۸٫۷ اور بَ = ۷۹۰۳٫۲ جَ کی چھوٹی قیمت دریافت کرو۔

۱۹۰ – صورت چہارم - ایک ضلع اور دو زاوئے یعنی اَ
ر ب اور ج معلوم ہیں
نکہ ایک مثلث کے تین زاوئے دو قائموں کے برابر ہوتے
یں اس لئے تیسرا زاویہ معلوم
و سکتا ہے،
ضلاع بَ اور جَ ارتباطات
یل سے حاصل ہو سکتے ہیں

$$\frac{بَ}{جب\ ب} = \frac{جَ}{جب\ ج} = \frac{اَ}{جب\ ا}$$

ہں سے بَ = اَ $\frac{جب\ ب}{جب\ ا}$ اور جَ = اَ $\frac{جب\ ج}{جب\ ا}$

۱۹۱ – صورت پنجم - تینوں زاوے ا، ب، ج معلوم ہیں
ں صورت میں صرف اضلاع کی نسبتیں ذیل کے ضابطوں سے
علوم ہو سکتی ہیں -

$$\frac{اَ}{جب\ ا} = \frac{بَ}{جب\ ب} = \frac{جَ}{جب\ ج}$$

ضلاع کی مطلق قیمتیں اس صورت میں معلوم نہیں ہو سکتیں

امثلہ نمبری ۳۲

– اگر جم ا = $\frac{۱۱}{۲۲}$ اور جم ج = $\frac{۱}{۱۴}$ تو اَ : بَ : جَ کی نسبتیں دریافت کرو
ا – ایک مثلث کے زاویوں کی باہمی نسبتیں ۱ : ۲ : ۷ ہیں ثابت کرو

(سب سے بڑے ضلع کی نسبت سب سے چھوٹے ضلع کے ساتھ
√۵ + ۱ : √۵ − ۱ ہے۔

۳۔ اگر ا = ۴۵°، ب = ۷۵° اور ج = ۶۰° تو ثابت کرو کہ
ا + ج √۲ = ۲ ب

۴۔ ایک مثلث کے دو زاویے بالترتیب ۴۱° ۱۳′ ۲۲″ اور ۷۱° ۱۹′ ۵″ ہیں اور پہلے زاویہ کے مقابل کا ضلع ۵۵ ہے، دوسرے زاویے کے مقابل جو ضلع ہو اُس کا طول دریافت کرو، معلوم ہے
لوک ۵۵ = ۱٫۷۴۰۳۶۲۷، لوک ۷۹۰۶۳ = ۴٫۸۹۷۹۷۷۵

ل جب ۴۱° ۱۳′ ۲۲″ = ۹٫۸۱۸۸۷۷۹

اور ل جب ۷۱° ۱۹′ ۵″ = ۹٫۹۷۶۴۹۲۷

۵۔ دو جہازوں کے درمیان فاصلہ ایک میل ہے اور ہر ایک جہاز سے اُس زاویہ کا مشاہدہ کیا گیا ہے جو دوسرے جہاز اور کنارہ پر کے ایک منارۂ روشنی کے درمیانی فاصلے کے محاذی اول الذکر جہاز پر بنتا ہے اور یہ زاویے بالترتیب ۵۲° ۲۵′ ۱۵″ اور ۷۵° ۹′ ۳۰″ ہیں، معلوم ہے

ل جب ۷۵° ۹′ ۳۰″ = ۹٫۹۸۵۲۶۳۵

ل جب ۵۲° ۲۵′ ۱۵″ = ۹٫۸۹۹۰۰۵۵

لوک ۱٫۲۱۹۷ = ۰٫۰۸۶۲۵۳۰ اور لوک ۱٫۲۱۹۸ = ۰٫۰۸۶۲۸۸۶
ہر ایک جہاز سے روشنی کا فاصلہ دریافت کرو

۶۔ ایک مثلث میں قاعدے کے متصل زاویے ۲۲½° اور ۱۱۲½° ہیں، ثابت کرو کہ قاعدہ ارتفاع کا دو چند ہے۔

ذیل کی پانچ مثالوں کے لئے لوگارتمی جدولوں کی ضرورت ہوگی

۷- ایک مثلث کا قاعدہ ۷ فٹ ہے اور قاعدے کے متصل زاویے ۱۲۹° ۲۳′ اور ۳۸° ۴۶′ ہیں، چھوٹے ضلع کا طول دریافت کرو

۸- اگر ایک مثلث کے زاویوں کی باہمی نسبتیں ۵ : ۱۰ : ۲۱ ہوں اور چھوٹے زاویے کے مقابل کا ضلع ۳ فٹ ہو تو باقی اضلاع دریافت کرو۔

۹- ایک مثلث کے زاویے ۱۵۰° ۱۸′ ۲۰″ اور ۱۱° ۴۲′ ہیں اور سب سے بڑا ضلع ۱۰۰۰ فٹ ہے، سب سے چھوٹا ضلع دریافت کرو

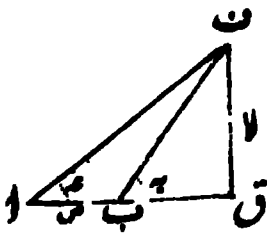
۱۰- نقطہ ب سے نقطہ ا کا فاصلہ دریافت کرنے کے لئے خط ب ج اور زوایا ا ب ج اور ب ج ا کو ناپا گیا ہے اور ان کی پیمائشیں بالترتیب ۲۸۷ گز اور ۵۵° ۴۲′ ۱۰″ اور ۱۵° ۸′ ۴۰″ ہیں، فاصلہ اب دریافت کرو۔

۱۱- فاصلہ اف معلوم کرنے کی غرض سے اب مساوی ۱۰۰۰ گز کسی مناسب سمت میں ناپا گیا ہے، نقاط ا اور ب پر کے زاویے ف اب اور ف ب ا بالترتیب ۴۱° ۱۸′ اور ۱۱۴° ۴۸′ مشاہدہ کئے گئے ہیں، فاصلہ اف کو قریب ترین گز تک دریافت کرو

باب چہاردہم

بلندیاں اور فاصلے

۱۹۷۔ اس باب میں ہم خاص قسم کے عملی مسائل پر غور کرینگے جو بالعموم ارضی پیمائشوں میں استعمال ہوتے ہیں۔ اس قسم کے سادہ سوالات کا ذکر باب سوم میں آچکا ہے

۱۹۸۔ مختلف مقامات پر زاویوں کا مشاہدہ کرنے سے ایک ایسے برج کی بلندی دریافت کرو جس تک ہم نہیں پہنچ سکتے۔

فرض کرو کہ ف ق برج ہے اور پائین برج ق میں سے جو زمین گذرتی ہے وہ متوازی الافق ہے۔

اس زمین کے نقطہ ا پر برج کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ع ناپو مقام ا سے پائین برج کی سیدھ میں فاصلہ اب (= ص) ناپو

ر مقام ب پر زاویۂ ارتفاع بہ مشاہدہ کرو۔
ب برج کی بلندی لا مطلوب ہے ، اس کو فاصلہ ص سے
ں طرح منسلک کرو۔
لث ن ب ق سے

ب ق / ن ب = جب بہ .... (۱)

ر مثلث ن ا ب سے

ن ب / ص = جب ن ا ب / جب ب ن ا = جب عہ / جب (بہ - عہ) .... (۲)

نکہ ∠ ب ن ا = ∠ ق ب ن - ∠ ق ا ن = بہ - عہ

(۱) اور (۲) کو باہم ضرب دینے سے

لا / ص = جب عہ جب بہ / جب (بہ - عہ)

ینی لا = ص جب عہ جب بہ / جب (بہ - عہ)

س سے بلندی لا حاصل ہوتی ہے اور اس ضابطہ کی صورت
وکارتمی حسابات کے لئے نہایت موزوں ہے۔

عددی مثال — اگر ص = ۱۰۰ فٹ ، عہ = ۳۰° اور
= ۶۰° تو

ا = ۱۰۰ جب ۳۰° جب ۶۰° / جب ۳۰° = ۱۰۰ × √۳ / ۲ = ۸۶٫۶ فٹ

۱۹— اگر فاصلہ ا ب کو ق کی سیدھ میں ناپنا آسان

نہ ہو تو اس کو سطح اُفقی پر کسی اور مناسب سمت میں ناپو اور مقام ا پر ف کا زاویۂ ارتفاع عہ مشاہدہ کرو، نیز زاویہ ف ا ب (= بہ) معلوم کرو۔

مقام ب پر زاویہ ف ب ا (= جہ) ناپو۔

مثلث ف ا ب میں

∠ ا ف ب = ۱۸۰° - ∠ ف ا ب - ∠ ف ب ا

= ۱۸۰° - (بہ + جہ)

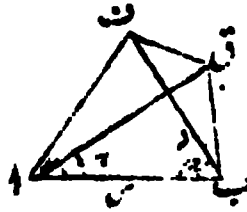
اس لئے $\frac{\text{ا ف}}{\text{ص}} = \frac{\text{جب ف ب ا}}{\text{جب ب ف ا}} = \frac{\text{جب جہ}}{\text{جب (بہ + جہ)}}$

مثلث ف ا ق سے حاصل ہوگا۔

$$\text{لا} = \text{ا ف جب عہ} = \text{ص}\ \frac{\text{جب عہ جب جہ}}{\text{جب (بہ + جہ)}}$$

اور یہ جملہ لوکارتمی حسابات کے لئے موزوں ہے۔

۲۰۰۔ دو مقامات کے درمیان کا فاصلہ معلوم ہے، اُن پر کھڑے ہوکر دو اور ایسے مقامات کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو جن تک ہم نہیں پہنچ سکتے، چاروں بمقام

یک ہی سطح میں واقع ہیں۔
فرض کرو کہ ف اور ق دو مقام ہیں جن کا باہمی فاصلہ ف ق مطلوب ہے۔
فرض کرو کہ مقامات ا اور ب کا فاصلہ (ص) دیا ہوا ہے مقام ا پر زاوئے ف ا ب اور ق ا ب ناپو اور ان کو بالترتیب عہ اور بہ سے تعبیر کرو۔
نیز مقام ب پر زاوئے ف ب ا اور ق ب ا ناپو اور انکو بالترتیب جہ اور لہ سے تعبیر کرو۔
اب چونکہ مثلث ف ا ب میں ایک ضلع ص اور دو متصل زاوئے عہ اور جہ معلوم ہیں اس لئے بموجب دفعہ ۱۲۹، اف ذیل کے ربط سے حاصل ہو سکتا ہے

$$\frac{\text{اف}}{\text{ص}} = \frac{\text{جب جہ}}{\text{جب اف ب}} = \frac{\text{جب جہ}}{\text{جب(عہ+جہ)}} \quad \text{......(۱)}$$

اسی طرح سے مثلث ق ا ب میں

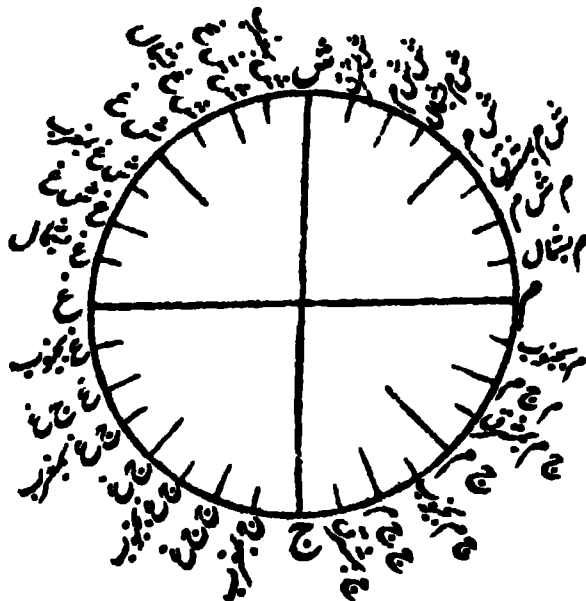
$$\frac{\text{اق}}{\text{ص}} = \frac{\text{جب لہ}}{\text{جب(بہ+لہ)}} \quad \text{......(۲)}$$

اب ہمیں مثلث ا ف ق کے اضلاع اف اور اق نیز انکا درمیانی زاویہ ف ا ق (= عہ - بہ) معلوم ہوگیا اس لئے ہم ضلع ف ق کو ترکیب دفعہ ۸۷ سے

معلوم کر ہیں۔

اگر چاروں مقامات ا، ب، ف، ق ایک ہی سطح میں نہ ہوں تو ہمیں زاویہ ف ا ق بھی ناپ لینا چاہئے کیونکہ اس صورت میں ف ا ق زاویہ عہ - بہ کے برابر نہیں ہے، باقی سب طرح سے حل مندرجہ بالا عمل کے مطابق ہوگا۔

۲۰۱ — بحری قطب نما کے نقاط و جہات

اگر نقطہ معینہ و پر کھڑے ہوکر ایک اور نقطہ معلومہ ب کی طرف دیکھیں تو جس سمت میں نقطہ ب نقطہ و سے نظر آئے اس کو بلحاظ نقطہ و کے نقطہ ب کی جہت کہتے ہیں مثلاً اگر و ب اسمات شمال اور

مشرق سے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرے تو
ب کی جہت یا سمت کو ہم "شمال۔ مشرق" کہینگے۔
اگر یہ کہا جائے کہ ایک خط کی جہت یا سمت شمال سے
۲۰° مغرب کو ہے تو اس کا یہ مطلب ہوگا کہ یہ سمت
شمال سے زاویہ ۲۰° بناتی ہے اور یہ زاویہ شمال کی
جانب سے مغرب کی طرف کو ناپا گیا ہے۔
اس غرض سے کہ ایک نقطہ کی جہت بآسانی قائم
ہو سکے یا بیان ہو سکے بحری قطب نما کے کارڈ کو
۳۲ مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں ملاحظہ ہو شکل بالا
ان حصوں میں مختلف نشان لگے ہوئے ہیں۔ فرض کرو
کہ فی الحال زیر بحث صرف وہی ربع ہے جو شمال اور
مشرق کے درمیان واقع ہے۔ ش اور م کی درمیانی
قوس کے نقطہ وسط پر نشان ش م یعنی "شمال۔مشرق"
بنا ہوا ہے۔
نیز ش م اور ش اور م کے درمیان جو قوسیں ہیں
ان کے منصّفوں پر بالترتیب "شمال۔ شمال۔مشرق" اور
"مشرق۔شمال۔مشرق" (یعنی ش ش م اور م ش م)
لکھا ہوا ہے۔
اگر شمال کی طرف سے شمار کیا جائے تو باقی چھوٹے
چار حصوں کو شمال بمشرق، ش م بشمال، ش م بمشرق
اور مشرق بشمال کہتے ہیں اسی طرح سے قطب نما کے

باقی تین حصے بھی منقسم ہو سکتے ہیں ۔
ظاہر ہے کہ کارڈ کے دو چھوٹے درجوں کی درمیانی قوس کے محاذی
مرکز و پر زاویہ $\frac{360^\circ}{32}$ یعنی $11\frac{1}{4}^\circ$ بنتا ہے ۔

امثلہ نمبری ۳۳

۱ ۔ ایک مربع برج کے وسط میں ایک علم قائم ہے، ایک شخص کو جو برج کے ایک رخ کے وسط کے مقابل زمین پر چلتا ہے علم کی چوٹی عین سو فٹ کے فاصلے سے دکھائی دینی شروع ہوتی ہے، ۱۰۰ فٹ پیچھے ہٹنے پر وہ برج کی چوٹی اور علم کی چوٹی کے ارتفاعی زاویوں کو مشاہدہ کرتا ہے، ان زاویوں کے ظل بالترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{5}{9}$ ہیں، برج کی بلندی اور عرض نیز علم کی بلندی دریافت کرو، زمین متوازی الافق ہے ۔

۲ ۔ سطح ہموار پر ایک شخص ایک برج کی سیدھ میں جاتا ہے اور ایک خاص مقام پر برج کا زاویہ ارتفاع 10° مشاہدہ کرتا ہے، برج کی سمت میں ۵۰ گز جانے کے بعد وہی زاویہ ارتفاع 15° دکھائی دیتا ہے، اگر معلوم ہو
ل جب $15^\circ = 9.4129962$ و ل جم $5^\circ = 9.9983442$
لوک $25.783 = 1.4113334$ اور لوک $25.784 = 1.4113502$
تو برج کی بلندی گزوں میں ۴ مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو ۔

۳ ۔ ایک برج (ع) سطح افقی پر کھڑا ہے اور اسی

سطح میں ایک خط ا ب ج د واقع ہے ۔ برج کی بلندی کے محاذی ا پر زاویہ طہ ، ب پر زاویہ ۲طہ اور ج پر زاویہ ۳طہ بنتا ہے اگر ا ب اور ب ج بالترتیب ۵۰ اور ۲۰ فٹ ہوں تو برج کی بلندی اور فاصلہ ج د معلوم کرو۔

۴ ـــ ایک ۵۰ فٹ اونچا برج ایک ٹیلے کی چوٹی پر واقع ہے ، سطح زمین پر کے کسی نقطہ سے برج کے پائین اور راس کے ارتفاعی زاوئے بالترتیب °۷۵ اور °۴۵ ناپے گئے ہیں ، ٹیلے کی بلندی دریافت کرو۔

۵ ـــ ایک عمودی لاٹھ ۱۰۰ فٹ سے زیادہ اونچی ہے اور اس کے دو حصے ہیں ، نچلا حصہ کل طول کا $\frac{1}{3}$ ہے ، لاٹھ کی جڑمیں سے جو سطح اُفقی گذرتی ہے اس پر ایک نقطہ لاٹھ سے ۴۰ فٹ کے فاصلے پر لیا گیا ہے اور اوپر کے حصے کے محاذی اُس نقطہ پر جو زاویہ بنتا ہے اُسکا مماس $\frac{1}{2}$ ہے ، لاٹھ کی بلندی دریافت کرو۔

۶ ـــ ایک برج کے محاذی ایک نقطہ پر جو پائین برج میں سے گذرنیوالی سطح اُفقی پر واقع ہے زاویہ ھ بنتا ہے اور ایک دوسرے نقطہ پر جو پہلے نقطہ سے ح فٹ اونچا ہے پائین برج کا زاویہ انخفاض یہ مشاہدہ کیا گیا ہے ، برج کی بلندی دریافت کرو۔

۷ ـــ سطح سمندر کے کنارے ہموار زمین کے کسی مقام سے ایک شخص غبارہ کے ذریعہ سمت راس میں اوپر چڑھا اور

اس نے سمندر میں ایک ساکن جہاز کا زاویہ نشیب ۳۰° مشاہدہ کیا، پھر ۶۰۰ فٹ عمودی سمت میں نیچے اترنے کے بعد اس نے دیکھا کہ زاویہ نشیب ۱۵° ہے، نقطہ صعود سے جہاز کا افقی فاصلہ دریافت کرو۔

۸ — سطح ہموار پر ایک برج ف ق کا پائیں ق ہے، اسی سطح افقی میں دو اور نقاط ا اور ب ایسے ہیں کہ ∠ ق ا ب = ۹۰° اور ا ب = ۴۰ فٹ، نیز یہ معلوم ہے کہ

مم ف ا ق = ۳/۱۰ اور مم ف ب ق = ۱/۴

برج کی بلندی دریافت کرو۔

۹ — ایک مینار کسی شخص کے م ج م کی طرف واقع ہے، اور دوپہر کے وقت اس کے سایہ کا سرا ایک شخص کے شمال۔مشرق کی طرف ہوتا ہے، اگر سایہ ۸۰ فٹ لمبا ہو اور نقطہ نظر سے مینار کا ارتفاع ۴۵° ہو تو مینار کی بلندی دریافت کرو۔

۱۰ — دو مقامات ا اور ب سے ایک برج کا مشاہدہ کرنے پر معلوم ہوا کہ یہ ا کے شمال کی طرف اور ب کے شمال۔مغرب کی طرف واقع ہے۔ ب مقام ا سے ۱۰۰ فٹ کے فاصلے پر مشرق کی طرف کو ہے، اگر مقام ا سے برج کا زاویہ ارتفاع دیکھا جائے تو یہ زاویہ اس زاویہ ارتفاع کے متمم کے برابر ہوتا ہے جو مقام ب سے مشاہدہ کیا گیا ہو، برج کی بلندی دریافت کرو۔

۱۱ــــ ایک مینار کا ارتفاع ایک ایسے مقام سے جو اس کے جنوب کی طرف واقع ہے ۴۵° ہے اور ایک دوسرے مقام سے جو مقام اول الذکر کے مغرب کی طرف واقع ہے ۱۵° ہے، اگر ان دو مقامات کے درمیان فاصلہ ا ہو تو ثابت کرو کہ

بلندی $\frac{ا(\sqrt{۳}-۱)}{۲\sqrt[۴]{۳}}$ ہے۔

۱۲ــــ ایک گرجے کے برج کا قاعدہ شکل میں مربع ہے، ایک شخص اس کے قطر ممدودہ پر ۲ا فٹ کے فاصلے پر کھڑا ہوکر برج کی چوٹی کے دو بیرونی کونوں میں سے ہر ایک کے زاویہ ارتفاع کو ۳۰° مشاہدہ کرتا ہے، نیز سب سے نزدیک کونے کا ارتفاع ۴۵° ہے، ثابت کرو کہ برج کا عرض $ا(\sqrt{۱۰}-\sqrt{۲})$ فٹ ہے۔

۱۳ــــ ایک برج سطح افقی پر قائم ہے اور ایک شخص اس کے جنوب کی طرف مقام ا پر کھڑا ہوکر اس کا زاویہ ارتفاع ۶۰° مشاہدہ کرتا ہے، پھر وہ ا کے مغرب کی طرف مقام ب پر جاتا ہے اور اس جگہ زاویہ ارتفاع ۴۵° پاتا ہے، اس کے بعد اب ممدودہ میں ایک مقام ج پر زاویہ ارتفاع ۳۰° ہوتا ہے، ثابت کرو کہ مقام ب مقامات ا اور ج کے عین وسط میں واقع ہے۔

۱۴ــــ ایک افقی قاعدہ کا طول ۲ا ہے اور اس کے دو کناروں سے ایک چوٹی کا زاویہ ارتفاع ط مشاہدہ کیا گیا ہے

اس کے وسط سے یہی زاویہ فہ دکھائی دیتا ہے ثابت
کہ چوٹی کی بلندی $\frac{\text{ا جب طہ جب فہ}}{\sqrt{\text{جب(فہ+طہ) جب(فہ-طہ)}}}$ ہے

ا ــــ دو مقامات ا اور ب کے درمیان فاصلہ ۱۰۰۰ فٹ ہے
ا سطح اُفقی میں جس میں ا ب واقع ہے ف اور ق
ا ب کی ایک ہی جانب میں واقع ہیں، زاوئے
ا ب، ف ب ا، ق ا ب، ق ب ا بالترتیب
°، °۳۰، °۴۵ اور °۹۰ ہیں، معلوم کرو کہ ف مقام ق
ے کتنی دور ہے اور انہیں سے ہر ایک ا اور ب سے
، دور ہے۔

امثلہ ذیل کے حل کرنے میں لوکارثمی جداول کی ضرورت ہوگی

ــــ سطح اُفقی کے ایک نقطہ پر کسی پہاڑ کی چوٹی کا
تفاع °۲۲ ۱۵َ ہے اور سطح کے ایک اور نقطہ پر جو کہ
ڑ اور نقطہ اول کو ملانے والے خط راست میں نقطہ
ل سے ایک میل کے فاصلے پر واقع ہے چوٹی کا
تفاع °۱۰ ۱۲َ ہے، پہاڑ کی بلندی دریافت کرو۔

ا ــــ ایک پہاڑ کی چوٹی سے دو مسلسل میل کے پتھروں
، انخفاضی زاوئے °۵ اور °۱۰ مشاہدہ کئے گئے ہیں،
ر ہموار زمین پر ایک ایسی سطح عمودی میں واقع ہیں
نقطہ نظر میں سے گذرتی ہے، پہاڑ کی بلندی اور نزدیک

۱۸ — سطح افقی پر ایک قلعہ اور مقبرہ ہے، قلعہ کی بلندی ۱۲۰ فٹ ہے اور اسکی چوٹی سے مقبرہ کی چوٹی اور پائین کے انخفاضی زاوئے ۴۰° اور ۸۰° مشاہدہ کئے گئے ہیں، مقبرہ کی بلندی دریافت کرو۔

۱۹ — ایک علم ع ن ہموار زمین پر قائم ہے، ایک قاعدہ اب خط ان کی عمودی سمت میں ناپا گیا ہے، نقاط ا، ب، ن ایک ہی سطح اُفقی میں واقع ہیں اور زاوئے ع ا ن اور ع ب ن بالترتیب عہ اور بہ ہیں، ثابت کرو کہ علم کی بلندی اب $\frac{\text{جب عہ جب بہ}}{\sqrt{\text{جب(عہ−بہ) جب(عہ+بہ)}}}$ ہے

اگر اب = ۱۰۰ فٹ، عہ = ۷۰° اور بہ = ۵۰° تو بلندی دریافت کرو۔

۲۰ — ایک شخص نے ایک برج کے ٹھیک جنوب میں اس سطح اُفقی پر کھڑے ہوکر جو پائین برج میں سے گذرتی ہے برج کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۵۴° ۱۶' دیکھا، ۱۰۰ گز مشرق کی طرف جانے پر اس نے ارتفاع ۵۰° ۸' پایا، برج کی بلندی دریافت کرو۔

۲۱ — ایک شخص نے غبارہ میں بیٹھکر زمین پر ایک چیز کا زاویہ انخفاض ۳۳° دیکھا، وہ چیز اس وقت اس کے ٹھیک جانب شمال میں تھی، اس کے بعد ہوا غبارہ کو ۳ میل مغرب کی طرف لیگئی اب زاویہ انخفاض ۲۱° تھا، غبارہ کی بلندی دریافت کرو۔

۲۲ — ایک بنیادی خط اب (= ۱۰۰۰ فٹ) کے دونوں

سروں سے پائیں برج ج کی جہات مشاہدہ کی گئیں اور معلوم ہوا کہ ∠ ج ا ب = ۶۲° ۳۳′ اور ∠ ج ب ا = ۷۸° ۱۵′ اور مقام ا سے برج کا ارتفاع ۹° ۲۵′ دیکھا گیا، برج کی بلندی دریافت کرو۔

۲۰۲ — مثال ا۔ سطح افقی پر ایک برج ہے اور برج کی چوٹی پر ایک جھنڈا ہے۔ جھنڈے اور برج کے محاذی سطح افقی کے ایک مقام پر زاوئے عہ اور بہ بنتے ہیں، ایک شخص ان کو ناپتا ہے اس کے بعد وہ برج کے پائیں کی طرف ایک معلوم فاصلہ ا چلکر دیکھتا ہے کہ جھنڈے کے محاذی نئے مقام پر وہی زاویہ بنتا ہے جو پہلے تھا، ثابت کرو کہ برج کی بلندی اور جھنڈے کا طول بالترتیب

$$\frac{\text{ا جب بہ جم (عہ + بہ)}}{\text{جم (عہ + ۲ بہ)}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ا جب عہ}}{\text{جم (عہ + ۲ بہ)}} \quad \text{ہیں}$$

فرض کرو کہ ف چوٹی اور ق پائین برج ہے۔ نیز ف ر جھنڈا ہے۔ فرض کرو کہ نقاط ا اور ب پر زاوئے ناپے گئے ہیں یعنی ∠ ف ا ق = بہ اور ∠ ف ا ر = ∠ ف ب ر = عہ، چونکہ یہ دو آخری زاوئے برابر ہیں اس لئے ان چار نقاط ا، ب، ف، ر میں سے ایک دائرہ گذریگا۔

جھنڈے کی بلندی دریافت کرنیکے لئے ہمیں نامعلوم

طول ف ر اور معلوم طول اب کا باہمی تعلق دریافت کرنا چاہیئے۔ اس غرض سے ہمکو چاہیئے کہ ان میں سے ہر ایک طول کو ار کے ساتھ ایک ربط کے ذریعہ منسلک کردیں۔

سب سے اول مثلث ارف اور ارب کے زاویوں کی تحقیق کرنی چاہیئے۔

چونکہ نقاط ا، ب، ف، ر ایک دائرہ پر واقع ہیں اس لئے ∠ ب رف = ∠ ب اف = بہ

اور ∠ اف ب = ∠ ارب = طہ (فرض کرو)

نیز ∠ اف ر = °۹۰ + ∠ ف اق = °۹۰ + بہ

اب چونکہ مثلث اف ر کے زاوئے ملکر دو قائموں کے برابر ہیں اس لئے

°۱۸۰ = عہ + (°۹۰ + بہ) + طہ + بہ

یعنی طہ = °۹۰ − (عہ + ۲ بہ) .... (۱)

مثلث اف ر اور اب ر سے

ف ر / جب عہ = ا ر / جب ا ف و = ا ر / جب ر ب و = ا / جب طہ (دفعہ ۱۶۹)
[باب پانزدہم سے معلوم ہوگا کہ ان میں سے ہر ایک مقدار قطر دائرہ کے برابر ہے]

پس جھنڈے کی بلندی = ف ر = ا جب عہ / جب طہ = ا جب عہ / جم (عہ + ۲ بہ) ......(۱)

نیز ف ق / ف ب = جم ب ف ق = جم (عہ + بہ) ....(۲)

اور ف ب / ا = جب ف ا ب / جب ا ف ب = جب بہ / جب طہ ....(۳)

تعلقات (۲) اور (۳) کو اکٹھا ضرب دینے سے

ف ق / ا = جب بہ جم (عہ + بہ) / جب طہ = جب بہ جم (عہ + بہ) / جم (عہ + ۲ بہ) بذریعہ (۱)

نیز ب ق = ف ق مس ب ف ق

= ف ق مس (عہ + بہ) = ا جب بہ جب (عہ + بہ) / جم (عہ + ۲ بہ)

اور ا ق = ا + ب ق = ا (جم (عہ + ۲ بہ) + جب بہ جب (عہ + بہ)) / جم (عہ + ۲ بہ)

= ا جم بہ جم (عہ + بہ) / جم (عہ + ۲ بہ)

اگر ا، عہ اور بہ کی عددی قیمتیں دی ہوئی ہوں تو ان نتائج کی شکل لوکارتمی حسابات کے لئے نہایت موزوں ہے

مثال ۲۔ برج ف ق کی بلندی ب معلوم ہے، برج کے اوپر ایک جھنڈا ق ر ہے، پائیں برج سے فاصلہ ا پر۔ برج اور جھنڈے دونوں کے

برابر زاوئے بنتے ہیں، جھنڈے کی بلندی دریافت کرو
فرض کروکہ ن نقطہ نگاہ ہے اور زاویوں ف ن ق اور ق ن
ے ہر ایک طہ کے برابر ہے - نیز فرض کروکہ بلندی ق ر = ما
ب مس طہ = $\frac{ب}{ا}$ اور مس ۲طہ = $\frac{ب + ما}{ا}$

لئے $\frac{ب+ما}{ا}$ = مس ۲طہ = $\frac{۲ مس طہ}{۱ - مس^۲ طہ}$ = $\frac{۲\frac{ب}{ا}}{۱ - \frac{ب^۲}{ا^۲}}$

نے $\frac{ب + ما}{ا} = \frac{۲ ا ب}{ا^۲ - ب^۲}$

ما = $\frac{۲ ا^۲ ب}{ا^۲ - ب^۲}$ - ب = ب $\frac{ا^۲ + ب^۲}{ا^۲ - ب^۲}$

ور ب کی عددی قیمتیں دی ہوئی ہوں تو ما بآسانی حاصل
تا ہے۔

۲ ــــ ایک شخص سیدھی سڑک پر جاتا تھا اس نے
، کے ایک مقام پر دیکھا کہ دو اشیاء کے محاذی
، سے بڑا زاویہ عہ بنتا ہے اور اس مقام سے سڑک
ص آگے چلکر اس نے دیکھا کہ دونوں اشیئ ایک
خط مستقیم میں واقع ہیں جو سڑک سے زاویہ بہ بناتاہے
ض کروکہ اشیا کے درمیان فاصلہ
ص جب عہ جب بہ قط $\frac{عہ + بہ}{۲}$ قط $\frac{عہ - بہ}{۲}$ ہے
کروکہ ف اور ق دو نقطے ہیں اور خط ف ق سڑک
نقطہ ب پر ملتا ہے اگر نقطہ ا پر بڑے سے بڑا زاویہ
تو لازماً نقاط ف اور ق میں سے گذرنیوالا دائرہ

سٹر کو نقطہ ا پر مس کریگا۔

[کیونکہ فرض کرو کہ اب پر کوئی اور نقطہ اَ ہے اسکو ف سے ملاؤ اور فرض کرو کہ اَف دائرہ کو نقطہ بَ پر قطع کرتا ہے۔

تب زاویہ ف اَق > زاویہ ف بَ ق (اقلیدس م ا ش ۱۶)

اور اس لئے > زاویہ ف ا ق (اقلیدس م ۳ ش ۲۱)]

فرض کرو کہ زاویہ ق اب = طہ تب

بموجب اقلیدس م ۳ ش ۳۲ زاویہ اف ق بھی طہ کے برابر ہے

اس لئے ۱۸۰° = مثلث ف اب کے زاویوں کا مجموعہ

= طہ + (عہ + طہ) + بہ

یعنی طہ = ۹۰° − $\frac{\text{عہ} + \text{بہ}}{۲}$

مثلثات ف اق اور ق اب سے

$\frac{\text{ف ق}}{\text{ا ق}} = \frac{\text{جب عہ}}{\text{جب طہ}}$ اور $\frac{\text{ا ق}}{\text{اب}} = \frac{\text{جب بہ}}{\text{جب اق ب}} = \frac{\text{جب بہ}}{\text{جب(طہ+عہ)}}$

اس لئے عمل ضرب سے حاصل ہوگا

$$\frac{ن ق}{ص} = \frac{جب\ عہ\ جب\ بہ}{جب\ طہ\ جب\ (طہ + عہ)}$$

$$= \frac{جب\ عہ\ جب\ بہ}{جم\ \frac{عہ + بہ}{۲}\ جم\ \frac{عہ - بہ}{۲}}$$

$$\therefore ن ق = ص\ جب\ عہ\ جب\ بہ\ قط\ \frac{عہ + بہ}{۲}\ قط\ \frac{عہ - بہ}{۲}$$

امثلہ نمبری ۳۴

۱ — ایک پل ۶ ستونوں پر قائم ہے جو ایک دوسرے سے برابر برابر فاصلوں پر ہیں اور دو مسلسل ستونوں کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ ۱۰۰ فٹ ہے، ایک کشتی ایک درمیانی ستون کی سیدھ میں لنگر ڈالے کھڑی ہے اور پل کی تمام لمبائی کے محاذی کشتی پر زاویہ قائمہ بنتا ہے ثابت کرو کہ کشتی کا فاصلہ پل سے $۱۰۰\sqrt{۶}$ فٹ ہے۔

۲ — ایک سیڑھی بازار کے ایک طرف ۲۷ فٹ اونچی کھڑکی کے نچلے پتھر تک پہنچتی ہے اور زمین سے زاویہ °۷۵ کا بناتی ہے، سیڑھی کے نچلے سرے کو قائم رکھکر اس کو اسطرح پھرایا گیا ہے کہ وہ بازار کی دوسری طرف دیوار کے ساتھ جا لگتی ہے اس حالت میں سیڑھی کا زاویہ زمین کے ساتھ °۱۵ ہوتا ہے، ثابت کرو کہ بازار کی چوڑائی اور سیڑھی کی لمبائی بالترتیب $۲۷(۳ - \sqrt{۳})$ اور $۲۷(\sqrt{۶} - \sqrt{۲})$ فٹ ہے۔

۳ — بازار کی ایک طرف ایک گھر سے مقابل کے گھر کی

اونچائی کے محاذی جو زاوئے بنتے ہیں اُنکا مشاہدہ کیا گیا ہے۔
زمین پر اونچائی کے محاذی جو زاویہ بنتا ہے اُس کا ماس ۳۔
اور دو کھڑکیوں پر جو ایک دوسرے کے اُوپر واقع ہیں اوم
کے محاذی جو زاوئے بنتے ہیں اُن میں سے ہر ایک کا ما
۳ہے، اگر مقابل کے گھر کی بلندی ۶۰ فٹ ہو تو سطح ز
سے دونوں کھڑکیوں کی بلندیاں دریافت کرو۔

۴ ــــ ایک سلاخ کا طول معلوم ہے اور اُس کا ایک سرا ز
پر ثابت کر دیا گیا ہے، اگر وہ سورج میں سے گذرنیوالی سم
عمودی میں بلا تکلف حرکت کر سکے تو بڑے سے بڑے سایہ
طول جو سلاخ زمین پر ڈال سکتی ہے دریافت کرو۔
اگر بڑے سے بڑا سایہ سلاخ کے طول کا $\frac{1}{2}$۳ گنا ہو تو سورج
ارتفاع دریافت کرو۔

۵ ــــ جہاز ا پر ایک شخص ایک اور جہاز ب کو بندرگا
سے باہر آتا ہو دیکھتا ہے اس وقت بندرگاہ کی جہت شمال
مغرب ہے۔ دس منٹ تک ا ایک میل شمال مشرق کی
طرف جاتا ہے اور اُس وقت اس کے مقام سے جہاز ب
ٹھیک مغرب کی طرف دکھائی دیتا ہے اور بندرگاہ کی سمت
اُس وقت شمال سے °۶۰ کا زاویہ مغرب کی طرف کو بناتی
اور دس منٹ کے بعد ب کی سمت جنوب مغرب ہوتی۔
ا اور ب کا درمیانی فاصلہ اول مشاہدہ کیوقت دریافت کر
نیز ب کی سمت اور رفتار معلوم کرو۔

۶ — ایک جہاز شمال کی طرف جا رہا تھا اُس پر ایک شخص نے ٹھیک اپنے مغرب کی طرف ایک سیدھ میں دو روشنی گھر دیکھے جن کا درمیانی فاصلہ ۶ میل تھا۔ ایک گھنٹہ کے بعد ایک روشنی گھر کی سمت جنوب-مغرب تھی اور دوسرے کی جنوب-جنوب مغرب جہاز کی رفتار دریافت کرو۔

۷ — تختۂ جہاز پر ایک شخص نے ایک روشنی گھر کو اپنے ٹھیک شمال مغرب کی طرف دیکھا، اس کے بعد جہاز ۱۲ میل ایسی سمت میں چلا جو سمت مغرب سے جنوب کی طرف کو ۱۵° کا زاویہ بناتی تھی۔ اُس وقت روشنی گھر کی سمت شمال تھی، ہر ایک مقام پر جہاز کا فاصلہ روشنی گھر سے دریافت کرو۔

۸ — ایک شخص سیدھی سڑک پر مغرب کی طرف جا رہا تھا اُس نے دیکھا کہ جب وہ ایک پون چکی کے ٹھیک جنوب میں ہو تو جو خط مستقیم اس کے مقام کو ایک دور کے برج کے ساتھ وصل کرتا ہے وہ سڑک سے زاویہ ۳۰° بناتا ہے، ایک میل آگے چل کر پون چکی اور برج کی اسمات اس نے بالترتیب شمال مشرق اور شمال مغرب دیکھیں، برج کے فاصلے پون چکی سے اور سڑک کے قریب ترین نقطہ سے دریافت کرو۔

۹ — اُونچی زمین پر کھڑے ہوکر ایک شخص نے ایک جہاز کو ٹھیک اپنے شمال کی طرف دیکھا۔ ایک چوتھائی گھنٹہ کے بعد جہاز کی سمت ٹھیک مشرق تھی، اور آدھ گھنٹہ گذرنے کے بعد جہاز کی سمت جنوب مشرق ہوگئی۔ اگر یہ فرض کرلیا جائے کہ

جہاز یکساں رفتار سے ایک خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے تو جہاز کی
سمتِ طریق اور نصف النہار کے درمیان جو زاویہ بنے اُس کو
دریافت کرو - نیز وہ وقت معلوم کرو جو جہاز کو اول مشاہدہ کے
مقام سے اُس مقام تک طے کرنے میں صرف ہوا جب وہ مشاہدہ
کرنے والے کے نہایت ہی قریب تھا۔

۱۰- ایک شخص سیدھی سڑک پر جا رہا تھا جو سمت شمال سے
مشرق کی طرف کو ۳۰° کا زاویہ بناتی تھی، اس نے ایک مقام پر دیکھا
کہ وہ ایک گھر کے ٹھیک جنوب کی طرف ہے ایک میل آگے
جانے پر اُس نے مشاہدہ کیا کہ گھر اس کے ٹھیک مغرب کی طرف
ہے اور سڑک کے مقابل کی جانب میں اس وقت ایک پون چکی
اس کو ٹھیک اپنے شمال مشرق کی طرف دکھائی دی - تین میل
آگے چلکر اُس نے دیکھا کہ وہ چکی کے ٹھیک شمال کی طرف ہے
ثابت کرو کہ چکی اور گھر کا خط وصل سڑک کے ساتھ ایک ایسا
زاویہ بناتا ہے جس کا مماس $\frac{48-25\sqrt{3}}{11}$ ہے۔

۱۱- ایک سیدھی سڑک پر تین متسلسل میل کے پتھروں ا، ب، ج
سے ایک دور کا مینارہ دکھائی دیتا ہے، مینارہ کی سمت ا پر
شمال مشرق اور ب پر ٹھیک مشرق ہے اور ج پر سمت جنوب
سے مشرق کی طرف کو ۶۰° کا زاویہ بناتی ہے، ثابت کرو کہ سڑک
سے مینارہ کا کم سے کم فاصلہ $\frac{6+5\sqrt{3}}{13}$ میل ہے۔

۱۲- ایک برج شمال کی طرف جھکا ہوا ہے اور پائیں برج سے
ا اور ب فٹ کے فاصلوں پر دو مقامات برج کے عین جنوب میں

ہیں اگر ان مقامات سے برج کی چوٹی کے ارتفاعی زاویے عہ
بہ ہوں تو ثابت کرو کہ برج کا میلان افق سے $\frac{...}{ب - ا}$ ہے
۔ سطح ہموار کے ایک نقطہ ا پر ایک غبارہ کا زاویہ ارتفاع
دکھائی دیا، غبارہ اس وقت ا کے ٹھیک جنوب کیطرف تھا۔
ب سے جو ا کے جنوب میں فاصلہ ج پر واقع ہے غبارہ کا
یہ ارتفاع شمال کی طرف بہ مشاہدہ ہوا، نقطہ ا سے غبارہ
اصلہ، نیز غبارہ کی بلندی زمین سے دریافت کرو۔
۔ ایک ستون کی چوٹی پر ایک بت ہے اور اس کے
ذی ستون سے ۹ اور ۱۱ گز کے فاصلوں پر ایک ہی زاویہ
بنتا ہے، اگر مس عہ = $\frac{۱}{۱۰}$ تو ستون اور بت کی بلندیاں
یافت کرو۔
۔ ایک برج کی چوٹی پر ایک علم قائم ہے، سطح مستوی
قاعدۂ برج کے مرکز میں سے ایک خط گذرتا ہے اس پر دو
یسے نقاط ہیں جنکا باہمی فاصلہ ۲ا ہے اور جن میں سے ہر ایک
علم کے محاذی زاویہ عہ بنتا ہے، اگر ان نقطوں کو ملانیوالے
کے نقطۂ تنصیف پر علم کے محاذی زاویہ بہ بنے تو ثابت
و کہ علم کی بلندی

$$ا\, جب\, عہ \sqrt{\frac{۲\, جب\, بہ}{جم\, عہ\, جب\, (بہ - عہ)}}\ ہے$$

۔ کسی ٹیلے پر ایک ستون ہے، ستون سے ا فٹ کے
صلے پر کھڑے ہو کر ایک شخص نے دیکھا کہ اس کی آنکھ پر

جو زاویہ ستون کے محاذی بنتا ہے اس کا ماس $\frac{1}{2}$ ہے، ستون کی سیدھ میں فاصلہ $\frac{1}{2}$ ۱ فٹ جانے پر اس نے دیکھا کہ ستون کے محاذی اس کی آنکھ پر وہی زاویہ بنتا ہے جو پہلے تھا۔ ٹیلے اور ستون کی بلندیاں دریافت کرو۔ اس مثال میں ہم مشاہدہ کرنیوالے کی آنکھ کو ٹیلے کے قاعدہ میں سے گذرنیوالی سطح مستوی پر منطبق خیال کرتے ہیں۔

۱۷۔ ایک دریا کا عرض ۱۵۰ فٹ ہے، اس کے کنارہ پر ایک گرجے کا برج ہے اور برج کی چوٹی پر ایک منارہ ہے جسکی بلندی ۳۰ فٹ ہے، دریا کے دوسرے کنارہ پر ایک شخص نے دیکھا کہ اگر ایک ۶ فٹ اونچی لکڑی پائیں برج میں سے گذرنیوالی سطح مستوی پر برج کے قریب سیدھی کھڑی کی جائے تو اس لکڑی اور منارہ دونوں کے محاذی اس کی آنکھ پر ایک ہی زاویہ بنتا ہے، ثابت کرو کہ برج کی بلندی تقریباً ۲۸۵ فٹ ہے۔

۱۸۔ ایک شخص ایک برج کی بلندی دریافت کرنا چاہتا ہے، اس نے پائیں برج میں سے گذرنیوالی سطح مستوی کے ایک مقام پر کھڑے ہوکر چوٹی کا ارتفاع °۳۰ دیکھا۔ کسی خاص سمت میں ایک فاصلہ ا جانے پر اس نے دیکھا کہ چوٹی کا ارتفاع وہی ہے جو پہلے تھا اور سمت مذکورہ کی عمودی سمت میں فاصلہ $\frac{5}{4}$ ا جانے پر اس نے چوٹی کا ارتفاع °۴۰ دیکھا، ثابت کرو کہ برج کی بلندی $\frac{5}{9}$ ا ہے یا $\frac{85}{48}$ ا

۱۹۔ سطح اُفقی پر ایک برج ہے، برج کے قاعدہ سے

اور ب فٹ کے فاصلہ پر برج کی سیدھ میں دو نقاط ہیں اور ان پر
ارتفاعی زاوئے برج کی چوٹی کے محاذی بنتے ہیں وہ ایک دوسرے
کے متمم ہیں، ثابت کرو کہ برج کا ارتفاع $\sqrt{ا ب}$ فٹ ہے۔
ر دو نقاط کے خط وصل کے محاذی برج کی چوٹی پر زاویہ طہ بنے
تو ثابت کرو کہ

$$جب\ طہ = \frac{ا - ب}{ا + ب}$$

۲۰ — ایک ۸۰ فٹ اونچے ٹیلے کی چوٹی پر ایک ۱۵۰ فٹ بلند
برج ہے، معلوم کرو کہ ٹیلے کے پائیں سے جو سطح گذرتی ہے اس کے
کس مقام پر ایک شخص کھڑا ہو کہ برج اور ٹیلہ کے محاذی اس کی
آنکھ پر برابر زاوئے بنیں، آنکھ کی اونچائی ۵ فٹ ہے

۲۱ — سطح ہموار پر ایک ستون ہے اور ستون کی چوٹی پر ایک
بت ہے، اگر ایک شخص کی آنکھ پر بت کے محاذی بڑے سے بڑا
زاویہ عہ بنے جبکہ وہ ستون سے ج فٹ کے فاصلہ پر ہو تو ثابت
کرو کہ بت کی بلندی ۲ ج مس عہ فٹ ہے، ستون کی بلندی
بھی دریافت کرو۔

۲۲ — ایک سطح مائل اور سطح ہموار کے خط فصل پر ایک
برج ہے اور سطح مائل افق سے زاویہ ۹° بناتی ہے، اگر پائیں
برج سے سطح مائل کے اوپر کی طرف ۱۰۰ فٹ لمبا مستقیم خط
ناپا جائے اور اس خط کے سرے پر برج کے محاذی زاویہ
۵۴° بنے تو برج کی بلندی دریافت کرو۔ معلوم ہے لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء
لوک ۲۳ ۱۴۱۴ء ۱ = ۲۶ ۵۸۴ء ۲۰

اور ل جب ۵۴° = ۹۱۹۰۷۹۵۷۶۹۱

۲۲ — ایک ڈھلان اُفق سے ۱۵° کا زاویہ بناتی ہے، اُس پر ایک عمودی برج قائم ہے، ایک شخص پائیں برج سے ڈھلان کے اوپر کی طرف ۸۰ فٹ چڑھکر دیکھتا ہے کہ اس کی آنکھ پر برج کے محاذی زاویہ ۳۰° بنتا ہے، ثابت کروکہ برج کی بلندی

۴۰ ($\sqrt{6} - \sqrt{2}$) فٹ ہے

۲۴ — ایک چٹان کا ارتفاع ۴۷° ہے، ایک شخص ایک سطح مائل پر جو اُفق سے ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے ۱۰۰۰ فٹ چٹان کی طرف چڑھکر دیکھتا ہے کہ اس کا ارتفاع ۷۷° ہے اگر جب ۴۷° = ۷۳۱۳۵ء۰ تو اُس مقام سے چٹان کی عمودی بلندی دریافت کرو جہاں سب سے پہلے زاویہ ارتفاع مشاہدہ کیا گیا۔

۲۵ — ایک شخص نے ایک سطح مائل پر ج فٹ اوپر جاکر دیکھا کہ اس کے پائین سے جو سطح مستوی گذرتی ہے اُس پر ایک چیز کا زاویہ انخفاض عہ ہے، ج فٹ اور اوپر جاکر اُس نے دیکھا کہ اسی چیز کا زاویہ انخفاض بہ ہے ثابت کروکہ سطح مائل اُفق سے ایک ایسا زاویہ بناتی ہے جس کا مماس التمام

(۲ مم بہ — مم عہ) ہے۔

۲۶ — ایک منتظم مینار مربع قاعدہ پر قائم ہے، اس کا ایک کنارہ ۱۵۰ فٹ اور اس کے قاعدہ کا ایک ضلع ۲۰۰ فٹ ہے، اُس کے ایک رخ کا میلان قاعدہ سے دریافت کرو۔

۲۷ — ایک مینار کے مربع قاعدے کا ضلع ا ہے اوراسکا

راس ایک ایسے خط مستقیم پہ واقع ہے جو قاعدے کے نقطہ وسط میں سے گذرتا ہے اور اس پہ عمود ہے، مینار کی بلندی ح فٹ ہے، ثابت کرو کہ مینار کے متصل رخوں کا درمیانی زاویہ مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

$$جب\ عہ = \frac{۲ح\sqrt{۲ل^۲+۴ح^۲}}{ل^۲+۴ح^۲}$$

۲۸ ـــ ایک متساوی الاضلاع مثلث کے مرکز پہ ایک ۱۰۰ فٹ اونچا علم قائم ہے، مثلث متوازی الافق ہے، علم کی چوٹی پہ ہر ایک ضلع کے محاذی زاویہ ۶۰° بنتا ہے، ثابت کرو کہ مثلث کے ضلع کا طول $۵۰\sqrt{۶}$ فٹ ہے۔

۲۹ ـــ مربع قاعدہ پہ ایک مینار ہے اور اس کی چوٹی پر ایک ۶ فٹ اونچا علم ہے، اگر علم کا سایہ عین قاعدہ کے ایک ضلع تک پہنچے اور اس ضلع کے سروں سے ۵۶ اور ۸ فٹ کے فاصلہ پر ہو تو سورج کا زاویہ ارتفاع دریافت کرو، مینار کی بلندی ۳۴ فٹ ہے۔

۳۰ ـــ مربع قاعدہ پر ایک مینار قائم ہے، اس کی چوٹی پہ ایک ۶ فٹ اونچا علم ہے، علم کا سایہ عین قاعدہ کے ضلع تک پہنچتا ہے اور اس ضلع کے سروں سے لا اور ما فٹ کے فاصلہ پر ہے، ثابت کرو کہ مینار کی بلندی $\sqrt{\frac{لا^۲+ما^۲}{۲}}$ مس عہ - ۶ ہے جہاں عہ سورج کا زاویہ ارتفاع ہے۔

۳۱ ـــ ایک نقطہ ایک جھیل کی سطح سے ح فٹ اونچا ہے اور اس

نقطہ سے ایک بادل کا زاویہ ارتفاع عہ مشاہدہ کیا گیا ہے اگر جھیل میں بادل کے عکس کا زاویہ انخفاض دیکھا جائے تو وہ بہ ہوتا ہے ثابت کرو کہ بادل کی بلندی

$$ح \frac{\text{جب}(بہ + عہ)}{\text{جب}(بہ - عہ)} \text{ ہے}$$

۳۲ — ایک برج کا سایہ کسی خاص وقت اس کی بلندی کا نصف تھا کچھ عرصہ بعد سایہ بلندی کے برابر تھا۔ معلوم کرو کہ اس عرصہ میں سورج کا زاویہ ارتفاع کتنا کم ہوا ہے، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء۰، ل مس ۲۶° ۳۴′ = ۹۹۹۴۰۰۳ء۱۰

اور فرق ۱′ کیلئے = ۳۱۵۹

۳۳ — ایک تختی کی شکل مثلث متساوی الساقین ہے اور وہ سورج کے مقابل سطح عمودی میں رکھی گئی ہے، اگر تختی کا قاعدہ ۲ا، اونچائی ح اور سورج کا ارتفاع ۳۰° ہو تو ثابت کرو کہ تختی کے سایہ کے راس پر جو زاویہ بنتا ہے اس کا حاس

$$\frac{۲\,ا\,ح\,\sqrt{۳}}{۳\,ح^{۲} - ا^{۲}} \text{ ہے۔}$$

۳۴ — سطح افقی پر نشانہ لگانے کا چاند سیدھا کھڑا کیا گیا ہے، اگر اس کا رخ جنوب کی طرف ہو اور وہ شکل میں مستطیل ہو تو جو اس کی سطح کا رقبہ ہے اس کا مقابلہ اس کے سایہ کے رقبہ سے اس وقت کرو جبکہ سورج کا ارتفاع عہ° ہو اور سورج جنوب سے زاویہ بہ° بنائے۔

۳۵ — ایک کرہ کا قطر ق ہے اور جب اس کے مرکز کا ارتفاع بہ ہو تو اس کے محاذی ایک شخص کی آنکھ پر زاویہ عہ بنتا ہے، ثابت کرو کہ کرہ کے مرکز کی بلندی

$\frac{1}{2}$ ق جب بہ قم $\frac{ع}{2}$ ہے

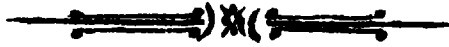
۳۶ ـــ ایک شخص سطح افقی پہ کھڑا ہوکر ایک مساوی اور مساوی الفصل ستونوں کی قطار کو دیکھکر یہ نتیجہ نکالتا ہے کہ جو زاوئے دسویں اور سترہویں ستون کے محاذی اس کی آنکھ پر بنتے ہیں وہ اس صورت میں بھی وہی رہینگے اگر انکو پہلے ستون کی جگہ لاکر کھڑا کردیا جائے اور انکی بلندیوں کو بالترتیب بقدر $\frac{1}{2}$ اور $\frac{2}{3}$ کے کم کردیا جائے۔ اگر آنکھ کی بلندی کو نظر انداز کرسکیں تو ثابت کروکہ ستونوں کی قطار اس خط سے جو اسکی آنکھ کو پہلے ستون کے ساتھ ملانے سے پیدا ہو ایک ایسا زاویہ بناتی ہے جس کا قاطع ۲٫۶ ہے۔

امثلہ ذیل کے حل کرنے میں لوکارثمی جدولوں کی ضرورت ہوگی

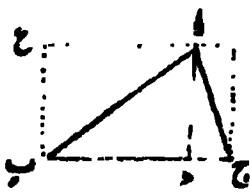
۳۷ ـــ ایک دریا کے مقابل کے کناروں پر دو نقاط ا اور ب ایک دوسرے کے سامنے واقع ہیں اور انکے درمیان ایک جہاز کا ستون م ن ہے، دریا کا عرض ۱۰۰۰ فٹ ہے اور نقطہ ا پر م کا زاویہ ارتفاع ۱۴° ۲۰' ہے اور نقطہ ب پر ارتفاع ۸° ۱۰' ہے، خط اب پر م کی بلندی دریافت کرو۔

۳۸ ـــ خط اب کا طول ۱۰۰۰ گز ہے، ب نقطہ ا کے ٹھیک شمال کیطرف واقع ہے اور ب سے ایک دور کے نقطہ ط کی سمت، شمال سے مشرق کی جانب میں زاویہ ۷۰° کا بناتی ہے اور نقطہ ا پر یہ سمت شمال سے مشرق کی طرف کو زاویہ ۴۱° ۲۲' بناتی ہے، ا اور ط کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو۔

۳۹ — ب کے ٹھیک مغرب کی طرف دس میل کے فاصلے پر ایک مقام ا ہے، نقطہ ا سے ایک چٹان کی سمت، شمال سے مشرق کی طرف کو زاویہ ۴۴° ۱۹َ بناتی ہے اور نقطہ ب سے یہ سمت، شمال سے مغرب کی جانب میں زاویہ ۲۶° ۵۱َ بناتی ہے، خط اب سے چٹان کا فاصلہ شمال کی جانب میں دریافت کرو۔

۴۰ — ایک افقی مربع احاطہ کے ایک ضلع کا طول ا ہے اور مین اس کے نقطہ وسط کے اوپر سمت راس میں ایک مینار کی چوٹی ہے، مربع کی سطح سے چوٹی کی بلندی ب ہے اگر سورج کا ارتفاع طہ ہو اور مینار کا سایہ مربع کے ٹھیک ایک کونے تک پہنچے تو ثابت کرو کہ ب $\sqrt{۲}$ = ا مس طہ
اگر ا = ۱۰۰۰ فٹ اور طہ = ۲۵° ۱۵َ تو ب کی قیمت دریافت کرو۔

باب پانزدہم

مثلث کے خواص

۲۰۴- مثلث کا رقبہ - فرض کرو کہ کوئی مثلث اب ج ہے اور زاویہ ا سے مقابل کے ضلع ب ج پر عمود اد نکالا گیا ہے۔

نقطہ ا میں سے ب ج کے متوازی خط ع ا ف کھینچو اور اس پر عمود ب ع اور ج ف نکالو۔

بموجب اقلیدس م ۱ ش ۴۱، مثلث اب ج کا رقبہ

= $\frac{1}{2}$ مستطیل ب ف = $\frac{1}{2}$ ب ج × ج ف

= $\frac{1}{2}$ اَ × اد

لیکن اد = اب جب ب = جَ جب ب

اسلئے مثلث اب ج کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ جَ اَ جب ب

اس رقبہ کو بالعموم △ سے تعبیر کرتے ہیں

اس لئے △ = ½ جَ اَ جب ب = ½ اَ بَ جب ج

= ½ بَ جَ جب ا .... (۱)

بموجب دفعہ ۱۷۵، جب ا = ۲ / بَ جَ √(ن(ن - اَ)(ن - بَ)(ن - جَ))

یعنی △ = ½ بَ جَ جب ا

= √(ن(ن - اَ)(ن - بَ)(ن - جَ)) .... (۲)

اس مقدار کو اکثر ف سے تعبیر کرتے ہیں۔

اشلہ نمبری ۳۵

مثلث ا ب ج کا رقبہ دریافت کرو جبکہ

۱- اَ = ۱۳، بَ = ۱۴ اور جَ = ۱۵

۲- اَ = ۱۸، بَ = ۲۴ اور جَ = ۳۰

۳- اَ = ۲۵، بَ = ۵۲ اور جَ = ۶۳

۴- اَ = ۱۲۵، بَ = ۱۲۳ اور جَ = ۶۲

۵- اَ = ۱۵، بَ = ۳۶ اور جَ = ۳۹

۶- اَ = ۲۸۷، بَ = ۸۱۶ اور جَ = ۸۶۵

۷- اَ = ۳۵، بَ = ۸۴ اور جَ = ۹۱

۸- اَ = √۲، بَ = √۳ اور جَ = (√۲ + √۶) / ۲

۹- اگر ب = ۴۵°، ج = ۹۰° اور اَ = ۲(√۳ + ۱)، ابج کو ثابت کرو

کہ مثلث کا رقبہ (۶ + ۲ ۳۶۱ ۳) مربع انچ ہے

۱۰۔ ایک مثلث کے اضلاع ۱۱۹، ۱۱۱، ۹۲ گز ہیں ثابت کرو کہ اس کا رقبہ ایک ایکڑ سے دس مربع گز کم ہے۔

۱۱۔ ایک مثلثی کھیت کے اضلاع ۲۴۲، ۱۲۱۲ اور ۱۳۵۰ گز ہیں ثابت کرو کہ کھیت کا رقبہ ۶ ایکڑ ہے

۱۲۔ ایک شخص کو ایک ایسا مثلثی احاطہ بنانے کی اجازت ملی جسکے اضلاع بالترتیب ۵۰، ۴۱، ۲۱ گز ہیں، غلطی سے اس نے پہلے ضلع کو ایک گز بڑا بنا لیا، اگر احاطہ کا رقبہ اور مجموعۂ اضلاع وہی رکھنا منظور ہو جو اوپر تجویز ہوا تو باقی دو اضلاع کے طول دریافت کرو۔

۱۳۔ ایک متساوی الساقین مثلث کا قاعدہ ۱۴ انچ ہے اور اس کا رقبہ ایک اور مثلث کے رقبہ کے برابر ہے جس کے اضلاع ۶ء۱۳، ۱۵، ۴ء۱۵ انچ ہیں، مثلث اول الذکر کے مساوی ضلعوں میں سے ایک کی قیمت ۰۰۱ء انچ تک صحیح طور پر دریافت کرو،

۱۴۔ ثابت کرو کہ مثلث کا رقبہ $\frac{1}{2}$ ا^2 $\frac{\text{جب ب جب ج}}{\text{جب ا}}$ کے برابر ہے

اگر مثلث کا ایک زاویہ °۶۰ ہو، رقبہ ۱۰ $\sqrt{3}$ مربع فٹ اور مجموعۂ اضلاع ۲۰ فٹ تو اضلاع کے طول دریافت کرو

۱۵۔ ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور اسکا رقبہ ایک ایسے مثلث متساوی الاضلاع کے رقبہ کا $\frac{3}{5}$ ہے جس کا مجموعہ اضلاع مثلث اول الذکر کے مجموعہ اضلاع کے برابر ہے، ثابت کرو کہ مثلث کے اضلاع کی باہمی نسبتیں ۳ : ۵ : ۷ ہے، نیز مثلث کا سب سے

بڑا زاویہ دریافت کرو۔

۱۶۔ ایک مثلث میں سب سے چھوٹا زاویہ ۴۵° ہے اور زاو
کے مماس سلسلہ حسابیہ میں ہیں، اگر اس کا رقبہ ۳ مربع گز ہو تو
کرو کہ اضلاع کے طول ۳√۵، ۶√۲ اور ۹ فٹ ہیں اور باقی ز
کے مماس بالترتیب ۲ اور ۳ ہیں

۱۷۔ کسی مثلث کے دو اضلاع کے طول بالترتیب ۱ فٹ ا
ہیں اور چھوٹے زاویئے کے مقابل کا زاویہ ۳۰° درجہ ہے، ثا
کہ دو مثلث شرائط سوال کو پورا کرتے ہیں، ان کے زاویئے در
کرو اور ثابت کرو کہ ان کے رقبوں کی باہمی نسبت √۳+۱ : √

۱۸۔ مفروضات ذیل سے دو مثلث حاصل ہوتے ہیں،
کی مدد سے بڑے مثلث کا رقبہ دریافت کرو

ا = ۳۱° ۱۵′، ا = ۵ انچ اور ب = ۷ انچ

۲۰۵۔ مثلث کے متعلقہ دائرے

جو دائرہ مثلث کے نقاط راس میں سے گزرتا ہے اس
کے گرد بنا ہوا دائرہ یا اختصاراً مثلث کا بیرونی دائرہ
ہیں۔

اس دائرہ کا مرکز اقلیدس م ۴ ش ۵ کے عمل سے
ہو سکتا ہے اس کے نصف قطر کو ہم ر سے تعبیر کر
جو دائرہ مثلث کے اندر اس طرح سے کھینچ سکے کہ وہ
کے ہر ایک ضلع کو مس کرے اس کو اختصاراً م

اندرونی دائرہ کہتے ہیں، اس دائرہ کا مرکز اقلیدس م ۴ ش ۴
کے عمل سے حاصل ہو سکتا ہے۔ اس کے نصف قطر کو ہم آئندہ
ر سے تعبیر کرینگے۔

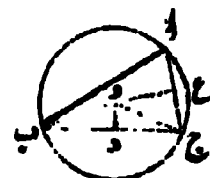
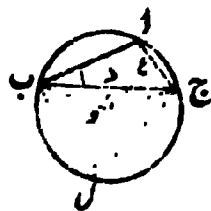
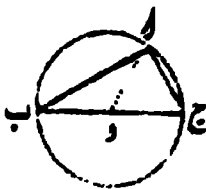
جو دائرہ ضلع ب ج اور باقی دو اضلاع ا ب اور ا ج
ممدودہ میں سے ہر ایک کو مس کرے اس کو زاویہ ا کے
مقابل مثلث کا جانبی دائرہ کہتے ہیں، اس کے نصف قطر
کو ہم ر۱ سے تعبیر کریں گے

اسی طرح سے حرف ر۲ سے ہم اُس دائرہ کے نصف قطر کو
تعبیر کریں گے جو ضلع ج ا اور باقی دو اضلاع ب ج اور ب ا
ممدودہ کو مس کرے۔

نیز ر۳ سے ہم اُس دائرہ کے نصف قطر کو تعبیر کرینگے جو ضلع
ا ب اور باقی دو اضلاع ج ا اور ج ب ممدودہ کو مس کرے

۲۰۶۔ مثلث ا ب ج کے بیرونی دائرہ کا نصف قطر ر
دریافت کرو۔

اضلاع ب ج اور ج ا کی تنصیف نقاط د اور ع پر کرو اور
ب ج اور ج ا پر عمود د و اور ع و قائم کرو۔

بموجب اقلیدس م ۴ ش ۵، نقطہ و مثلث کے بیرونی دائرہ کا مرکز
ہے، و ب اور و ج کو ملاؤ

نقطہ و مثلث کے اندر واقع ہو سکتا ہے (شکل ۱) یا باہر (شکل ۲) یا مثلث کے ایک ضلع پر (شکل ۳)

پہلی شکل میں مثلث ب و د اور ج و د آپس میں ہر طرح برابر ہیں۔ اس لئے

∠ ب و د = ∠ ج و د

∴ ∠ ب و د = ½ ∠ ب و ج

= ∠ ب ا ج (اقلیدس م ۳ ش ۲۰)

= ا

نیز ب د = ب و جب ب و د

∴ ا/۲ = س جب ا

اگر ا منفرجہ ہو جیسا کہ شکل ۲ میں تو

∠ ب و د = ½ ∠ ب و ج = ∠ ب ل ج

= ۱۸۰° − ا (اقلیدس م ۳ ش ۲۲)

یعنی بموجب سابق، جب ب و د = جب ا اور س = ا/۲ جب ا

اگر ا زاویہ قائمہ ہو جیسا کہ شکل ۳ میں تو

س = و ا = و ج = ا/۲

= ا/۲ جب ا چونکہ اس صورت میں جب ا = ۱

اس سے معلوم ہوا کہ مندرجہ بالا ارتباط سب مثلثوں کے لئے درست ہے۔

اس لئے تینوں صورتوں میں

$$\text{ر} = \frac{\text{اَ}}{\text{۲ جب ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{۲ جب ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{۲ جب ج}}$$ (دفعہ ۱۶۹)

...... (۱)

۲۰۷۔ دفعہ ۱۷۵ میں ہم ثابت کرچکے ہیں کہ

$$\text{جب ا} = \frac{\text{۲}}{\text{بَ جَ}}\sqrt{\text{ن(ن - اَ)(ن - بَ)(ن - جَ)}}$$

$$= \frac{\text{۲ف}}{\text{بَ جَ}}$$ اس میں ف مثلث کے رقبہ کو تعبیر کرتا ہے

جب ا کی قیمت رابطہ (۱) دفعہ ۲۰۶ میں مندرج کرنے سے

$$\text{ر} = \frac{\text{اَ بَ جَ}}{\text{۴ف}}$$

اور اس سے بیرونی دائرہ کا نصف قطر اضلاع کی رقوم میں حاصل ہوتا ہے۔

۲۰۸۔ مثلث اب ج کے دائرہ اندرونی کے نصف قطر ر کی قیمت دریافت کرو۔

زاویہ ب اور ج کی تنصیف بالترتیب دو خطوط ب سے اور ج سے کرو اور فرض کرو کہ یہ خط نقطہ ے پر ملتے ہیں،

بموجب اقلیدس م ۳ ش ۴ نقطہ سے اندرونی دائرہ کا مرکز۔ سے ا کو ملاؤ اور تینوں اضلاع پر عمود سے د، سے ع، سے ف نکالو۔

تب سے د = سے ع = سے ف = ر

اب رقبہ △ سے ب ج = $\frac{1}{2}$ سے د × ب ج = $\frac{1}{2}$ ر × ا

رقبہ △ سے ج ا = $\frac{1}{2}$ سے ع × ج ا = $\frac{1}{2}$ ر × ب

اور رقبہ △ سے ا ب = $\frac{1}{2}$ سے ف × ا ب = $\frac{1}{2}$ ر × ج

اس لئے جمع کرنے سے

$\frac{1}{2}$ ر × ا + $\frac{1}{2}$ ر × ب + $\frac{1}{2}$ ر × ج = مثلثات سے ب ج، سے ج ا اور سے ا ب کے رقبوں کا مجموعہ = △ ا ب ج کا رقبہ

یعنی ر $\frac{ا + ب + ج}{۲}$ = ں

یعنی ر × ن = ں

∴ ر = $\frac{ں}{ن}$

۲۰۹۔ چونکہ زاویئے سے ب د اور سے د ب بالترتیب زاویہ سے ب ف اور سے ف ب کے برابر ہیں اس مثلث سے د ب اور سے ف ب ہر طرح سے برابر ہیں اس لئے ب د = ب ف یعنی ۲ ب د = ب د + ب
نیز اع = اف یعنی ۲ اع = اع + اف

اور ج ع = ج د یعنی ۲ ج ع = ج ع + ج د

اس لئے جمع کرنے سے

۲ ب د + ۲ ا ع + ۲ ج ع = (ب د + ج د) + (ج ع + ا ع)
+ (ا ف + ف ب)

یعنی ۲ ب د + ۲ ا ج = ب ج + ج ا + ا ب

∴ ۲ ب د + ۲ بَ = اَ + بَ + جَ = ۲ ن

اس لئے ب د = ن - بَ = ب ف

اسیطرح سے ج ع = ن - جَ = ج د

اور ا ف = ن - اَ = ا ع

اب $\frac{\text{ے د}}{\text{ب د}}$ = مس ے ب د = مس $\frac{\text{ب}}{۲}$

∴ ر = ے د = ب د مس $\frac{\text{ب}}{۲}$ = (ن - اَ) مس $\frac{\text{ب}}{۲}$

پس ر = ے ع = ج ع مس ے ج ع = (ن - جَ) مس $\frac{\text{ج}}{۲}$

اور نیز ر = ے ف = ف ا مس ے ا ف = (ن - اَ) مس $\frac{\text{ا}}{۲}$

اسلئے ر = (ن - اَ) مس $\frac{\text{ا}}{۲}$ = (ن - بَ) مس $\frac{\text{ب}}{۲}$
= (ن - جَ) مس $\frac{\text{ج}}{۲}$

۲۱۰ - ر کی ایک تیسری قیمت اس طرح سے حاصل ہوسکتی ہے -

اَ = ب د + د ج = ے د م ے ب د + ے د م ے ج د

= رم ب/۲ + رم ج/۲

= ر [(جم ب/۲)/(جب ب/۲) + (جم ج/۲)/(جب ج/۲)]

∴ اَ جب ب/۲ جب ج/۲ = ر [جب ج/۲ جم ب/۲ + جم ج/۲ جب ب/۲]

= ر جب (ب/۲ + ج/۲) = ر جب (۹۰ − ا/۲)

= ر جم ا/۲

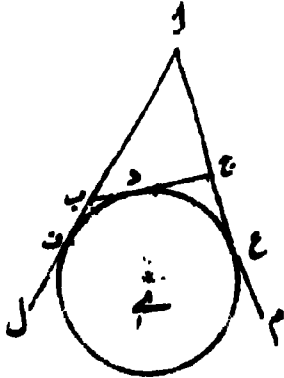
∴ ر = (اَ جب ب/۲ جب ج/۲) / (جم ا/۲)

نتیجہ صریح - چونکہ اَ = ۲ ر جب ا = ۴ ر جب ا/۲ جم ا/۲

اس لئے ر = ۴ ر جب ا/۲ جب ب/۲ جب ج/۲

۲۱۱- مثلث اب ج کے زاویہ ا کے مقابل جو جانبی دائرہ بن سکتا ہے اُس کا نصف قطر ر۱ دریافت کرو

اب اور اج کو ل اور م تک خارج کرو،

زایوں ج ب ل اور ب ج م کی

تنصیف خطوط ب م١ اور ج م١ سے کرو، اور فرض کرو کہ یہ خطوط نقطہ م١ پر ملتے ہیں۔

تینوں اضلاع پر عمود م١ د١، م١ ع١ اور م١ ف١ نکالو۔

مثلث م١ د١ ب اور م١ ف١ ب ہر طرح سے برابر ہیں، اسلئے

م١ ف١ = م١ د١

اسی طرح سے م١ ع١ = م١ د١

چونکہ تینوں عمود م١ د١، م١ ع١، م١ ف١ آپس میں برابر ہیں، اس لئے نقطہ م١ دائرہ مجوزہ کا مرکز ہے

اب رقبہ ا ب م١ ج مثلثات ا ب ج اور م١ ب ج کے مجموعہ کے برابر ہے

نیز یہ رقبہ مثلثات م١ ب ا اور م١ ج ا کے مجموعہ کے بھی برابر ہے

اس لئے △ا ب ج + △م١ ب ج = △م١ ج ا + △م١ ا ب

∴ ن + ½ م١ د١ × ب ج = ½ م١ ع١ × ج ا + ½ م١ ف١ × ا ب

یعنی ن + ½ ر١ × اَ = ½ ر١ × بَ + ½ ر١ × جَ

∴ ن = ر١ [(بَ + جَ − اَ) / ۲] = ر١ [(بَ + جَ + اَ) / ۲ − اَ] = ر١ (ن − اَ)

∴ ر١ = ن / (ن − اَ)

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

ر۲ = ف / (ن - ب) اور ر۳ = ف / (ن - ج)

۲۱۲ـ چونکہ اع۱ اور اف۱ میں سے ہر ایک دائرہ کا مماس ہے
اس لئے بموجب دفعہ ۲۰۹، اع۱ = اف۱

اسی طرح سے ب ف۱ = ب د۱ اور ج ع۱ = ج د۱

∴ ۲ اع۱ = اع۱ + اف۱ = اب + ب ف۱ + اج + ج ع۱

= اب + ب د۱ + اج + ج د۱

= اب + ب ج + ج ا = ۲ ن

∴ اع۱ = ن = اف۱

نیز ب د۱ = ب ف۱ = اف۱ - اب = ن - ج

اور ج د۱ = ج ع۱ = اع۱ - اج = ن - ب

∴ م۱ع۱ = اع۱ مس م۱اع۱

یعنی ر۱ = ن مس ا/۲

۲۱۳ـ ر۱ کی ایک تیسری قیمت لا اور زوایا ب اور ج کی رقوم میں اس طرح حاصل ہو سکتی ہے

چونکہ م۱ج زاویہ ب ج ع۱ کی تنصیف کرتا ہے، اس لئے

∠ م۱ج د۱ = ۱/۲ (۱۸۰° - ج) = ۹۰° - ج/۲

اس لئے ∠ م۱ب د۱ = ۹۰° - ب/۲

∴ لا = ب ج = ب د۱ + د۱ج

= م۱د۱ مم م۱ب د۱ + م۱د۱ مم م۱ج د۱

$$= ر_۱\left(\text{مس}\,\frac{ب}{۲} + \text{مس}\,\frac{ج}{۲}\right)$$

$$= ر_۱\left(\frac{\text{جب}\,\frac{ب}{۲}}{\text{جم}\,\frac{ب}{۲}} + \frac{\text{جب}\,\frac{ج}{۲}}{\text{جم}\,\frac{ج}{۲}}\right)$$

$$\therefore\ اَ\ \text{جم}\,\frac{ب}{۲}\ \text{جم}\,\frac{ج}{۲} = ر_۱\left(\text{جب}\,\frac{ب}{۲}\ \text{جم}\,\frac{ج}{۲} + \text{جم}\,\frac{ب}{۲}\ \text{جب}\,\frac{ج}{۲}\right)$$

$$= ر_۱\,\text{جب}\left(\frac{ب}{۲} + \frac{ج}{۲}\right) = ر_۱\,\text{جب}\left(۹۰ - \frac{ا}{۲}\right) = ر_۱\,\text{جم}\,\frac{ا}{۲}$$

$$\therefore\ ر_۱ = \frac{اَ\ \text{جم}\,\frac{ب}{۲}\ \text{جم}\,\frac{ج}{۲}}{\text{جم}\,\frac{ا}{۲}}$$

نتیجہ صریح — چونکہ $اَ = ۲ر\,\text{جب}\,ا = ۴ر\,\text{جب}\,\frac{ا}{۲}\ \text{جم}\,\frac{ا}{۲}$

اسلئے $ر_۱ = ۴ر\,\text{جب}\,\frac{ا}{۲}\ \text{جم}\,\frac{ب}{۲}\ \text{جم}\,\frac{ج}{۲}$

امثلہ نمبری ۳۶

۱ — ایک مثلث کے اضلاع بالترتیب ۱۸، ۲۴، ۳۰ انچ ہیں ثابت کروکہ بیرونی دائرہ، اندرونی دائرہ اور تین جانبی دائروں کے نصف قطر بالترتیب ۱۵، ۶، ۱۲، ۸ اور ۳۶ انچ ہیں

۲ — ایک مثلث کے اضلاع ۱۳، ۱۴، ۱۵ فٹ ہیں، ثابت کروکہ

(۱) $ر = ۸\frac{۱}{۸}$ فٹ (۲) $ر = ۴$ فٹ (۳) $ر_۱ = ۱۰\frac{۱}{۲}$ فٹ

(۴) $ر_۲ = ۱۲$ فٹ اور (۵) $ر_۳ = ۱۴$ فٹ

۳ — اگر مثلث اب ج میں $اَ = ۱۳$، $بَ = ۴$ اور $\text{جم}\,ج = -\frac{۵}{۱۳}$

تو م، ر، ر۱، ر۲ اور ر۳ کی قیمتیں دریافت کرو۔

۴۔ مثلثوں کے حل کی مشتبہ صورت میں ثابت کرو کہ دونوں مثلثوں کے بیرونی دائرے برابر ہوتے ہیں

ثابت کرو کہ

۵۔ $ر_۱(ن - أ) = ر_۲(ن - ب) = ر_۳(ن - ج) = ر ن = ف$

۶۔ $\frac{ر ر_۱}{ر_۲ ر_۳} = مس^۲ \frac{ا}{۲}$　　۷۔ $ر ر_۱ ر_۲ ر_۳ = ف^۲$

۸۔ $ر_۱ ر_۲ ر_۳ = ن^۳ مم^۲ \frac{ا}{۲} مم^۲ \frac{ب}{۲} مم \frac{ج}{۲}$

۹۔ $ر ر_۱ مم \frac{ا}{۲} = ف$

۱۰۔ $ر_۱ ر_۲ + ر_۲ ر_۳ + ر_۳ ر_۱ = ن^۲$

۱۱۔ $\frac{۱}{ر_۱} + \frac{۱}{ر_۲} + \frac{۱}{ر_۳} - \frac{۱}{ر} = ۰$

۱۲۔ $أ(ر ر_۱ + ر_۲ ر_۳) = ب(ر ر_۲ + ر_۳ ر_۱) = ج(ر ر_۳ + ر_۱ ر_۲)$

۱۳۔ $(ر_۱ + ر_۲) مس \frac{ج}{۲} = (ر_۳ - ر) مم \frac{ج}{۲} = ج$

۱۴۔ $ف = ۲م^۲ جب ا جب ب جب ج$

۱۵۔ $۴م جب ا جب ب جب ج = أ جم ا + ب جم ب + ج جم ج$

۱۶۔ $ف = ۴ م ر جم \frac{ا}{۲} جم \frac{ب}{۲} جم \frac{ج}{۲}$

۱۷- $\frac{1}{\text{ر}^2}+\frac{1}{\text{ر}_1^2}+\frac{1}{\text{ر}_2^2}+\frac{1}{\text{ر}_3^2}=\frac{\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2}{\Delta^2}$

۱۸- $\text{ر}_1+\text{ر}_2+\text{ر}_3-\text{ر}=4\,\text{س}$

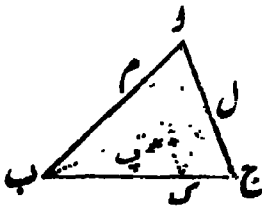
۱۹- $(\text{ر}_1-\text{ر})(\text{ر}_2-\text{ر})(\text{ر}_3-\text{ر})=4\,\text{س}\,\text{ر}^2$

۲۰- $\frac{1}{\text{ب}\,\text{ج}}+\frac{1}{\text{ج}\,\text{ا}}+\frac{1}{\text{ا}\,\text{ب}}=\frac{1}{2\,\text{س}\,\text{ر}}$

۲۱- $\frac{\text{ر}_1}{\text{ب}\,\text{ج}}+\frac{\text{ر}_2}{\text{ج}\,\text{ا}}+\frac{\text{ر}_3}{\text{ا}\,\text{ب}}=\frac{1}{\text{ر}}-\frac{1}{2\,\text{س}}$

۲۲- $\text{ر}^2+\text{ر}_1^2+\text{ر}_2^2+\text{ر}_3^2=16\,\text{س}^2-\text{ا}^2-\text{ب}^2-\text{ج}^2$

۲۱۴- مثلث پائین اور مرکز عمودی

فرض کرو کہ ا ب ج کوئی مثلث ہے اور زاویوں ا، ب، ج سے مقابل کے اضلاع پر عمود بالترتیب اک، ب ل اور ج م نکالے گئے ہیں۔

علم ہندسہ کی اکثر کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ یہ تینوں عمود ایک نقطہ مشترک پ پر ملتے ہیں، اس نقطہ کو مثلث کا مرکز عمودی کہتے ہیں۔ مثلث ک ل م جو ان عمودوں کے پایوں کو ملانے سے بنتا ہے اب ج کا مثلث پائین کہلاتا ہے۔

۲۱۵- مرکز عمودی سے مثلث کے رؤس الزوایا کے

فاصلے دریافت کرو۔

پ ک = ک ب س پ ب ک = ک ب س (۹۰° - ج)

= ا ب جم ب م ج = ج / جب ج جم ب جم ج

= ۲ ر جم ب جم ج .... (دفعہ ۲۰۶)

نیز ا پ = ا ل × قط ک ا ج

= ج جم ا × قم ج

= ج / جب ج × جم ا

= ۲ ر جم ا .... (دفعہ ۲۰۶)

پس ب پ = ۲ ر جم ب اور ج پ = ۲ ر جم ج

لہذا مرکز عمودی کے فاصلے زاویوں کے رائسوں سے ۲ ر جم ا، ۲ ر جم ب، ۲ ر جم ج ہیں۔ اور اضلاع سے اس کے فاصلے ۲ ر جم ب جم ج، ۲ ر جم ج جم ا اور ۲ ر جم ا جم ب ہیں۔

۲۱۶ - مثلث پائیں کے اضلاع اور زاوئے دریافت کرو

چونکہ زاوے پ ک ج اور پ ل ج دونوں قائمے ہیں، اس لئے نقاط پ، ل، ج اور ک سب ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہیں۔

∴ ∠ پ ک ل = ∠ پ ج ل (اقلیدس م ۳ ش ۲۱)

= ۹۰° - ا

اسی طرح سے پ، ب، ک اور م ایک دائرہ کے محیط واقع

، اس لئے

$\angle$ پ ک م = $\angle$ پ ب م

$= ۹۰^\circ - ا$

لئے $\angle$ م ک ل $= ۱۸۰^\circ - ۲ ا$

= تکملہ زاویہ ۲ ا

$\angle$ ک ل م $= ۱۸۰^\circ - ۲$ ب

$\angle$ ل م ک $= ۱۸۰^\circ - ۲$ ج

مثلث ا ل م سے

$\frac{\text{ل م}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{ا ل}}{\text{جب ا م ل}} = \frac{\text{ا ب جم ا}}{\text{جم پ م ل}}$

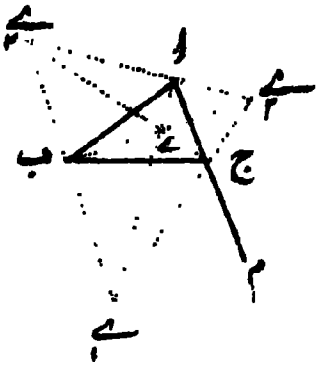
$= \frac{\text{جَ جم ا}}{\text{جم پ ا ل}} = \frac{\text{جَ جم ا}}{\text{جب ج}}$

ل م $= \frac{\text{جَ}}{\text{جب ج}}$ جب ا جم ا

= اَ جم ا (دفعہ ۱۶۹)

م ک = بَ جم ب اور ک ل = جَ جم ج

لئے معلوم ہوا کہ مثلث پائین کے اضلاع اَ جم ا، بَ جم ب، جَ جم ج ہیں۔ اور اس کے زاویے ۲ ا، ۲ ب اور ۲ ج تکملے ہیں۔

۲ — فرض کرو کہ سے اندرونی دائرہ کا مرکز ہے اور ، سے اُن جانبی دائروں کے مرکز ہیں جو بالترتیب

ا، ب، ج کے محاذی ہیں۔
جیسا دفعات ۲۰۸ اور ۲۱۱ میں
ہم نے دیکھا ے ج زاویہ
اج ب کی تنصیف کرتا ہے
اور ے۱ ج زاویہ ب ج م کی
تنصیف کرتا ہے۔

∴ ∠ ے ج ے۱ = ∠ ے ج ب + ∠ ے۱ ج ب

= ½ ∠ اج ب + ½ ∠ م ج ب

= ½ [∠ اج ب + ∠ م ج ب]

= ½ × ۱۸۰° = ایک زاویہ قائمہ

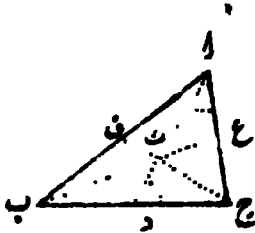
اسی طرح سے ∠ ے ج ے۲ بھی قائمہ ہے

لہذا ے۱ ج ے۲ ایک خط مستقیم ہے اور ے ج اس پر عمود ہے
اسی طرح سے ے۲ ا ے۳ ایک خط مستقیم ہے اور اس پر ے ا
عمود ہے اور ے۳ ب ے۱ خط مستقیم ہے اور ے ب اس پر
عمود ہے۔

نیز چونکہ ے ا اور ے۱ ا دونوں زاویہ ب اج کی
تنصیف کرتے ہیں اس لئے معلوم ہوا کہ تینوں نقطے ا، ے، ے۱
ایک خط مستقیم پر واقع ہیں، اسی طرح سے ب ے ے۲
اور ج ے ے۳ بھی مستقیم خط ہیں۔
لہذا ثابت ہوا کہ ے۱ ے۲ ے۳ ایک مثلث ہے جس میں

اَ، بَ، جَ اُن عمودوں کے پائین ہیں جو نقاط راس سے
مقابل کے اضلاع پر نکالے جائیں اور ے اُن عمودوں
کا نقطہ تقاطع ہے، یا دوسرے الفاظ میں ہم اس کو یوں بیان
کرسکتے ہیں کہ مثلث ے بے جے کا مثلث پائین ا ب ج
ہے اور اس کا مرکز عمودی نقطہ ے ہے
مثلث ے بے جے کو اکثر جانبی مرکزوں کا مثلث کہتے ہیں

۲۱۸ - مثلث کا مرکز ہندسی اور وسطانیات

اگر ا ب ج کوئی مثلث ہو اور د، ع، ف اضلاع ب ج،
ج ا، ا ب کے نقاط تنصیف ہوں تو خطوط ا د، ب ع،
ج ف میں سے ہر ایک کو مثلث کا وسطانیہ کہتے ہیں

علم ہندسہ کی اکثر کتابوں میں
یہ ثابت کیا گیا ہے کہ مثلث
کے وسطانیات ایک مشترک
نقطہ ث پر ملتے ہیں اور

ا ث = ۲/۳ ا د، ب ث = ۲/۳ ب ع

اور　ج ث = ۲/۳ ج ف

نقطہ ث کو مثلث کا مرکز ہندسی کہتے ہیں

۲۱۹ - وسطانیات کے طول

بموجب دفعہ ۱۷۰

ا دَ^۲ = اجَ^۲ + ج دَ^۲ − ۲ ا ج × ج د جم ج

= بَ^۲ + اَ^۲/۴ − اَ بَ جم ج

اور جَ^۲ = بَ^۲ + اَ^۲ − ۲ اَ بَ جم ج

اس لئے ۲ ا دَ^۲ − جَ^۲ = بَ^۲ − اَ^۲/۲

پس ا د = ۱/۲ √(۲ بَ^۲ + ۲ جَ^۲ − اَ^۲)

نیز ا د = ۱/۲ √(بَ^۲ + جَ^۲ + ۲ بَ جَ جم ا) ...... (دفعہ ۱۷۰)

نیز ب ع = ۱/۲ √(۲ جَ^۲ + ۲ اَ^۲ − بَ^۲)

اور ج ف = ۱/۲ √(۲ اَ^۲ + ۲ بَ^۲ − جَ^۲)

۲۲۰ — جو زاوئے کوئی وسطانیہ اضلاع کے ساتھ بناتا ہے اُن کو دریافت کرو

اگر ∠ ب ا د = ب اور ∠ ج ا د = جہ

تو جب جہ / جب ج = د ج / ا د = اَ / ۲ لا

∴ جب جہ = اَ جب ج / ۲ لا = اَ جب ج / √(۲ بَ^۲ + ۲ جَ^۲ − اَ^۲)

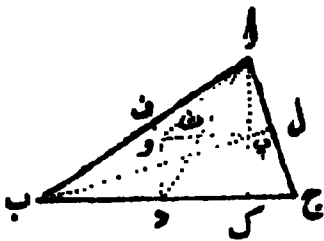
اسی طرح سے جب بہ = اَ جب ب / √(۲ بَ^۲ + ۲ جَ^۲ − اَ^۲)

نیز اگر ∠ ا د ج = طہ تو

$$\frac{\text{جب ط}}{\text{جب ج}} = \frac{\text{اج}}{\text{اد}} = \frac{\text{ب}}{\text{لا}}$$

$$\therefore \text{جب ط} = \frac{\text{ب جب ج}}{\text{لا}} = \frac{\text{۲ب جب ج}}{\sqrt{\text{۲ب}^۲ + \text{۲ج}^۲ - \text{ا}^۲}}$$

پس جو زاویے اد اضلاع سے بناتا ہے وہ معلوم ہوئے

۲۲۱ — ثابت کرو کہ مثلث کا مرکز ہندسی ہمیشہ اُس خط پر واقع ہوتا ہے جو بیرونی مرکز اور مرکز عمودی کو ملانے سے پیدا ہو

فرض کرو کہ نقطہ و بیرونی دائرہ کا مرکز ہے اور پ مرکز عمودی ہے

ضلع ب ج پر عمود و د اور پ ک نکالو اور فرض کرو کہ اد اور وپ نقطہ ث پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

مثلث و ث د اور پ ث ا کے زاویے باہم برابر ہیں

نیز بموجب دفعہ ۲۰۶

و د = س جم ا

اور بموجب دفعہ ۲۱۵

ا پ = ۲ س جم ا

اس لئے بحکم اقلیدس م ۶ ش ۴

$$\frac{\text{اث}}{\text{ث د}} = \frac{\text{اپ}}{\text{و د}} = ۲$$

لہٰذا نقطہ ث مثلث کا مرکز ہندسی ہے،
نیز مسئلہ مذکورہ بالا کی مدد سے

$$\frac{وث}{ثپ} = \frac{ود}{اپ} = \frac{1}{2}$$

اس لئے معلوم ہوا کہ مثلث کا مرکز ہندسی اُس خط پر واقع ہے جو بیرونی دائرہ کے مرکز کو مرکز عمودی کے ساتھ ملاتا ہے اور اس خط کو ۱ : ۲ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

نیز عمل ہندسی سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ مثلث کے نو نقطی دائرہ کا مرکز (یعنی ایسے دائرہ کا مرکز جو عمودوں کے پایوں اور ضلعوں کے نقاط تنصیف اور اُن خطوط کے وسطی نقاط میں سے ہو کر گزرے جو مثلث کے نقاط راس کو مرکز عمودی سے ملاتے ہیں) ہمیشہ خط وپ پر واقع ہوگا اور اس کی تنصیف کریگا۔

اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ بیرونی دائرہ کا مرکز، مرکز ہندسی، نو نقطی دائرہ کا مرکز اور مرکز عمودی چاروں نقطے ایک خط مستقیم پر واقع ہیں۔

۲۲۲- بیرونی دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو۔

اگر اب پر عمود وف نکالا جائے تو

$\angle$ واف = ۹۰ - $\angle$ اوف = ۹۰ - ج

نیز $\angle$ پ ال = ۹۰ - ج

∴ ∠ واپ = ا - ∠ واف - ∠ پ ال

= ۱۸۰ - ۲ ج = ۱ + ۲ ج - ۱۸۰°

= ۱ + ۲ ج - (ا + ب + ج) = ج - ب

نیز وا = س اور بموجب دفعہ ۲۱۵، پ ا = ۲ ر جم ا

∴ وپ۲ = وا۲ + پ ا۲ - ۲ وا × پ ا جم واپ

= ر۲ + ۴ ر۲ جم۲ ا - ۴ ر۲ جم ا جم (ج - ب)

= ر۲ + ۴ ر۲ جم ا [جم ا - جم (ج - ب)]

= ر۲ - ۴ ر۲ جم ا [جم (ب + ج) + جم (ج - ب)] دفعہ ۸۲

= ر۲ - ۸ ر۲ جم ا جم ب جم ج

∴ وپ = ر √(۱ - ۸ جم ا جم ب جم ج)

۲۲۳ - مثلث کے بیرونی اور اندرونی دائروں کے مرکزوں کا باہمی فاصلہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ و بیرونی دائرہ کا مرکز ہے اور وف ضلع اب پر عمود ہے

نیز فرض کرو کہ ے اندرونی دائرہ کا مرکز ہے اور ضلع اج پر ے ع عمود ہے

تب بموجب دفعہ سابق

∠ واف = ۹۰ - ج

∴ ∠ واے = ∠ ے اف - ∠ واف

$$= \frac{\text{ا}}{2} - (90 - \text{ج}) = \frac{\text{ا}}{2} + \text{ج} - \frac{\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}}{2}$$

$$= \frac{\text{ج}-\text{ب}}{2}$$

$$\text{نیز ا ے} = \frac{\text{ع ے}_1}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{2}} = \frac{\text{ر}_1}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{2}} = 4\,\text{ر جب}\,\frac{\text{ب}}{2}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{2}$$

(دفعہ ۲۱۰ نتیجہ صریح) ....

$$\therefore \text{و ے}^2 = \text{و ا}^2 + \text{ا ے}^2 - 2\,\text{و ا} \times \text{ا ے جم و ا ے}$$

$$= \text{ر}^2 + 16\,\text{ر}^2\,\text{جب}^2\,\frac{\text{ب}}{2}\,\text{جب}^2\,\frac{\text{ج}}{2}$$

$$- 8\,\text{ر}^2\,\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{2}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{2}\,\text{جم}\,\frac{\text{ج}-\text{ب}}{2}$$

$$\therefore \frac{\text{و ے}^2}{\text{ر}^2} = 1 + 16\,\text{جب}^2\,\frac{\text{ب}}{2}\,\text{جب}^2\,\frac{\text{ج}}{2}$$

$$- 8\,\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{2}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{2}\left[\text{جم}\,\frac{\text{ب}}{2}\,\text{جم}\,\frac{\text{ج}}{2} + \text{جب}\,\frac{\text{ب}}{2}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{2}\right]$$

$$= 1 - 8\,\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{2}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{2}\left(\text{جم}\,\frac{\text{ب}}{2}\,\text{جم}\,\frac{\text{ج}}{2} - \text{جب}\,\frac{\text{ب}}{2}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{2}\right)$$

$$= 1 - 8\,\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{2}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{2}\,\text{جم}\,\frac{\text{ب}+\text{ج}}{2}$$

$$= 1 - 8\,\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{2}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{2}\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{2} \quad (\text{دفعہ } 75) \;\ldots\ldots (1)$$

$$\therefore \text{و ے} = \text{ر}\sqrt{1 - 8\,\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{2}\,\text{جب}\,\frac{\text{ج}}{2}\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{2}}$$

نیز ربط (۱) کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

وسے^2 = ر^2 - ۲ ر × ۴ ر جب $\frac{ا}{۲}$ جب $\frac{ب}{۲}$ جب $\frac{ج}{۲}$

= ر^2 - ۲ ر ر (دفعہ ۲۱۰ نتیجہ صریح)

اسی طرح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر زاویہ ا کے مقابل کے جانبی دائرہ کا مرکز سے ہو تو

وسے = ر | ۱ + ۱ جب $\frac{ا}{۲}$ جم $\frac{ب}{۲}$ جم $\frac{ج}{۲}$

اس لئے وسے^2 = ر^2 + ۲ ر ر (دفعہ ۲۱۳، نتیجہ صریح)

طرز دیگر۔ فرض کرو کہ اگر وسے کو دونوں طرف خارج کیا جائے وہ مثلث کے بیرونی دائرہ کو نقاط س اور ط پر قطع کرتا ہے اور خط اسے دائرہ کو نقطہ ھ پر ملتا ہے۔

بحکم اقلیدس م ۳ ش ۳۵

س سے × سے ط = اسے × سے ھ .... (۲)

لیکن س سے × سے ط = (ر + وسے) (ر - وسے)

= ر^2 - وسے^2

اور ∠ ھ سے ج = ∠ سے ج ا + ∠ سے ا ج

= ∠ سے ج ب + ∠ ھ ا ب

= ∠ سے ج ب + ∠ ھ ج ب

= ∠ ھ ج سے

ھ سے = ھ ج = ۲ ر جب $\frac{ا}{۲}$ (دفعہ ۲۰۶)

نیز اسے = سے ع = ر / جب ا/۲

(۲) میں یہ قیمتیں مندرج کرنے سے

ر۲ - و سے۲ = ۳ ر ا ر

یعنی و سے۲ = ر۲ - ۲ ر ا ر

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ سے ہ = سے ج

اس لئے سے و۲ - ر۲ = سے ہ × سے ا = ۲ ر ا ر

یعنی سے و۲ = ر۲ + ۲ ر ا ب

۲۲۴- زاویوں کے منصف

اگر اد زاویہ ا کی تنصیف کرے اور قاعدہ کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرے جنکے طول لا اور ما ہوں تو

ا، ب، ج، د، ہ، س، طہ

بموجب اقلیدس م ۶ ش ۳

$$\frac{لا}{ما} = \frac{اب}{اج} = \frac{ج}{ب}$$

$$\therefore \frac{لا}{ج} = \frac{ما}{ب} = \frac{لا+ما}{ب+ج} = \frac{ا}{ب+ج} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۱)$$

جس سے لا اور ما کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

نیز اگر اد ضلع ب ج سے زاویہ طہ بنائے اور اس کا

طول ص ہو تو

$\triangle$ اب ج = $\triangle$ اب د + $\triangle$ اج د

$\therefore$ $\frac{1}{2}$ جَ ص جب $\frac{ا}{2}$ + $\frac{1}{2}$ بَ ص جب $\frac{ا}{2}$

= $\frac{1}{2}$ بَ جَ جب ا

یعنی ص = $\frac{بَ جَ}{بَ + جَ}$ × $\frac{جب ا}{جب \frac{ا}{2}}$

= $\frac{2 بَ جَ}{بَ + جَ}$ جم $\frac{ا}{2}$ .... (۲)

نیز ط = $\angle$ د اب + ب = $\frac{ا}{2}$ + ب .... (۳)

اس طرح سے ہمیں منصف کا طول اور ب ج سے اس کا میلان حاصل ہوتا ہے۔

امثلہ نمبری ۳۷

اگر ایک مثلث اب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز ے ہو اور تین جانبی دائروں کے مرکز ےا، ےب، ےج ہوں تو ثابت کرو کہ

۱۔ اے = رقم $\frac{ا}{2}$

۲۔ ے ا × ے ب × ے ج = اَ بَ جَ مس $\frac{ا}{2}$ مس $\frac{ب}{2}$ مس $\frac{ج}{2}$

۳۔ اےا = رِ قم $\frac{ا}{2}$ ۴۔ ے ےا = اَ قط $\frac{ا}{2}$

۵۔ ےب ےج = اَ قم $\frac{ا}{2}$

۶۔ ے ےا × ے ےب × ے ےج = ۱۶ مر۲ ر

۷۔ ےا ےب۲ = ۴ر (ر۱ + ر۲)

۸- ∠ سے۱ سے۳ سے۲ = $\frac{\text{ب+ج}}{۲}$

۹- سے سے۱² + سے۲ سے۳² = سے سے۲² + سے۱ سے۳² = سے سے۳² + سے۱ سے۲² = ۴ ر²

۱۰- مثلث سے۱ سے۲ سے۳ کا رقبہ = ۸ ر² جم $\frac{\text{ا}}{۲}$ جم $\frac{\text{ب}}{۲}$ جم $\frac{\text{ج}}{۲}$ = $\frac{\text{ا ب ج}}{\text{۲ ر}}$

۱۱- $\frac{\text{سے سے۱ × سے۲ سے۳}}{\text{جب ا}}$ = $\frac{\text{سے سے۲ × سے۳ سے۱}}{\text{جب ب}}$ = $\frac{\text{سے سے۳ × سے۱ سے۲}}{\text{جب ج}}$

اگر مثلث ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز سے ہو اور بیرونی دائرہ کا مرکز و، نیز عمودی مرکز پ ہو اور ہندسی مرکز ث تو ثابت کرو کہ

۱۲- سے و² = ر² (۳ - ۲ جم ا - ۲ جم ب - ۲ جم ج)

۱۳- سے پ² = ۲ ر² - ۴ ر² جم ا جم ب جم ج

۱۴- و ث² = ر² - $\frac{۱}{۹}$ (ا² + ب² + ج²)

۱۵- △ سے و پ کا رقبہ = ۲ ر² جب $\frac{\text{ب-ج}}{۲}$ جب $\frac{\text{ج-ا}}{۲}$ جب $\frac{\text{ا-ب}}{۲}$

۱۶- △ سے پ ث کا رقبہ = $\frac{۴}{۳}$ ر² جب $\frac{\text{ب-ج}}{۲}$ جب $\frac{\text{ج-ا}}{۲}$ جب $\frac{\text{ا-ب}}{۲}$

۱۷- ثابت کرو کہ نو نقطی دائرہ کے مرکز کا فاصلہ زاویہ ا سے

$\frac{\text{ر}}{۲}\sqrt{\text{۱ + ۸ جم ا جب ب جب ج}}$ ہے

۱۸- مثلث ا ب ج کا مثلث پائیں د ع ف ہے ثابت کرو کہ

(۱) اس کا رقبہ ۲ ∆ جم ا جم ب جم ج ہے

(۲) اس کے بیرونی دائرہ کا نصف قطر $\frac{\text{ر}}{۲}$ ہے

اور (۳) اس کے اندرونی دائرہ کا نصف قطر ۲ ر جم ا جم ب جم ج ہے

۱۹- اگر مثلث ا ب ج کے جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے

۔ مثلث $و_1$ $و_2$ $و_3$ بنے تو ثابت کرو کہ

(۱) اس کے اضلاع ۴ م جم $\frac{ا}{۲}$، ۴ م جم $\frac{ب}{۲}$، ۴ م جم $\frac{ج}{۲}$ ہیں

(۲) اس کے زاویے $\frac{\pi}{۲}-\frac{ا}{۲}$، $\frac{\pi}{۲}-\frac{ب}{۲}$ اور $\frac{\pi}{۲}-\frac{ج}{۲}$ ہیں

(۳) اس کا رقبہ ۲ م ن ہے

۲ ۔ جن نقطوں پر مثلث ا ب ج کا دائرہ اندرونی اضلاع کو
مس کرتا ہے اُن کو ملانے سے ایک اور مثلث د ع ف بنتا ہے ثابت کرو کہ

(۱) اس مثلث کے اضلاع ۲ ر جم $\frac{ا}{۲}$، ۲ ر جم $\frac{ب}{۲}$، ۲ ر جم $\frac{ج}{۲}$ ہیں

(۲) اس کے زاویے $\frac{\pi}{۲}-\frac{ا}{۲}$، $\frac{\pi}{۲}-\frac{ب}{۲}$ اور $\frac{\pi}{۲}-\frac{ج}{۲}$ ہیں

(۳) اس کا رقبہ $\frac{۲ ن^۳}{ا ب ج ن}$ یعنی $\frac{۱}{۲}\frac{ر}{م}$ ن ہے

۔ مثلث ا ب ج کے اضلاع کے نقاط تنصیف د، ع، ف ہیں، ثابت کرو کہ
مثلث د ع ف اور مثلث ا ب ج کے ہندسی مرکز ایک دوسرے پر منطبق ہوتے
ہیں، نیز ثابت کرو کہ مثلث د ع ف کا مرکز عمودی ا ب ج کے بیرونی دائرہ کا مرکز ہے
کسی مثلث ا ب ج میں ثابت کرو کہ ۔

۴ ۔ اگر زاویہ ا سے مقابل کے ضلع ب ج پر عمود نکالا جائے تو وہ اس
ج کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے جو اسکے متصل زاویوں کے مماسات التمام
کے متناسب ہوتے ہیں اور زاویہ ا کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے
کی جیوب التمام اضلاع متصلہ کے بالعکس متناسب ہوتی ہیں ۔

۴ ۔ زاویہ ا میں سے گزرنے والا وسطانیہ اس کو دو ایسے زاویوں میں تقسیم
ہے جن کے مماس التمام ۲ مم ا + مم ج اور ۲ مم ا + مم ب ہیں اور مثلث کے
مد ہ سے ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا مماس التمام $\frac{۱}{۲}$(مم ج ~ مم ب) ہے

۲۴۔ اگر زاویہ ا سے مقابل کے ضلع ب ج پر عمود نکالا جائے تو پائین عمود اور ب ج کے نقطہ تنصیف کا باہمی فاصلہ $\frac{ب^2 - ج^2}{۲ا}$ ہے۔

۲۵۔ و مثلث ا ب ج کا مرکز عمودی ہے، ثابت کرو کہ مثلثات ب و ج، ج و ا، ا و ب اور ا ب ج کے بیرونی دائرے سب برابر ہیں۔

۲۶۔ مثلث ا ب ج کے رؤس الزوایا سے مقابل کے اضلاع پر عمود ا د، ب ع اور ج ف کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ مثلثات اع ف، ب د ف، ج د ع کے بیرونی دائروں کے قطر بالترتیب ا مم ا، ب مم ب اور ج مم ج ہیں اور مثلث د ع ف اور ا ب ج کے اضلاع کے مجموعوں کی باہمی نسبت ر : مر ہے

۲۷۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز سے رؤس الزوایا کے فاصلوں کا حاصل ضرب ۴ مر ر^2 ہوتا ہے۔

۲۸۔ مثلث ا ب ج کے تین جانبی دائروں کے گرد ایک، مثلث د ع ف بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ

$$\frac{ع ف}{ا جم ا} = \frac{ف د}{ب جم ب} = \frac{د ع}{ج جم ج}$$

۲۹۔ اگر ایک ایسا دائرہ کھینچا جائے جو ایک مثلث کے اندرونی اور بیرونی دائروں کو مس کرے، نیز ضلع ب ج کو خارجاً مس کرے تو ثابت کرو کہ اس کا نصف قطر $= \frac{ی}{ا}$ مس^2 $\frac{ا}{۲}$

۳۰۔ اگر تین ایسے دائروں کے نصف قطر جو ایک دوسرے کو خارجاً مس کریں ا، ب، ج ہوں اور اگر ان تینوں کو مس کرتے ہوئے دو اور دائرے کھینچے جائیں جن کے نصف قطر ر اور ر' ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ر} - \frac{1}{ر'} = \frac{۲}{ا} + \frac{۲}{ب} + \frac{۲}{ج}$$

۳۱- ایک مثلث معلوم کا رقبہ △ سے تعبیر ہوتا ہے اس کے اندرونی دائرہ کے نقاط تماس کو ملانے سے ایک اور مثلث بنتا ہے جس کا رقبہ △ب ہے، اگر اسی طرح جانبی دائروں کے متعلقہ مثلثوں کے رقبے بالترتیب △۱، △۲، △۳ ہوں تو ثابت کرو کہ △۱ + △۲ + △۳ - △ب = ۲△

۳۲- اگر مثلث ا ب ج کے زاویوں کے منصف مقابل کے اضلاع کو نقاط ا، ب، ج پر ملیں تو ثابت کرو کہ مثلثات ا ب ج اور ا ب ج کے رقبوں کی باہمی نسبت

۲ جب ا/۲ جب ب/۲ جب ج/۲ : جم (ا-ب)/۲ جم (ب-ج)/۲ جم (ج-ا)/۲ ہے

۳۳- ایک مثلث کے زاویوں کے راسوں میں سے ایسے مستقیم خط کھینچے گئے ہیں جو مقابل کے اضلاع کے ساتھ ایک ہی زاویہ عہ بناتے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے تقاطع سے جو مثلث بنتا ہے اس کے رقبہ کو اصلی مثلث کے رقبہ کے ساتھ نسبت ۴ جم۲ عہ : ۱ ہے

۳۴- دو دائروں کا زاویہ تقاطع طہ ہے اور ان کے نصف قطر ا اور ب ہیں، ثابت کرو کہ ان کے مشترک وتر کا طول

$$\frac{۲\ ا\ ب\ جب\ طہ}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲ + ۲\ ا\ ب\ جم\ طہ}} \text{ ہے}$$

۳۵- تین مساوی دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں، اس دائرہ کا نصف قطر دریافت کرو جو ان تینوں کو مس کرے۔

۳۶- تین دائروں کے نصف قطر ا، ب، ج ہیں اور وہ ایک دوسرے کو خارجاً مس کرتے ہیں، اگر ان کے نقاط تماس پر مماس کھینچے جائیں تو وہ ایک نقطہ پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ اس نقطہ تقاطع کا فاصلہ کسی

نقطۂ تماس سے $\left(\frac{\text{ا ب ج}}{\text{ا + ب + ج}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$ ہے

۳۷ - اضلاع ب ج ، ج ا ، ا ب میں تین نقطے $\text{ا}_۱$ ، $\text{ب}_۱$ ، $\text{ج}_۱$ ایسے مقرر کیے گئے ہیں کہ

$\text{ب ا}_۱ : \text{ا}_۱\text{ ج} = \text{ج ب}_۱ : \text{ب}_۱\text{ ا} = \text{ا ج}_۱ : \text{ج}_۱\text{ ب} = \text{م : ن}$ ، ثابت کرو کہ خطوط $\text{ا ا}_۱$ ، $\text{ب ب}_۱$ ، $\text{ج ج}_۱$ کے باہمی تقاطع سے ایک ایسا مثلث پیدا ہوگا جس کے رقبہ کی نسبت مثلث ا ب ج کے ساتھ $(\text{م} - \text{ن})^۲ : \text{م}^۲ + \text{م ن} + \text{ن}^۲$ ہوگی۔

۳۸ - مثلث ا ب ج کا اندرونی دائرہ اضلاع ب ج ، ج ا ، ا ب کو نقاط $\text{ا}_۱$ ، $\text{ب}_۱$ ، $\text{ج}_۱$ پر بالترتیب مس کرتا ہے ، اسی طرح سے مثلث $\text{ا}_۱\text{ ب}_۱\text{ ج}_۱$ کا دائرہ اندرونی اضلاع کو نقاط $\text{ا}_۲$ ، $\text{ب}_۲$ ، $\text{ج}_۲$ پر مس کرتا ہے اور علیٰ ہٰذا القیاس ، اگر ن واں مثلث $\text{ا}_\text{ن}\text{ ب}_\text{ن}\text{ ج}_\text{ن}$ اس طرح سے پیدا ہو تو ثابت کرو کہ اس کے زاویے

$$\frac{\pi}{۳} + (-۲)^{\text{ن}}\left(\text{ا} - \frac{\pi}{۳}\right) \text{ ، } \frac{\pi}{۳} + (-۲)^{\text{ن}}\left(\text{ب} - \frac{\pi}{۳}\right)$$

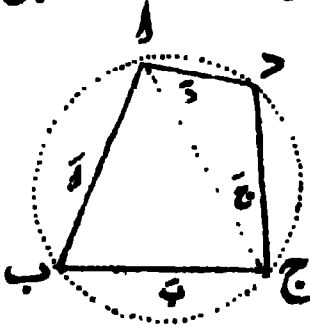
$$\text{اور } \frac{\pi}{۳} + (-۲)^{\text{ن}}\left(\text{ج} - \frac{\pi}{۳}\right) \text{ ہیں}$$

اس لئے ثابت کرو کہ آخرالامر اس طرح سے جو مثلث بنے گا وہ متساوی الاضلاع ہوگا۔

۳۹ - مثلث ا ب ج کا مثلث پائین $\text{ا}_۱\text{ ب}_۱\text{ ج}_۱$ ہے اور $\text{ا}_۱\text{ ب}_۱\text{ ج}_۱$ کا مثلث پائین $\text{ا}_۲\text{ ب}_۲\text{ ج}_۲$ ہے اور علیٰ ہٰذا القیاس ، ن ویں مثلث پائین کے زاویے $\text{ا}_\text{ن}$ ، $\text{ب}_\text{ن}$ ، $\text{ج}_\text{ن}$ دریافت کرو۔

باب شانزدہم

اشکال ذوار بعتہ الاضلاع اور منتظم کثیر الاضلاع

۲۲۵ — ایک ذو اربعتہ الاضلاع دائرہ کے اندر بن سکتی ہے، اُس کا رقبہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ذو اربعتہ الاضلاع ا ب ج د ہے اور اُس کے اضلاع کے طول اَ، بَ، جَ، دَ شکل میں دکھلائے گئے ہیں۔

ذو اربعتہ الاضلاع کا رقبہ = رقبہ △ ا ب ج + رقبہ △ ا د ج

$=\frac{1}{2}$ اَ بَ جب ب + $\frac{1}{2}$ جَ دَ جب د (دفعہ ۲۰۴)

$=\frac{1}{2}$ (اَ بَ + جَ دَ) جب ب

اور چونکہ اقلیدس م ۳ ش ۲۲ کی رو سے ∠ ب = ۱۸۰ − ∠ د

اس لئے جب ب = جب د

اب ہمیں جب ب کو اضلاع کی رقوم میں بیان کرنا ہے

اَ^{2} + بَ^{2} − ۲ اَ بَ جم ب = اج^2

$$= ج^2 + د^2 - ۲\,ج\,د\ جم\ د$$

لیکن $جم\ د = جم\,(۱۸۰ - ب) = -\ جم\ ب$

اس لئے $ا^2 + ب^2 - ۲\,ا\,ب\ جم\ ب = ج^2 + د^2 + ۲\,ج\,د\ جم\ ب$

یعنی $$جم\ ب = \frac{ا^2 + ب^2 - ج^2 - د^2}{۲\,(ا\,ب + ج\,د)}$$

اس لئے $$جب^2\ ب = ۱ - جم^2\ ب = ۱ - \frac{(ا^2 + ب^2 - ج^2 - د^2)^2}{\{۲(ا\,ب + ج\,د)\}^2}$$

$$= \frac{\{۲(ا\,ب + ج\,د)\}^2 - \{ا^2 + ب^2 - ج^2 - د^2\}^2}{۴(ا\,ب + ج\,د)^2}$$

$$= \frac{\{۲(ا\,ب + ج\,د) + (ا^2 + ب^2 - ج^2 - د^2)\}\{۲(ا\,ب + ج\,د) - (ا^2 + ب^2 - ج^2 - د^2)\}}{۴(ا\,ب + ج\,د)^2}$$

$$= \frac{\{(ا^2 + ۲\,ا\,ب + ب^2) - (ج^2 - ۲\,ج\,د + د^2)\}\{(ج^2 + ۲\,ج\,د + د^2) - (ا^2 + ب^2 - ۲\,ا\,ب)\}}{۴(ا\,ب + ج\,د)^2}$$

$$= \frac{\{(ا + ب)^2 - (ج - د)^2\}\{(ج + د)^2 - (ا - ب)^2\}}{۴(ا\,ب + ج\,د)^2}$$

$$= \frac{\{(ا + ب + ج - د)(ا + ب - ج + د)(ج + د + ا - ب)(ج + د - ا + ب)\}}{۴(ا\,ب + ج\,د)^2}$$

فرض کرو کہ $ا + ب + ج + د = ۲ن$

یعنی $ا + ب + ج - د = (ا + ب + ج + د) - ۲د = ۲(ن - د)$

$ا + ب - ج + د = ۲\,(ن - ج)$

$ا - ب + ج + د = ۲\,(ن - ب)$

اور $-ا+ب+ج+د = ۲(ن-ا)$

اسلئے جب ب $= \frac{۲(ن-د)\times ۲(ن-ج)\times ۲(ن-ب)\times ۲(ن-ا)}{۴(اب+جد)^{۲}}$

یعنی $(اب+جد)$ جب ب $= ۲\sqrt{(ن-ا)(ن-ب)(ن-ج)(ن-د)}$

لہذا ذوار بعۃ الاضلاع کا رقبہ

$= \frac{۱}{۲}(اب+جد)$ جب ب $= \sqrt{(ن-ا)(ن-ب)(ن-ج)(ن-د)}$

۲۲۶ - چونکہ جم ب $= \frac{ا^{۲}+ب^{۲}-ج^{۲}-د^{۲}}{۲(اب+جد)}$

اس لئے $اج^{۲} = ا^{۲}+ب^{۲}-۲اب$ جم ب

$= ا^{۲}+ب^{۲} - اب\,\frac{ا^{۲}+ب^{۲}-ج^{۲}-د^{۲}}{اب+جد}$

$= \frac{(ا^{۲}+ب^{۲})جد + اب(ج^{۲}+د^{۲})}{اب+جد}$

$= \frac{(اج+بد)(اد+بج)}{اب+جد}$

اسی طرح سے یہ ثابت ہوسکتا ہے کہ

$بد^{۲} = \frac{(اب+جد)(اج+بد)}{اد+بج}$.

اس سے ہمیں ذوار بعۃ اضلاع کے قطروں کے طول معلوم ہوتے ہیں۔

ضرب دینے سے $\text{اج}^2 \times \text{ب د}^2 = (\text{اَ جَ} + \text{بَ دَ})^2$

یعنی اج × ب د = اب × ج د + ب ج × اد

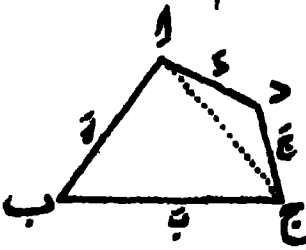
اور یہ اقلیدس م ۶ مسئلہ د ہے

نیز ذو اربعۃ الاضلاع کے بیرونی دائرے کا مرکز

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\text{اج}}{\text{جب ب}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\text{اَ جَ} + \text{بَ دَ})(\text{اَ دَ} + \text{بَ جَ})}{\text{اَ بَ} + \text{جَ دَ}}} \div 4\sqrt{\frac{(\text{ن} - \text{اَ})(\text{ن} - \text{بَ})(\text{ن} - \text{جَ})(\text{ن} - \text{دَ})}{(\text{اَ بَ} + \text{جَ دَ})^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(\text{اَ بَ} + \text{جَ دَ})(\text{اَ جَ} + \text{بَ دَ})(\text{اَ دَ} + \text{بَ جَ})}{(\text{ن} - \text{اَ})(\text{ن} - \text{بَ})(\text{ن} - \text{جَ})(\text{ن} - \text{دَ})}}$$

۲۲۷- اگر کوئی ذو اربعۃ الاضلاع دی ہوئی ہو اور یہ ضروری نہیں کہ وہ ایک دائرہ کے اندر بن سکے تو ہم اس کے رقبہ کو اضلاع اور دو مقابل کے زاویوں کے مجموعہ کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ دو زاویوں ب اور د کا مجموعہ ۲ عہ ہے، اگر ذو اربعۃ الاضلاع کے رقبہ کو قہ سے تعبیر کریں تو

قہ = رقبہ مثلث اب ج + رقبہ مثلث اج د

$$= \frac{1}{2}\,\text{اَ بَ جب ب} + \frac{1}{2}\,\text{جَ دَ جب د}$$

یعنی ۴ قد = ۲ اَ بَ جب ب + ۲ جَ دَ جب د ......(۱)

نیز اَ^{2} + بَ^{2} - ۲ اَ بَ جم ب = جَ^{2} + دَ^{2} - ۲ جَ دَ جم د

پس اَ^{2} + بَ^{2} - جَ^{2} - دَ^{2} = ۲ اَ بَ جم ب - ۲ جَ دَ جم د ......(۲)

(۱) اور (۲) کو مربع کرلے اور جمع کرنے سے حاصل ہوگا۔

۱۶ قد^{2} + (اَ^{2} + بَ^{2} - جَ^{2} - دَ^{2})^{2}

= ۴ اَ^{2} بَ^{2} + ۴ جَ^{2} دَ^{2} - ۸ اَ بَ جَ دَ (جم ب جم د - جب ب جب د)

= ۴ اَ^{2} بَ^{2} + ۴ جَ^{2} دَ^{2} - ۸ اَ بَ جَ دَ جم (ب + د)

= ۴ اَ^{2} بَ^{2} + ۴ جَ^{2} دَ^{2} - ۸ اَ بَ جَ دَ جم ۲ عہ

= ۴ اَ^{2} بَ^{2} + ۴ جَ^{2} دَ^{2} - ۸ اَ بَ جَ دَ (۲ جم^{2} عہ - ۱)

= ۴ (اَ بَ + جَ دَ)^{2} - ۱۶ اَ بَ جَ دَ جم^{2} عہ

یعنی ۱۶ قد^{2} = ۴ (اَ بَ + جَ دَ)^{2} - (اَ^{2} + بَ^{2} - جَ^{2} - دَ^{2})^{2}

- ۱۶ اَ بَ جَ دَ جم^{2} عہ ....(۳)

لیکن بموجب دفعہ ۲۲۵

۴ (اَ بَ + جَ دَ)^{2} - (اَ^{2} + بَ^{2} - جَ^{2} - دَ^{2})^{2}

= ۲ (ن - اَ) × ۲ (ن - بَ) × ۲ (ن - جَ) × ۲ (ن - دَ)

= ۱۶ (ن - اَ)(ن - بَ)(ن - جَ)(ن - دَ)

لہذا مساوات (۳) سے

قد^{2} = (ن - اَ)(ن - بَ)(ن - جَ)(ن - دَ) - اَ بَ جَ دَ جم^{2} عہ

جس سے رقبہ مطلوبہ حاصل ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح ۱ ۔ اگر د صفر ہو تو شکل ذو اربعۃ الاضلاع مثلث بن جائے گی اور ضابطہ مندرجہ بالا سے ضابطہ دفعہ ۲۰۴ حاصل

ہوگا۔

نتیجہ صریح ۲۔ اگر ذواربعۃ الاضلاع کے چاروں اضلاع معلوم ہوں تو اَ، بَ، جَ، دَ کی قیمتیں اور اسلئے ن کی قیمت معلوم ہو جائے گی، رقبہ قد کی بڑی سے بڑی قیمت اُس وقت ہوگی جبکہ اَ بَ جَ دَ جم۲ عہ کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی ہو یعنی جبکہ جم۲ عہ صفر کے برابر ہو اور اُس وقت عہ = ۹۰°، اس صورت میں شکل کے دو مقابل کے زاویوں کا مجموعہ ۱۸۰° ہوگا اور شکل ایک دائرہ کے اندر بن سکے گی۔ (اقلیدس م ۳ ش ۲۲)

اس سے معلوم ہوا کہ جب ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع دیئے ہوئے ہوں اس کے رقبہ کی بڑی سے بڑی قیمت اس وقت ہوگی جب وہ ایک دائرہ کے اندر بن سکے۔

۲۲۸۔ مثال۔ ایک ایسی ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ دریافت کرو جس کے اندر ایک دائرہ بن سکے۔

فرض کرو کہ ایک ذواربعۃ الاضلاع ا ب ج د کے اندر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے اور وہ اضلاع اب، ب ج، ج د، اور د ا کو ف، ق، ر، س پر مس کرتا ہے۔ تب

ا ف = ا س، ب ف = ب ق، ج ق = ج ر اور د ر = د س

∴ ا ف + ب ف + ج ر + د ر = ا س + ب ق + ج ق + د س

یعنی ا ب + ج د = ب ج + د ا

یعنی اَ + جَ = بَ + دَ

$$\text{اسلئے ن} = \frac{\text{اَ + بَ + جَ + دَ}}{2} = \text{اَ + جَ} = \text{بَ + دَ}$$

∴ ن - اَ = جَ ، ن - بَ = دَ ، ن - جَ = اَ اور ن - دَ = بَ

اس لئے ضابطہ دفعہ آخر سے اس صورت میں ہوگا

قر۲ = اَ بَ جَ دَ - اَ بَ جَ دَ جم۲ عہ = اَ بَ جَ دَ جب۲ عہ

یعنی رقبہ مطلوبہ = $\sqrt{}$ اَ بَ جَ دَ جب عہ

اگر علاوہ اس کے ذوار بعتہ الاضلاع ایک دائرہ کے اندر بن سکے تو

۲ عہ = ۱۸۰° یعنی جب عہ = جب ۹۰° = ۱

اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ ایک ایسی ذوار بعتہ الاضلاع کا رقبہ جس کے اندر ایک دائرہ اور باہر ایک دائرہ بن سکے = $\sqrt{}$ اَ بَ جَ دَ

امثلہ نمبری ۳۸

۱۔ ایک ذوار بعتہ الاضلاع کے اندر ایک ایسا دائرہ بن سکتا ہے جو اضلاع کو مس کرے ، اگر اس کے اضلاع مفصلہ ذیل ہوں تو ہر ایک صورت میں اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(۱) ۳ ، ۵ ، ۷ ، اور ۹ فٹ

(۲) ۷ ، ۱۰ ، ۵ ، اور ۲ فٹ

۲۔ ایک ذوار بعتہ الاضلاع کے اضلاع بالترتیب ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ فٹ ہیں اور اس کے دو مقابل کے زاویوں کا مجموعہ ۱۲۰° ہے ثابت کرو کہ ذوار بعتہ الاضلاع کا رقبہ ۳ $\sqrt{۳۰}$ مربع فٹ ہے

۳۔ ایک ذوار بعتہ الاضلاع کے اضلاع ۳ ، ۳ ، ۴ اور ۴ اور ۴ فٹ ہیں اور اس کے گرد ایک دائرہ بن سکتا ہے ، اس کے اندرونی اور بیرونی دائروں کے نصف قطر دریافت کرو۔

۴ — ثابت کرو کہ کسی ذوار بعتہ الاضلاع کا رقبہ اس کے دو قطروں اور اُن کے درمیانی زاویہ کی جیب کے نصف حاصل ضرب کے برابر ہے

۵ — ایک ذوار بعتہ الاضلاع ایک دائرہ کے اندر بن سکتی ہے نیز وہ ایک اور دائرہ کے گرد بھی بن سکتی ہے، ثابت کرو کہ اس کا رقبہ $\sqrt{\text{اَ بَ جَ دَ}}$ ہے اور آخرالذکر دائرہ کا قطر $\dfrac{۲\sqrt{\text{اَ بَ جَ دَ}}}{\text{اَ} + \text{بَ} + \text{جَ} + \text{دَ}}$ ہے۔

۶ — ایک ذوار بعتہ الاضلاع ا ب ج د ایک دائرہ کے گرد بنائی گئی ہے ثابت کرو کہ

$$\text{ا ب جیب}\,\tfrac{\text{ا}}{۲}\ \text{جیب}\,\tfrac{\text{ب}}{۲} = \text{ج د جیب}\,\tfrac{\text{ج}}{۲}\ \text{جیب}\,\tfrac{\text{د}}{۲}$$

۷ — ایک ذوار بعتہ الاضلاع کے اضلاع بالترتیب اَ، بَ، جَ، دَ ہیں اور قطروں کا درمیانی زاویہ جو ضلع بَ یا دَ کے مقابل ہے وہ ع ہے ثابت کرو کہ ذوار بعتہ الاضلاع کا رقبہ $\tfrac{۱}{۴}(\text{اَ}^۲ - \text{بَ}^۲ + \text{جَ}^۲ - \text{دَ}^۲)\ \text{مس ع}$ ہے

۸ — ایک ذوار بعتہ الاضلاع کے قطر لا اور ما ہیں اور اس کے اضلاع اَ، بَ، جَ اور دَ ہیں، ثابت کرو کہ اس کا رقبہ

$$\tfrac{۱}{۴}\left[۴\,\text{لا}^۲\,\text{ما}^۲ - (\text{بَ}^۲ + \text{دَ}^۲ - \text{اَ}^۲ - \text{جَ}^۲)^۲\right]^{\frac{۱}{۲}} \text{ ہے}$$

۹ — اگر کسی ذوار بعتہ الاضلاع کے گرد ایک دائرہ بن سکے تو ثابت کرو کہ اس کے قطروں کا درمیانی زاویہ

$$\text{جیب}^{-۱}\left[۲\sqrt{(\text{ن}-\text{اَ})(\text{ن}-\text{بَ})(\text{ن}-\text{جَ})(\text{ن}-\text{دَ})} \div (\text{اَجَ} + \text{بَدَ})\right] \text{ ہوگا}$$

اگر اس ذوار بعتہ الاضلاع کے اندر ایک ایسا دائرہ بن سکے جو اس کے اضلاع

ں کرے تو ثابت کرو کہ زاویہ مذکورہ جم$^{-1}$ $\frac{اَ جَ - بَ دَ}{اَ جَ + بَ دَ}$ ہوگا

۔ اگر ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے اضلاع کو بالترتیب نسبت م : ن
قسیم کیا جائے اور نقاط فصل کو وصل کرنے سے ایک نئی ذو اربعۃ
لاع بنائی جائے تو ثابت کرو کہ اس کے رقبہ کی نسبت اصلی ذو اربعۃ
لاع کے رقبہ کے ساتھ م^2 + ن^2 : (م + ن)^2 ہوگی

اگر ذو اربعۃ الاضلاع اب ج د کے گرد ایک دائرہ بن سکے تو ثابت

$$مس \frac{ب}{2} = \sqrt{\frac{(ن - اَ)(ن - بَ)}{(ن - جَ)(ن - دَ)}}$$

ن دو حصوں میں ایک قطر دوسرے قطر کو تقسیم کرتا ہے انکا حاصل

$$\frac{اَ بَ جَ دَ (اَ جَ + بَ دَ)}{(اَ بَ + جَ دَ)(اَ دَ + بَ جَ)} ہے$$

۔ اگر ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے اضلاع بالترتیب اَ، بَ، جَ، دَ
تو ثابت کرو کہ

اَ^{2} + بَ^{2} + جَ^{2} - ۲ اَ بَ جم ھ - ۲ بَ جَ جم یہ - ۲ جَ اَ جم جہ
، ھ، یہ، جہ اضلاع اَ، بَ اور بَ، جَ اور جَ، اَ کے
نی زاویوں کو تعبیر کرتے ہیں

۲ ــ منتظم کثیر الاضلاع ۔ منتظم کثیر الاضلاع ایک
کثیر الاضلاع ہے جس کے سب اضلاع برابر ہوں
ب زاویے برابر ہوں ۔

ک کثیر الاضلاع کے ن زاویے ہوں تو

بموجب اقلیدس م ۱ ش ۳۲، نتیجہ صریح

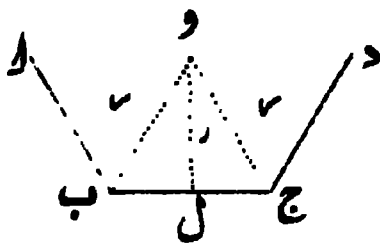
اس کے ایک زاویے کا ن گنا + ۴ قائمے

= اُن قائموں کی تعداد کے جو شکل کی تعداد اضلاع کے دو چند ہوں = ۲ ن قائمے

اس لئے ہر ایک زاویہ = $\frac{۲ن - ۴}{ن}$ قائمے

$= \frac{۲ن - ۴}{ن} \times \frac{\pi}{۲}$ نیم قطری زاوے

نوٹ۔ شکل مستقیم الاضلاع کو کسی دائرہ کے اندر بنی ہوئی کہتے ہیں جب اسکے سب زاوئے دائرہ کے محیط پر واقع ہوں۔ کسی دائرہ کو کسی شکل مستقیم الاضلاع کے گرد بنا ہوا اُس وقت کہتے ہیں جب اُس دائرہ کا محیط اُس شکل کے سب زاویوں کے نقاط میں سے ہو کر گزرے، اس دائرہ کو شکل کا بیرونی دائرہ بھی کہتے ہیں۔ کسی دائرہ کو کسی شکل مستقیم الاضلاع کے اندر بنا ہوا کہتے ہیں جب شکل کا ہر ایک ضلع دائرہ کے محیط کو مس کرے، اس کو ہم شکل کا اندرونی دائرہ بھی کہیں گے، کسی شکل مستقیم الاضلاع کو دائرہ کے گرد بنی ہوئی اُس وقت کہتے ہیں جب شکل کا ہر ایک ضلع دائرہ کا مماس ہو

۲۳۰۔ ایک منتظم کثیر الاضلاع کے اندرونی اور بیرونی دائروں کے نصف قطر دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ا ب، ب ج، ج د ایک کثیر الاضلاع کے تین متصل اضلاع ہیں، اور کل تعداد اضلاع ن ہے، زاویوں ا ب ج اور ب ج د کی تنصیف

خطوط ب و اور ج و سے کرو، اور فرض کرو کہ یہ خطوط نقطہ و پر ملتے ہیں، ضلع ب ج پر عمود و ل نکالو، ظاہر ہے کہ نقطہ و کثیر الاضلاع کے اندرونی اور بیرونی دائروں کا مرکز ہے اور ب ل = ل ج

اس لئے و ب = و ج = ر یعنی بیرونی دائرہ کا نصف قطر اور و ل = ر یعنی اندرونی دائرہ کا نصف قطر

زاویہ ب و ج اُن تمام زاویوں کے مجموعہ کا $\frac{۱}{ن}$ واں حصہ ہے جو اضلاع کے محاذی نقطہ و پر بنتے ہیں۔

یعنی $\angle$ ب و ج = $\frac{۴ \text{ قائمے}}{ن}$ = $\frac{۲\pi}{ن}$ نیم قطری زاوئے

اس لئے $\angle$ ب و ل = $\frac{۱}{۲}$ $\angle$ ب و ج = $\frac{\pi}{ن}$

اگر کثیر الاضلاع کے ضلع کو اَ سے تعبیر کریں تو

اَ = ب ج = ۲ ب ل = ۲ ر جب ب و ل = ۲ ر جب $\frac{\pi}{ن}$

$$\therefore \quad ر = \frac{اَ}{۲ \text{ جب } \frac{\pi}{ن}} = \frac{اَ}{۲} \text{ قم } \frac{\pi}{ن} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

نیز اَ = ۲ ب ل = ۲ و ل مس ب و ل = ۲ ر مس $\frac{\pi}{ن}$

$$\therefore \quad ر = \frac{اَ}{۲ \text{ مس } \frac{\pi}{ن}} = \frac{اَ}{۲} \text{ م } \frac{\pi}{ن} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

۱۳۳۱۔ منتظم کثیر الاضلاع کا رقبہ

کثیر الاضلاع کا رقبہ مثلث ب و ج کے رقبہ کا ن گنا ہے،

اس لئے کثیر الاضلاع کا رقبہ

= ن × ½ ول × ب ج = ن × ول × ب ل

= ن × ب ل مم ل و ب × ب ل

= ن × $\frac{ق^{2}}{4}$ مم $\frac{\pi}{ن}$ .... (۱)

جس سے اضلاع کی رقوم میں کثیر الاضلاع کا رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

نیز رقبہ = ن × ول × ب ل = ن × ول × ول مس ب و ل

= ن ر² مس $\frac{\pi}{ن}$ ....(۲)

نیز رقبہ

= ن × ول × ب ل = ن × و ب جم ل و ب × و ب جب ل و ب

= ن ر² جم $\frac{\pi}{ن}$ جب $\frac{\pi}{ن}$ = $\frac{ن}{2}$ ر² جب $\frac{2\pi}{ن}$ .... (۳)

ضوابط (۲) اور (۳) سے کثیر الاضلاع کا رقبہ اندرونی اور بیرونی دائروں کے نصف قطروں کی رقوم میں معلوم ہوتا ہے

۲۳۲ - مثال۔ ایک منتظم معشر کے ضلع کا طول ۲۰ فٹ ہے دریافت کرو (۱) اس کے اندرونی دائرہ کا نصف قطر (۲) اس کے بیرونی دائرہ کا نصف قطر (۳) اس کا رقبہ

کثیر الاضلاع کے مرکز پر ایک ضلع کے محاذی زاویہ = $\frac{360^\circ}{12}$ = ۳۰°

اس لئے ۱۰ = ر مس ۱۵° = ر جب ۱۵°

∴ ر = ۱۰ مم ۱۵° = $\frac{10}{2-\sqrt{3}}$ (دفعہ ۱۰۷)

= ۱۰ $(2+\sqrt{3})$ = ... ۳۷٫۳۲ فٹ

نیز $س = \frac{۱۰}{جب\,۱۵°} = ۱۰ \times \frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-۱}$ (دفعہ ۱۱۲)

$= ۱۰ \times \sqrt{۲}\,(\sqrt{۳}+۱) = ۱۰\,(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})$

$= ۱۰\,(۲٫۴۴۹۵\ldots + ۱٫۴۱۴۲\ldots) = ۳۸٫۶۳۷\ldots$ فٹ

نیز رقبہ $= ۱۲ \times ر \times ۱۰$ مربع فٹ

$= ۱۲۰۰\,(۲+\sqrt{۳}) = \ldots = ۴۴۷۸٫۴۶$ مربع فٹ

امثلہ نمبری ۳۹

۱۔ ایک معشر منتظم ایک ایسے دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے جس کا نصف قطر ۱ فٹ ہے، اس کے مجموعہ اضلاع کو ۰۱٫ انچ تک صحیح طور پر دریافت کرو۔

[مس ۱۸° = ۳۲۴۹۲٫]

۲۔ ایک ۱۲ اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے جس کا نصف قطر ۱ فٹ ہے اس کے ایک ضلع کا طول ۳ مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو۔

۳۔ اشکال ذیل کا رقبہ دریافت کرو (۱) مخمس (۲) مسدس (۳) مثمن (۴) معشر (۵) اثنا عشری، ان میں سے ہر ایک شکل منتظم ہے اور ہر ایک کا ضلع ۱ فٹ ہے،

[مم ۱۸° = ۳٫۰۷۷۶۸ ……، مم ۳۶° = ۱٫۳۷۶۳۸ ……]

۴۔ ایک مثمن منتظم اور مسدس منتظم کے رقبوں کا تفاوت معلوم کرو، ہر ایک شکل کا مجموعۂ اضلاع ۲۴ فٹ ہے۔

۵۔ ایک مربع کا ضلع ۲ فٹ ہے، اس کے کونوں کو کاٹ کر ایک

منتظم مثمن بنائی گئی ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

۶ـ ایک دیئے ہوئے دائرہ کے اندر اور باہر دو مثمن شکلیں بنائی گئی ہیں، اُن کے اضلاع کے مجموعوں اور اُن کے رقبوں کا مقابلہ کرو اور ثابت کرو کہ دائرہ کے اندر بنی ہوئی مسدس اور مثمن شکلوں کے رقبوں کی باہمی نسبت $\sqrt{۲۷} : \sqrt{۳۲}$ ہے۔

۷ـ ثابت کرو کہ ایک ایسے دائرہ کا نصف قطر جو ایک منتظم مخمس کے گرد بن سکتا ہے مخمس کے ایک ضلع کا $\frac{۱۴}{۲۰}$ ہے۔

۸ـ اگر ایک مثلث متساوی الاضلاع اور منتظم مسدس کے اضلاع کے مجموعے برابر ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے رقبوں کی باہمی نسبت ۲ : ۳ ہے

۹ـ اگر ایک منتظم مخمس اور ایک منتظم مسدس کے اضلاع کے مجموعے مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے رقبوں کی باہمی نسبت ۲ : $\sqrt{۵}$ ہے۔

۱۰ـ ثابت کرو کہ ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع کے اندرونی اور بیرونی دائروں کے نصف قطروں کا مجموعہ $\frac{ل}{۲}$ ظم $\frac{\pi}{۲ن}$ ہے جہاں ل کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کو تعبیر کرتا ہے،

۱۱ـ ن اضلاع کی دو منتظم اشکال کثیر الاضلاع ہیں، ان میں سے ایک تو ایک دیئے ہوئے دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے اور دوسری دائرہ کے اندر، ثابت کرو کہ بیرونی کثیر الاضلاع کے مجموعۂ اضلاع اور دائرہ کے محیط اور اندرونی کثیر الاضلاع کے مجموعۂ اضلاع کی باہمی نسبتیں

قط $\frac{\pi}{ن}$: $\frac{\pi}{ن}$ قم $\frac{\pi}{ن}$: ۱ ہیں اور اشکال کے رقبوں کی باہمی نسبت

جم^{۲} $\frac{\pi}{ن}$: ۱ ہے۔

۱۲- ایک ن اضلاع کی کثیرالاضلاع ایک دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے، اگر اس کے رقبے کی نسبت ایک ۲ن اضلاع کی کثیرالاضلاع کے رقبہ کے ساتھ جو اسی دائرہ کے گرد بنائی جائے ۳:۲ ہو تو ن کی قیمت دریافت کرو۔

۱۳- ثابت کرو کہ ۲ن اضلاع کی منتظم کثیرالاضلاع کا رقبہ جو ایک دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہو اُن ن اضلاع کی منتظم اشکال کثیرالاضلاع کے رقبوں کا وسط تناسب ہے جو بالترتیب دائرہ کے اندر اور گرد بنی ہوئی ہوں۔

۱۴- ن اضلاع کی دو منتظم اشکال کثیرالاضلاع میں سے ایک دائرہ کے اندر اور دوسری دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے ان کے رقبوں کی باہمی نسبت ۳:۴ ہے، ن کی قیمت دریافت کرو

۱۵- ایک کثیرالاضلاع کے اندرونی زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں، سب سے چھوٹا زاویہ ۱۲۰ ہے اور فرق مشترک ۵° ہے، اضلاع کی تعداد دریافت کرو۔

۱۶- دو منتظم اشکال کثیرالاضلاع میں سے ایک کی تعداد اضلاع دوسری کی تعداد اضلاع کی دوچند ہے، اور ایک کے زاویے کو دوسری کے زاویے کے ساتھ نسبت ۹:۸ ہے، ہر ایک کثیرالاضلاع کی تعداد اضلاع دریافت کرو۔

۱۷- ثابت کرو کہ منتظم اشکال کثیرالاضلاع کے کل ۱۱ زوج ایسے ہو سکتے ہیں کہ ہر ایک زوج میں ایک کثیرالاضلاع کے زاویئے کے درجوں کی تعداد کو دوسری کثیرالاضلاع کے زاویہ کی درجوں کی تعداد

کے ساتھ نسبت ۱۰ اور ۹ کی ہو، ہر ایک کثیرالاضلاع کی تعداد اضلاع دریافت کرو۔

۱۸ — ایک مربع مینار کے قاعدہ کا ضلع ا فٹ ہے اور اس کے راس کی عمودی بلندی قاعدہ کے مرکز سے ف فٹ ہے، اگر مینار کے کسی رخ کا میلان قاعدہ کے ساتھ طہ ہو اور دو رخوں کا میلان آپس میں فہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$مس\ طہ = \frac{۲ف}{ا} \quad اور \quad مس\ \frac{فہ}{۲} = \sqrt{۱ + \frac{ا^2}{۲ف^2}}$$

۱۹ — ایک مینار کا قاعدہ منتظم مسدس کی شکل کا ہے، اگر مینار کے راس سے قاعدہ پر عمود نکالا جائے تو وہ مسدس کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور اس کا طول قاعدہ کے ایک ضلع کے برابر ہے، قاعدہ اور مینار کے کسی رخ کے درمیان جو زاویہ بنے اس کا مماس دریافت کرو۔ نیز دو بیرونی رخوں کے درمیانی زاویہ کے نصف کا مماس معلوم کرو۔

۲۰ — ایک منتظم مضلع مخروط کا قاعدہ ایک ن اضلاع کی کثیرالاضلاع ہے جس کا ہر ایک ضلع اَ ہے، نیز مخروط کے ہر ایک ترچھے ضلع کا طول ل ہے، ثابت کرو کہ مخروط کے دو متصل بیرونی رخوں کا درمیانی زاویہ

$$\frac{۴ل^2\ جم\ \frac{۲\pi}{ن} + اَ^2}{۴ل^2 - اَ^2}$$ ہے۔

━━━━━━

باب ہفتدہم

صغیر زاویوں کی مثلثی نسبتیں - دائرہ کا رقبہ - افق کا میلان

۲۳۳ — ایک زاویہ قائمہ سے کم ہے، اس میں نیمقطری زاویوں کی تعداد طہ ہے، ثابت کرو کہ جب طہ، طہ، مس طہ بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب میں ہیں۔

فرض کرو کہ م و ع کوئی زاویہ ہے جو زاویہ قائمہ سے کم ہے، مرکز و اور کسی نصف قطر و ع پر دائرہ

کی قوس ع ا عَ کھینچو جو و م کو نقطہ ا پر ملے۔ و ا پر عمود ع ن کھینچو اور اس کو اسقدر خارج کرو کہ وہ قوس دائرہ کو عَ پر ملے، نقطہ ع پر مماس ع م کھینچو

اور فرض کرو کہ وہ و ا کو نقطہ م پر ملتا ہے، م عَ کو ملاؤ
مثلث ع و ن اور عَ و ن آپسمیں ہر طرح سے برابر ہیں
اس لئے ع ن = ن عَ اور قوس ع ا = قوس ا عَ
نیز مثلث م و ع اور م و عَ ہر طرح سے برابر ہیں
اس لئے م ع = م عَ
خط مستقیم ع عَ طول میں قوس ع ا عَ سے کم ہے
یعنی ن ع < قوس ع ا
نیز ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ قوس ع ا عَ
طول میں ع م اور م عَ کے مجموعہ سے کم ہے یعنی
قوس ع ا < ع م
پس معلوم ہوا کہ ن ع، قوس ا ع اور مماس ع م میں
بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب ہے۔

اسلئے $\frac{\text{ن ع}}{\text{و ع}}$، $\frac{\text{قوس ا ع}}{\text{و ع}}$ اور $\frac{\text{ع م}}{\text{و ع}}$ میں بلحاظ مقدار
کے صعودی ترتیب ہے

لیکن $\frac{\text{ن ع}}{\text{و ع}}$ = جب ا و ع = جب طہ

$\frac{\text{قوس ا ع}}{\text{و ع}}$ = ∠ ا و ع میں نیمقطری زاویوں کی
تعداد کے

= طہ .... (دفعہ ۲۳)

اور $\frac{\text{ع م}}{\text{و ع}}$ = مس ع و م = مس ا و ع = مس طہ

لہذا ثابت ہوا کہ جب طہ ، طہ اور مس طہ میں بلحاظ مقدار کے ترتیب صعودی ہے بشرطیکہ $طہ < \frac{\pi}{2}$

۲۳۴ — چونکہ جب طہ < طہ < مس طہ اس لئے اگر ان میں سے ہر ایک کو مثبت مقدار جب طہ پر تقسیم کر دیا جائے تو

$$1 < \frac{طہ}{جب\,طہ} < \frac{1}{جم\,طہ}$$

اسلئے $\frac{طہ}{جب\,طہ}$ ہمیشہ ۱ اور $\frac{1}{جم\,طہ}$ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور یہ نتیجہ درست ہے خواہ زاویہ طہ کتنا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو۔

لیکن جب زاویہ طہ بہت چھوٹا ہو تو جم طہ تقریباً ایک کے برابر ہوتی ہے اور جتنا چھوٹا طہ ہوتا جائے گا اتنا ہی ایک کے زیادہ قریب جم طہ آتی جائے گی یعنی اتنا ہی ایک کے زیادہ قریب $\frac{1}{جم\,طہ}$ کی قیمت ہوگی۔

اسلئے جب زاویہ نہایت ہی قلیل ہوگا تو مقدار $\frac{طہ}{جب\,طہ}$ عدد ایک اور ایک ایسی مقدار کے درمیان واقع ہوگی جس کا تفاوت عدد ایک سے ایک لاانتہا قلیل مقدار کے برابر ہوگا

دوسرے الفاظ میں جب زاویہ طہ لاانتہا چھوٹا ہوگا تو مقدار $\frac{طہ}{جب\,طہ}$ اور اسلئے $\frac{جب\,طہ}{طہ}$ آخرالامر ایک کے برابر ہوگی، یعنی جتنا چھوٹا ایک زاویہ ہوتا جائے گا اتنا ہی اس کی جیب ان نیم قطری زاویوں کی تعداد کے

برابر ہوتی جائے گی جو زاویہ مجوزہ میں شامل ہیں اختصہ
اس کو یوں بیان کرتے ہیں۔

جب طہ = طہ اگر زاویہ طہ بہت چھوٹا ہو

اسی طرح سے مس طہ = طہ اگر زاویہ طہ بہت چھوٹا ہو

نتیجہ صریح فرض کروکہ طہ = $\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}$ تو اس سے
یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب زاویہ طہ لا انتہا چھوٹا ہوتا
ن لا انتہا بڑا ہوتا ہے۔

اس لئے $\frac{\text{جب} \frac{\text{عہ}}{\text{ن}}}{\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}}$ ایک کے برابر ہے اگر ن
لا انتہا بڑا ہو

پس ن جب $\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}$ = عہ اگر ن لا انتہا بڑا ہو

اسی طرح سے ن مس $\frac{\text{عہ}}{\text{ن}}$ = عہ اگر ن لا انتہا بڑا ہو

۲۳۵ ــــ دفعہ گذشتہ میں یہ خاص طور پر یاد رکھنا چاہئے
کہ زاویہ مجوزہ میں طہ نیم قطری زاویوں کی تعداد کو
تعبیر کرتا ہے۔

جب عہ° کی قیمت اگر عہ نہایت ہی چھوٹا ہو اسطرح
معلوم ہو سکتی ہے

$\pi^{\text{نق}} = 180^\circ$ اسلئے

$\text{عہ}^\circ = \left(\frac{\text{عہ}}{180}\pi\right)^{\text{نق}}$

$\therefore$ جب عہ° = جب $\left(\frac{\text{عہ}\,\pi}{180}\right)^{\text{نق}} = \frac{\pi\,\text{عہ}}{180}$ بموجب نتیجہ
دفعہ آخر۔

۲۳۶ — جدولوں سے معلوم ہوگا کہ کسی زاویہ کی جیب اور اس کا قوسی ناپ ۷ مرتبہ کے اعشاریہ تک برابر ہوتے ہیں جبتک کہ زاویہ کی مقدار ۱۸ً سے کم رہتی ہے اور وہ ۵ مرتبہ کے اعشاریہ تک برابر ہوتے ہیں جب تک کہ زاویہ تقریباً ۲° سے کم رہتا ہے۔

۲۳۷ — اگر کوئی زاویہ قائمہ سے کم ہو اور اسمیں نیم قطری زاویوں کی تعداد ط ہو تو ثابت کرو کہ $\text{جب}\ ط > ط - \frac{ط^{۳}}{۴}$ اور

$\text{جم}\ ط > ۱ - \frac{ط^{۲}}{۲}$

بموجب دفعہ ۲۳۳

$\text{مس}\ ط > \frac{ط}{۲} \quad \therefore \text{جب}\ \frac{ط}{۲} > \frac{ط}{۲}\ \text{جم}\ \frac{ط}{۲}$

اور چونکہ $\text{جب}\ ط = ۲\ \text{جب}\ \frac{ط}{۲}\ \text{جم}\ \frac{ط}{۲}$

اسلئے $\text{جب}\ ط > ط\ \text{جم}^{۲}\ \frac{ط}{۲}$ یعنی $> ط\left(۱ - \text{جب}^{۲}\ \frac{ط}{۲}\right)$

لیکن چونکہ بموجب دفعہ ۲۳۳ $\text{جب}\ \frac{ط}{۲} < \frac{ط}{۲}$

اسلئے $۱ - \text{جب}^{۲}\ \frac{ط}{۲} > ۱ - \left(\frac{ط}{۲}\right)^{۲}$ یعنی $> ۱ - \frac{ط^{۲}}{۴}$

$\therefore \text{جب}\ ط > ط\left(۱ - \frac{ط^{۲}}{۴}\right)$ یعنی $> ط - \frac{ط^{۳}}{۴}$

نیز $\text{جم}\ ط = ۱ - ۲\ \text{جب}^{۲}\ \frac{ط}{۲}$

اور چونکہ $\text{جب}^{۲}\ \frac{ط}{۲} < \left(\frac{ط}{۲}\right)^{۲}$

اسلئے $۱ - ۲\ \text{جب}^{۲}\ \frac{ط}{۲} > ۱ - ۲\left(\frac{ط}{۲}\right)^{۲}$ یعنی $> ۱ - \frac{ط^{۲}}{۲}$

علم مثلث کے حصہ دوم میں یہ ثابت کیا جائے گا کہ

$\text{جب}\ ط > ط - \frac{ط^{۳}}{۶}$ اور $\text{جم}\ ط < ۱ - \frac{ط^{۲}}{۲} + \frac{ط^{۴}}{۲۴}$

۲۳۸ — **مثال ۱** — جب ۱۰ً اور جم ۱۰ً کی قیمتیں دریافت کرو

چونکہ ۱۰َ = $\frac{۱}{۶}$ = $\frac{\pi}{۶\times۱۸۰}$ تق

اسلئے جب ۱۰َ = جب $\left(\frac{\pi}{۶\times۱۸۰}\right)^{\text{تق}}$ = $\frac{\pi}{۶\times۱۸۰}$

= $\frac{۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵\ldots}{۶\times۱۸۰}$ = ٫۰۰۲۹۰۸۹ تقریباً

نیز جم ۱۰َ = $\sqrt{۱ - \text{جب}^{۲}\,۱۰َ}$

= $[۱ - ٫۰۰۰۰۸۴۶۸\ldots]^{\frac{۱}{۲}}$ = ۱ − $\frac{۱}{۲}$ [٫۰۰۰۰۸۴۶۸ .....] تقریباً بذریعہ مسئلہ ثنائی

= ۱ − ٫۰۰۰۰۴۲۳۴ ...... = ٫۹۹۹۹۹۵۸ ......

مثال ۲ — مساوات جب ط = ٫۵۲ میں ط کی تقریبی قیمت دریافت کرو

چونکہ جب ط تقریباً $\frac{۱}{۲}$ کے برابر ہے اس لئے ط

تقریباً $\frac{\pi}{۶}$ کے برابر ہے

اب فرض کرو کہ ط = $\frac{\pi}{۶}$ + لا جہاں لا مقدار میں قلیل ہے

∴ ٫۵۲ = جب ($\frac{\pi}{۶}$ + لا) = جب $\frac{\pi}{۶}$ جم لا + جم $\frac{\pi}{۶}$ جب لا

= $\frac{۱}{۲}$ جم لا + $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ جب لا

چونکہ لا بہت چھوٹا ہے اس لئے جم لا = ۱ اور جب لا = لا تقریباً

∴ ٫۵۲ = $\frac{۱}{۲}$ + $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ لا

∴ لا = ٫۰۲ × $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ نیمقطری زاویے = $\frac{\sqrt{۳}}{۷۵}$ تق = ۱٫۳۲° تقریباً

اسلئے ط = ۳۱° ۱۹′ تقریباً

امثلہ نمبری ۴۰

[π = ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵، $\frac{۱}{\pi}$ = ٫۳۱۸۳۱ .....]

مفصلہ ذیل کی قیمتیں پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو

۱۔ جب ۷َ ۲۔ جب ۱۵ً ۳۔ جب ۱َ

۴ — جم ۱۵ ۵ — قم ۸ ۶ — قط ۵

معادلات ذیل کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو

۷ — جب ط = ۰۱ء ۸ — جیب ط = ۸۴ء

۹ — جم $(\frac{\pi}{4}$ + ط$)$ = ۹۴ء ۱۰ — جم ط = ۹۹۹ء

۱۱ — ایک پیسے کا قطر ایک انچ ہے، یہ معلوم کرو کہ آنکھ سے کتنے فاصلہ پر چاند کے سامنے اس کو رکھا جائے کہ چاند نہ دکھائی دے، چاند کے قطر کے محاذی جو زاویہ دیکھنے والے کی آنکھ پر بنتا ہے وہ ۳۰ ہے۔

۱۲ — ایک شخص خط مستقیم پر ایک دور کی شے کی سیدھ میں جاتا ہے اور دیکھتا ہے کہ تین نقاط ا، ب، ج پر اسکی چوٹی کے زوایاء ارتفاع بالترتیب ع، ۲ع، ۳ع ہیں، ثابت کرو

اب = ۳ ب ج تقریباً

۱۳ — اگر کوئی زاویہ قائمہ سے کم ہو اور اس میں نیم قطری زاویوں کی تعداد ط ہو تو ثابت کرو کہ جم ط > ۱ − $\frac{ط^2}{2}$ + $\frac{ط^4}{24}$

۱۴ — اولر کا مسئلہ ثابت کرو یعنی ثابت کرو کہ

جب ط = ط × جم $\frac{ط}{2}$ × جم $\frac{ط}{2^2}$ × جم $\frac{ط}{2^3}$ .... ∞ تک

[جب ط = ۲ جب $\frac{ط}{2}$ جم $\frac{ط}{2}$ = 2^2 جب $\frac{ط}{2^2}$ جم $\frac{ط}{2^2}$ جم $\frac{ط}{2}$

= 2^3 جب $\frac{ط}{2^3}$ جم $\frac{ط}{2^3}$ جم $\frac{ط}{2^2}$ جم $\frac{ط}{2}$ = ...

= 2^n جب $\frac{ط}{2^n}$ × جم $\frac{ط}{2}$ جم $\frac{ط}{2^2}$ جم $\frac{ط}{2^3}$ .... جم $\frac{ط}{2^n}$

ن کو لا انتہا بڑا فرض کرنے سے بموجب دفعہ ۲۳۴ نتیجہ صحیح

2^n جب $\frac{ط}{2^n}$ = ط

اسلئے جب طہ = طہ جم $\frac{طہ}{۲}$ جم $\frac{طہ}{۲^۲}$ جم $\frac{طہ}{۲^۳}$ .... ∞ تک]

۱۵ — ثابت کرو کہ

(ا — سن $\frac{طہ}{۲}$)(ا — سن $\frac{طہ}{۲^۲}$)(ا — سن $\frac{طہ}{۲^۳}$) ...... ∞ تک

= طہ × مم طہ

۲۳۹ — ایک دائرہ کا رقبہ

بموجب دفعہ ۲۳۱ ایک ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع کا رقبہ جو ایک ایسے دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہو جس کا نصف قطر ر ہو = $\frac{ن}{۲}$ ر۲ جب $\frac{۲\pi}{ن}$

اب فرض کرو کہ کثیر الاضلاع ہمیشہ منتظم رہتی ہے اور اسکی تعداد اضلاع لا انتہا بڑھتی ہے تو ظاہر ہے کہ کثیر الاضلاع کا مجموعۂ اضلاع دائرہ کے محیط کے قریب قریب آتا جائیگا۔ اس لئے جب کثیر الاضلاع کا مجموعۂ اضلاع لا انتہا بڑھیگا تو دائرہ کا رقبہ کثیر الاضلاع کے رقبہ کے برابر ہوگا

اب $\frac{ن}{۲}$ ر۲ جب $\frac{۲\pi}{ن}$ = $\frac{ن}{۲}$ ر۲ × $\frac{۲\pi}{ن}$ × $\frac{\text{جب } \frac{۲\pi}{ن}}{\frac{۲\pi}{ن}}$

= π ر۲ $\frac{\text{جب } \frac{۲\pi}{ن}}{\frac{۲\pi}{ن}}$ = π ر۲ $\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}$ جہاں طہ = $\frac{۲\pi}{ن}$

جب ن لا انتہا بڑا ہوگا تو طہ کی قیمت لا انتہا چھوٹی ہوگی اور اُس وقت بموجب دفعہ ۲۳۴ نسبت $\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}$ ایک کے برابر ہوگی

اس لئے دائرہ کا رقبہ = π ر۲ = اسکے نصف قطر کے مربع کا π گنا

۲۰۴ — قطاع دائرہ کا رقبہ

فرض کرو کہ ایک دائرہ کا مرکز و ہے اور قطاع دائرہ کی احاطہ کرنیوالی قوس اب ہے، فرض کرو کہ
∠ اوب = عہ نیم قطری زاویوں کے
بحکم اقلیدس م۶ ش ۳۳، دائروں کے قطاع آپس میں وہی نسبت رکھتے ہیں جو اُن کی قوسوں کو آپس میں ہے چونکہ وہ قائم ہیں

اسلئے $\frac{\text{قطاع اوب کا رقبہ}}{\text{کل دائرہ کا رقبہ}} = \frac{\text{قوس اب}}{\text{محیط دائرہ}}$

$= \frac{\text{ر عہ}}{\text{۲ π ر}} = \frac{\text{عہ}}{\text{۲ π}}$

∴ قطاع اوب کا رقبہ = $\frac{\text{عہ}}{\text{۲ π}}$ × دائرہ کا رقبہ

$= \frac{\text{عہ}}{\text{۲ π}} \times \pi \text{ ر}^2 = \frac{1}{2} \text{ ر}^2 \text{ عہ}$

امثلہ نمبری ۴۱

[فرض کرو کہ π = ۳٫۱۴۱۵۹...... ، $\frac{1}{\pi}$ = ۰٫۳۱۸۳۱ اور لوک π = ۰٫۴۹۷۱۵]

۱— ایک دائرہ کا محیط ۴۷ فٹ ہے، اس کا رقبہ دریافت کرو۔

۲— ایک دائرہ کا قطر ۱۰ فٹ ہے، اس کے ایسے قطاع کا رقبہ

دریافت کرو جس کا زاویہ $22\frac{1}{2}°$ ہو۔

۳ — ایک دائرہ کے قطاع کا رقبہ ۱۰ مربع فٹ ہے، اگر دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہو تو قطاع کا زاویہ دریافت کرو

۴ — ایک قطاع دائرہ کے احاطہ کرنے والے خطوط کا کل طول ۱۰ فٹ ہے، اگر دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہو تو قطاع کا رقبہ دریافت کرو

۵ — ایک کاغذ کا تختہ ۲ میل لمبا اور ۰۰۳ء انچ موٹا ایک ٹھوس اسطوانہ کی شکل میں لپٹا ہوا ہے، اس کے گول کناروں کے نصف قطر کی تقریبی قیمت دریافت کرو

۶ — ایک کاغذ کا تختہ ایک میل لمبا ایک ٹھوس اسطوانہ کی شکل میں لپٹا ہوا ہے، اس کے گول کناروں کا قطر ۲ انچ ہے، کاغذ کی موٹائی دریافت کرو

۷ — دو ہم مرکز دائروں کے نصف قطر ر اور ۲ر ہیں، اندرونی دائرہ کے دو متوازی مماس بیرونی دائرہ سے ایک قوس قطع کرتے ہیں، قوس کا طول دریافت کرو

۸ — ایک نصف دائرہ کا محیط دو ایسی قوسوں میں تقسیم کیا گیا ہے کہ ایک کا وتر دوسرے کے وتر کا دو چند ہے، ثابت کرو کہ جو قطعات دائرہ ان وتروں کے کھینچنے سے پیدا ہوتے ہیں انکے رقبوں کو آپس میں نسبت ۲۷ اور ۵۵ کی ہے $\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$

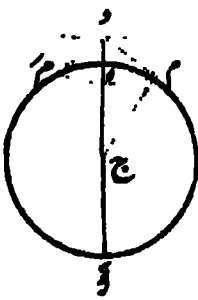
۹ — تین مساوی دائرے ہیں، اگر ان میں سے ہر ایک باقی دو کو مس کرے اور ہر ایک کا نصف قطر ا ہو تو ثابت کرو کہ

ان تینوں کے درمیان کا گھرا ہوا رقبہ $\frac{4}{25}$ ا^2 ہے۔

۱۰۔ چھ مساوی دائرے ایک سطح مستوی پر اسطرح ترتیب دئے گئے ہیں کہ ان میں سے ہرایک دائرہ دو اور دائروں کو مس کرتا ہے، اگر ان کے مرکز ایک اور دائرہ کے محیط پر واقع ہوں تو ثابت کروکہ انکے درمیان کا گھرا ہوا رقبہ ۲ا^2 $(3\sqrt{3}-\pi)$ ہے جہاں ا ہرایک مساوی دائرہ کا نصف قطر ہے۔

۱۱۔ ایک مثلث کے راس ا سے ایک خط مستقیم ا د کھینچا گیا ہے اور وہ قاعدہ سے ملکر زاویہ طہ بناتا ہے، ثابت کروکہ مثلثات اب د اور اج د کے بیرونی دائروں کا مشترک رقبہ

$= \frac{1}{4}$ (بَ^{2} جہ + جَ^{2} ہہ − بَ جَ جب ا) قم^2 طہ

جہاں زاویوں ا اور ب میں نیم قطری زاویوں کی تعداد بالترتیب ہہ اور جہ ہے۔

۱۴۲۔ اُفق کا میلان

فرض کروکہ ایک نقطہ و کی بلندی سطح زمین سے ب ہے، نقطہ و سے زمین پر کے مماس کھینچو جیسے وم اور ومَ، ان مماسوں کے سرے ایک دائرہ کے محیط پر واقع

ہوں گے اس دائرہ کو **افق مرئی** کہتے ہیں اور جو زاویہ ہر ایک مماس (مثلاً و م) سطح اُفقی ف و ق سے بناتا ہے اس کو اُفق کا میلان کہتے ہیں

فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر ر ہے اور جو زمین کا قطر نقطہ ا میں سے گذرتا ہے اس کا دوسرا سرا اَ ہے تب بموجب اقلیدس م ۳ ش ۳۶

$$و م^۲ = و ا \times و اَ = ب (۲ر + ب)$$

یعنی $و م = \sqrt{ب (۲ر + ب)}$

اس سے و م کی صحیح قیمت حاصل ہوتی ہے

مگر تمام عملی صورتوں میں ب بمقابلہ ر کے بہت چھوٹا ہوتا ہے

[ر = ۴۰۰۰ میل تقریباً اور ب پانچ میل سے کبھی زیادہ نہیں ہوتا اور بالعموم اس سے بہت کم ہوتا ہے]

اسلئے $ب^۲$ بمقابلہ ب ر کے بہت چھوٹا ہے

و م کی قیمت کا ایک اچھا تقرب یہ ہے

$$و م = \sqrt{۲ ب ر}$$

$$میلان = \angle م و ق = ۹۰^\circ - \angle ج و م = \angle و ج م$$

$$نیز مس و ج م = \frac{و م}{ج م} = \frac{\sqrt{۲ ب ر}}{ر} = \sqrt{\frac{۲ ب}{ر}}$$

یعنی زاویۂ میلان کا ایک اچھا تقرب یہ ہوا

$$\angle و ج م = \sqrt{\frac{۲ ب}{ر}} \text{ نیم قطری زاوئے}$$

$= \left(\frac{ب^2}{ر} \times \frac{180}{\pi} \right) = \left[\frac{60 \times 60 \times 180}{\pi} \sqrt{\frac{ب^2}{ر}} \right]''$

۲۱ — **مثال** — ایک روشنی گھر کی بلندی سطح سمندر ۲۶۴ فٹ ہے، اگر زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہو تو روشنی ن چوٹی سے آفق کا میلان اور آفق مرئی کا فاصلہ دریافت کرو

یہاں ر = ۴۰۰۰ میل اور ب = ۲۶۴ فٹ = $\frac{1}{20}$ میل

ٔ معلوم ہوا کہ ب بمقابلہ ر کے بہت چھوٹا ہے

یعنی و م = $\sqrt{4000 \times \frac{1}{10}} = \sqrt{400} = 20$ میل

نیز زاویہ میلان = $\sqrt{\frac{ب^2}{ر}}$ نیم قطری زاوئے = $\frac{1}{200}$ نیم قطری زاوئے

$= \left(\frac{60 \times 180}{\pi} \times \frac{1}{200} \right)$

$= \left(\frac{54}{\pi} \right) = 17' \; 11''$ تقریباً

امثلہ نمبری ۲۴

ر اسکے خلاف ذکر نہ ہو تو زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل فرض کیا جائے

— ایک پہاڑ کی بلندی ۴۲۰۰ فٹ ہے، اس کی چوٹی سے کا میلان انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں دریافت کرو،

ں کا نصف قطر 21×10^6 فٹ ہے۔

— ایک روشنی گھر کا چراغ سطح سمندر سے ۱۹۶ فٹ بلند ہے کہ یہ زیادہ سے زیادہ کتنے فاصلہ سے دکھائی دے سکتا ہے۔

— اگر زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہو تو ایک غبارہ کی ری دریافت کرو جبکہ آفق کا میلان 1° ہو۔ نیز اگر غبارہ کی

بلندی ۲ میل ہو تو افق کا میلان دریافت کرو۔
۴ — ایک روشنی گھر کی بلندی سطح سمندر سے ۱۳۲ فٹ ہے۔ اس کی روشنی ایک جہاز کے مستول کی چوٹی سے جو سطح سمندر سے ۶۶ فٹ بلند ہے عین اُسوقت دکھائی دینے لگی جبکہ جہاز روشنی گھر سے ایک خاص فاصلہ پر تھا، ثابت کرو کہ یہ فاصلہ تقریباً ۲۴ میل ہے۔
۵ — ایک جہاز کے مستول کی بلندی سطح سمندر سے ۶۶ فٹ ہے، اس کی چوٹی سے ایک اور جہاز کے مستول کی چوٹی عین ۲۰ میل کے فاصلہ سے دکھائی دینے لگی، ثابت کرو کہ مستولوں کی بلندیاں برابر ہیں۔
۶ — ایک جہاز کا مستول سطح سمندر سے ۴۴ فٹ اونچا ہے، ایک روشنی گھر کی روشنی عین اسکی چوٹی سے دکھائی دیتی ہے، اس کے بعد جہاز ۱۵ منٹ کے لئے کسی خاص سمت میں جاتا ہے اور یہی روشنی تختہ جہاز کی بلندی سے جو سطح سمندر سے ۱۱ فٹ ہے دکھائی دینے لگتی ہے، ثابت کرو کہ جہاز کی رفتار تقریباً ۱۶،۳۳ میل فی گھنٹہ ہے۔
۷ — اگر کسی مشاہدہ کرنیکے مقام کی بلندی ن فٹ ہو تو ثابت کرو کہ وہاں کھڑے ہو کر ایک شخص کی نگاہ دور سے دور تقریباً $\sqrt{\frac{3ن}{2}}$ میل دیکھ سکتی ہے۔
۸ — زمین کے ایک ربع محیط میں ۱۰۰ لاکھ میٹر شامل ہیں، اگر ایفل برج کی چوٹی ۳۰۰ میٹر اونچی ہو تو معلوم کرو کہ

سے زیادہ کتنے فاصلہ سے وہ نظر آسکتی ہے۔
ــ ایک سیدھی نہر کے کنارے ایک ایک میل کے
پر تین عمودی کھمبے ہیں اور پانی کی سطح سے تینوں کی
ں برابر ہیں، طرفین کے کھمبوں کی چوٹیوں کا خط نظری
نی کھمبے کو اسکی چوٹی کے ۸ انچ نیچے قطع کرتا ہے،
ا نصف قطر قریب ترین میل تک دریافت کرو۔

باب ہشتدہم

مقلوب و مستدیر جملے

۴۴۲ — اگر جب طہ = ا جہاں ا مقدار معلومہ ہے تو ہم دفعہ ۸۸ سے جانتے ہیں کہ طہ کی ایک معین قیمت نہیں ہو سکتی، اس مساوات سے صرف یہی معلوم ہوتا ہے کہ طہ کی قیمت زاویوں کے ایک غیر متناہی سلسلہ میں سے کسی ایک زاویہ سے تعبیر ہوتی ہے۔

علامت "جب$^{-1}$ ا" سے وہ چھوٹے سے چھوٹا مثبت یا منفی زاویہ تعبیر ہوتا ہے جبکی جیب ا ہو۔

علامت "جب$^{-1}$ ا" کو اس طرح پڑھتے ہیں کہ "جیب منفی ایک ا" اور اس کو بڑی احتیاط سے $\frac{1}{\text{جب ا}}$ سے تمیز کرنا چاہیئے، اگر ضرورت ہو تو $\frac{1}{\text{جب ا}}$ کو (جب ا)$^{-1}$ لکھنا چاہیئے۔

اس لئے بخوبی یاد رہے کہ "جب$^{-1}$ ا" ایک زاویہ ہے اور یہ علامت تعداداً ایک ایسے چھوٹے سے چھوٹے

زاوئے کو تعبیر کرتی ہے جس کی جیب ا ہے، اور جم⁻¹ ا سے بھی تعداداً وہ چھوٹے سے چھوٹا زاویہ تعبیر ہوگا جس کی جیب التمام ا ہے اور اسی طرح سے "مس⁻¹ ا" و "قم⁻¹ ا" و "قم⁻¹ ا" و "قط⁻¹ ا" و "سمۃ⁻¹ ا" و "سم⁻¹ ا" کی تعریف ہو سکتی ہے۔

لہٰذا زاوئے جب⁻¹ ا اور مس⁻¹ ا (اور اسلئے قم⁻¹ ا اور سم⁻¹ ا) ہمیشہ -۹۰° اور +۹۰° کے درمیان واقع ہوں گے لیکن جم⁻¹ ا (اور اسلئے قط⁻¹ ا) ہمیشہ ۰ اور ۱۸۰° کے درمیان واقع ہوں گے

۲۴۴ — مقادیر جب⁻¹ ا، جم⁻¹ ا، مس⁻¹ ا،......کو مقلوب و مستدیر جملے کہتے ہیں

علامت جب⁻¹ ا کو اکثر مصنفین نے "قوس جب ا" لکھا ہے اسی طرح سے "جم⁻¹ ا" کو "قوس جم ا" لکھ سکتے ہیں اور اسی طرح باقی مقلوب نسبتیں بھی لکھی جا سکتی ہیں۔

۲۴۵ — اگر ا مثبت ہو تو زاویہ جب⁻¹ ا صریحاً صفر اور ۹۰° کے درمیان واقع ہوگا۔ اور اگر ا منفی ہو تو یہ -۹۰° اور ۰ کے درمیان واقع ہوگا۔

مثال — جب⁻¹ $\frac{1}{2}$ = ۳۰°، جب⁻¹ $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ = -۶۰°

اگر ا مثبت ہو تو دو زاوئے ایسے ہوں گے (ان میں سے ایک ۰ اور ۹۰° کے درمیان واقع ہوگا اور دوسرا -۹۰° اور ۰

کے درمیان) جن میں سے ہر ایک کی جیب التمام ا ہوگی
[مثلاً ۳۰° اور -۳۰° دونوں کی جیوب التمام $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہیں]
اس صورت میں ہم چھوٹے سے چھوٹا **مثبت** زاویہ لینگے، پس اگر ا مثبت ہو تو زاویہ جم$^{-1}$ ا بھی ۰ اور ۹۰°
کے درمیان واقع ہوگا
اسی طرح سے اگر ا منفی ہو تو جم$^{-1}$ ا زاویہ ۹۰° اور ۱۸۰° کے
درمیان واقع ہوگا۔

مثال جم$^{-1}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = ۴۵°، جم$^{-1}$ $(-\frac{1}{2})$ = ۱۲۰°

اگر ا مثبت ہو تو مس$^{-1}$ ا ہمیشہ ۰ اور ۹۰° کے درمیان واقع ہوگا اور اگر ا منفی ہو تو یہ -۹۰° اور ۰ کے درمیان واقع ہوگا

مثال مس$^{-1}$ $\sqrt{3}$ = ۶۰°، مس$^{-1}$ (-۱) = -۴۵°

۲۴۶ — مثال — ثابت کرو کہ جب$^{-1}$ $\frac{3}{5}$ - جم$^{-1}$ $\frac{12}{13}$ = جب$^{-1}$ $\frac{16}{65}$

فرض کرو کہ جب$^{-1}$ $\frac{3}{5}$ = عہ یعنی جب عہ = $\frac{3}{5}$

اور اس لئے جم عہ = $\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

فرض کرو کہ جم$^{-1}$ $\frac{12}{13}$ = بہ یعنی جم بہ = $\frac{12}{13}$

اور اس لئے جب بہ = $\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$

فرض کرو کہ جب$^{-1}$ $\frac{16}{65}$ = جہ یعنی جب جہ = $\frac{16}{65}$

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ عہ - بہ = جہ

یعنی ثابت کرنا ہے کہ جب (عہ - بہ) = جب جہ

اب جب (عہ - بہ) = جب عہ جم بہ - جم عہ جب بہ

$= \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} - \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{36-20}{65} = \frac{16}{65} =$ جب جـ

اسلئے ربط ثابت ہوا

مثال ۲ — ثابت کرو کہ ۲ مس$^{-1}$ $\frac{1}{3}$ + مس$^{-1}$ $\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$

فرض کرو کہ مس$^{-1}$ $\frac{1}{3}$ = عہ یعنی مس عہ = $\frac{1}{3}$

اور فرض کرو کہ مس$^{-1}$ $\frac{1}{7}$ = بہ یعنی مس بہ = $\frac{1}{7}$

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ ۲ عہ + بہ = $\frac{\pi}{4}$

اب مس ۲ عہ = $\frac{2\text{ مس عہ}}{1-\text{مس}^2\text{ عہ}} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

نیز مس (۲ عہ + بہ) = $\frac{\text{مس ۲ عہ + مس بہ}}{1-\text{مس ۲ عہ مس بہ}}$

$= \frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{3}{4}} = \frac{4+21}{28-3} = \frac{25}{25} = 1 =$ مس $\frac{\pi}{4}$

∴ ۲ عہ + بہ = $\frac{\pi}{4}$

مثال ۳ — ثابت کرو کہ ۴ مس$^{-1}$ $\frac{1}{5}$ - مس$^{-1}$ $\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

فرض کرو کہ مس$^{-1}$ $\frac{1}{5}$ = عہ یعنی مس عہ = $\frac{1}{5}$

تب مس ۲ عہ = $\frac{2\text{ مس عہ}}{1-\text{مس}^2\text{ عہ}} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$

اور مس ۴ عہ = $\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$

یعنی مس ۴ عہ تقریباً ایک کے برابر ہے اور اس لئے ۴ عہ تقریباً $\frac{\pi}{4}$ ہے

فرض کرو کہ ۴ عہ = $\frac{\pi}{4}$ + مس$^{-1}$ لا

∴ $\frac{120}{119}$ = مس ($\frac{\pi}{4}$ + مس$^{-1}$ لا) = $\frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}}$ (دفعہ ۱۰۶)

ش لا = $\frac{1}{239}$

اس لئے ۴ مس$^{-1}$ $\frac{1}{5}$ ـ مس$^{-1}$ $\frac{1}{239}$ = $\frac{\pi}{4}$

مثال ۴ ـ ثابت کرو کہ

مس$^{-1}$ ا + مس$^{-1}$ ب = مس$^{-1}$ $\frac{\text{ا + ب}}{\text{۱ - اب}}$

فرض کرو کہ مس$^{-1}$ ا = عہ یعنی مس عہ = ا

فرض کرو کہ مس$^{-1}$ ب = بہ یعنی مس بہ = ب

نیز فرض کرو کہ مس$^{-1}$ ($\frac{\text{ا + ب}}{\text{۱ - اب}}$) = جہ یعنی مس جہ = $\frac{\text{ا + ب}}{\text{۱ - اب}}$

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ عہ + بہ = جہ

اب مس (عہ + بہ) = $\frac{\text{مس عہ + مس بہ}}{\text{۱ - مس عہ مس بہ}}$ = $\frac{\text{ا + ب}}{\text{۱ - اب}}$ = مس جہ

یعنی ربط ثابت ہوا

تعلق مندرجہ بالا میں صرف ضابطہ مس (لا + ما) = $\frac{\text{مس لا + مس ما}}{\text{۱ - مس لا مس ما}}$ کو مقلوب طریق کتابت کے موافق بیان کیا گیا ہے۔

کیونکہ فرض کرو کہ مس لا = ا یعنی لا = مس$^{-1}$ ا

اور مس ما = ب یعنی ما = مس$^{-1}$ ب

تب مس (لا + ما) = $\frac{\text{ا + ب}}{\text{۱ - اب}}$

$\therefore$ لا + ما = مس$^{-1}$ $\frac{\text{ا + ب}}{\text{۱ - اب}}$

یعنی مس$^{-1}$ ا + مس$^{-1}$ ب = مس$^{-1}$ $\frac{\text{ا + ب}}{\text{۱ - اب}}$

مندرجہ بالا میں ہم نے فرض کر لیا ہے کہ اب < ۱ یعنی $\frac{\text{ا + ب}}{\text{۱ - اب}}$ مثبت ہے اور اسلئے مس$^{-1}$ $\frac{\text{ا + ب}}{\text{۱ - اب}}$ زوایا °۰ اور °۹۰ کے درمیان واقع ہے لیکن اگر اب > ۱ تو $\frac{\text{ا + ب}}{\text{۱ - اب}}$ اور اس لئے بموجب ہمارے

تعریف سے $\text{مس}^{-1}\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۱-\text{اب}}$ ایک منفی زاویہ ہے، اسلئے یہاں جہ منفی زاویہ ہے اور چونکہ $\text{مس}\,(\pi+\text{جہ})=\text{مس جہ}$ اسلئے ضابطہ مطلوبہ یہ ہونا چاہیئے

$$\text{مس}^{-1}\text{ا}+\text{مس}^{-1}\text{ب}=\pi+\text{مس}^{-1}\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۱-\text{اب}}$$

مثال ۵ — ثابت کرو کہ $\text{جم}^{-1}\frac{۶۳}{۶۵}+۲\,\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۵}=\text{جب}^{-1}\frac{۳}{۵}$

چونکہ $۶۵^{۲}-۶۳^{۲}=۱۶^{۲}$

اسلئے $\text{جم}^{-1}\frac{۶۳}{۶۵}=\text{مس}^{-1}\frac{۱۶}{۶۳}$

نیز بموجب مثال ۱، $\text{جب}^{-1}\frac{۳}{۵}=\text{مس}^{-1}\frac{۳}{۴}$

اسلئے ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

$$\text{مس}^{-1}\frac{۱۶}{۶۳}+۲\,\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۵}=\text{مس}^{-1}\frac{۳}{۴}$$

اب $$\text{مس}\left[۲\,\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۵}\right]=\frac{۲\,\text{مس}\left[\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۵}\right]}{۱-\text{مس}^{۲}\left[\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۵}\right]}$$

$$=\frac{\frac{۲}{۵}}{۱-\frac{۱}{۲۵}}=\frac{۵}{۱۲}$$

یعنی $۲\,\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۵}=\text{مس}^{-1}\frac{۵}{۱۲}$

پس $$\text{مس}\left[\text{مس}^{-1}\frac{۱۶}{۶۳}+۲\,\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۵}\right]=\text{مس}\left[\text{مس}^{-1}\frac{۱۶}{۶۳}+\text{مس}^{-1}\frac{۵}{۱۲}\right]$$

$$=\frac{\frac{۵}{۱۲}+\frac{۱۶}{۶۳}}{۱-\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۱۶}{۶۳}}=\frac{۳۱۵+۱۹۲}{۷۵۶-۸۰}=\frac{۵۰۷}{۶۷۶}=\frac{۳}{۴}$$

یعنی $\text{مس}^{-1}\frac{۱۶}{۶۳}+۲\,\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۵}=\text{مس}^{-1}\frac{۳}{۴}$

مثال ۶ — مساوات ذیل کو حل کرو

$$\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}+\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}}=\text{مس}^{-1}(-۷)$$

طرفین مساوات کے مماس لینے سے

$$\frac{\text{مس}\left[\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}\right]+\text{مس}\left[\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}}\right]}{۱-\text{مس}\left[\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}\right]\text{مس}\left[\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}}\right]}$$

$$=\text{مس}\left\{\text{مس}^{-1}(-۷)\right\}=-۷$$

یعنی $$\frac{\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}+\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}}}{۱-\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}\times\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}}}=-۷$$

یعنی $\frac{۲\text{لا}^{۲}-\text{لا}+۱}{۱-\text{لا}}=-۷$ یعنی $\text{لا}=۲$

اگر اس قیمت کو مساوات میں مندرج کریں تو اسکے دائیں طرف کا رکن مثبت ہوتا ہے، اس سے معلوم ہوا کہ درحقیقت لا کی کوئی ایسی قیمت نہیں جو شرائط مساوات کو پورا کرے
قیمت لا = ۲ مساوات ذیل کو پورا کرتی ہے

$$\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}+\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}}=\pi+\text{مس}^{-1}(-۷)$$

امثلہ نمبری ۴۳

[طالب علم کو امثلہ ذیل (مثلاً ۱-۴، ۸، ۹، ۱۲، ۱۴) کے نتائج کی تصدیق عمل ترسیمی سے کرنی چاہئے]

ثابت کرو کہ

۱- $\text{جب}^{-1}\frac{۳}{۵}+\text{جب}^{-1}\frac{۸}{۱۷}=\text{جب}^{-1}\frac{۷۷}{۸۵}$

۲ — $\text{جب}^{-1}\frac{۵}{۱۳} + \text{جب}^{-1}\frac{۷}{۲۵} = \text{جم}^{-1}\left(\frac{۲۵۳}{۳۲۵}\right)$

۳ — $\text{جم}^{-1}\frac{۴}{۵} + \text{مس}^{-1}\frac{۳}{۵} = \text{مس}^{-1}\frac{۲۷}{۱۱}$

۴ — $\text{جم}^{-1}\frac{۴}{۵} + \text{جم}^{-1}\frac{۱۲}{۱۳} = \text{جم}^{-1}\frac{۳۳}{۶۵}$

۵ — $\text{جم}^{-1}\text{لا} = ۲\,\text{جب}^{-1}\sqrt{\frac{۱-\text{لا}}{۲}} = ۲\,\text{جم}^{-1}\sqrt{\frac{۱+\text{لا}}{۲}}$

۶ — $۲\,\text{جم}^{-1}\frac{۳}{\sqrt{۱۳}} + \text{مم}^{-1}\frac{۱۶}{۶۳} + \frac{۱}{۲}\text{جم}^{-1}\frac{۷}{۲۵} = \pi$

۷ — $\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۲} + \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۳} = \text{جب}^{-1}\frac{۱}{\sqrt{۵}} + \text{مم}^{-1}۳ = ۴۵^\circ$

۸ — $\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۷} + \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۱۳} = \text{مس}^{-1}\frac{۲}{۹}$

۹ — $\text{مس}^{-1}\frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۲}\text{مس}^{-1}\frac{۱۲}{۵}$

۱۰ — $\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۴} + \text{مس}^{-1}\frac{۲}{۹} = \frac{۱}{۲}\text{جم}^{-1}\frac{۳}{۵}$

۱۱ — $۲\,\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۵} + \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۷} + ۲\,\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۸} = \frac{\pi}{۴}$

۱۲ — $\text{مس}^{-1}\frac{۳}{۴} + \text{مس}^{-1}\frac{۳}{۵} - \text{مس}^{-1}\frac{۸}{۱۹} = \frac{\pi}{۴}$

۱۳ — $\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۳} + \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۵} + \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۷} + \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۸} = \frac{\pi}{۴}$

۱۴ — $۳\,\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۴} + \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۲۰} = \frac{\pi}{۴} - \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۱۹۸۵}$

۱۵ — $۴\,\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۵} - \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۷۰} + \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۹۹} = \frac{\pi}{۴}$

۱۶ — $\text{مس}^{-1}\frac{۱۲۰}{۱۱۹} = ۲\,\text{جب}^{-1}\frac{۵}{۱۳}$

۱۷ — $\text{مس}^{-1}\frac{\text{م}}{\text{ن}} - \text{مس}^{-1}\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}} = \frac{\pi}{۴}$

۱۸ — $\text{مس}^{-1}\text{ط} + \text{مس}^{-1}\frac{۲\text{ط}}{۱-\text{ط}^۲} = \text{مس}^{-1}\frac{۳\text{ط}-\text{ط}^۳}{۱-۳\text{ط}^۲}$ جہاں ط مثبت ہے اگر $\text{ط} < \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ یا $< \sqrt{۳}$ اور $= \pi + \text{مس}^{-1}\frac{۳\text{ط}-\text{ط}^۳}{۱-۳\text{ط}^۲}$ اگر $\text{ط} < \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ اور $> \sqrt{۳}$

۱۹ — $\text{مس}^{-1}\sqrt{\frac{\text{ا}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}{\text{ب ج}}} + \text{مس}^{-1}\sqrt{\frac{\text{ب}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}{\text{ج ا}}}$

$$+\ \text{مس}^{-1}\sqrt{\frac{\text{ج}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}{\text{اب}}}=\pi$$

۲۰ — $\text{مم}^{-1}\frac{\text{اب}+1}{\text{ا}-\text{ب}}+\text{مم}^{-1}\frac{\text{بج}+1}{\text{ب}-\text{ج}}+\text{مم}^{-1}\frac{\text{جا}+1}{\text{ج}-\text{ا}}=0$

۲۱ — $\text{مس}^{-1}\text{ن}+\text{مم}^{-1}(\text{ن}+1)=\text{مس}^{-1}(\text{ن}^2+\text{ن}+1)$

۲۲ — $\text{جم}\left(2\ \text{مس}^{-1}\frac{1}{7}\right)=\text{جب}\left(4\ \text{مس}^{-1}\frac{1}{3}\right)$

۲۳ — $2\ \text{مس}^{-1}\left[\text{مس}(45^\circ-\text{عہ})\ \text{مس}\frac{\text{بہ}}{2}\right]=\text{جم}^{-1}\left[\frac{\text{جب}\,2\,\text{عہ}+\text{جم بہ}}{1+\text{جب}\,2\,\text{عہ جم بہ}}\right]$

۲۴ — $\text{مس}^{-1}\text{لا}=2\ \text{مس}^{-1}\left[\text{قم مس}^{-1}\text{لا}-\text{مس مم}^{-1}\text{لا}\right]$

۲۵ — $2\ \text{مس}^{-1}\left[\text{مس}\frac{\text{عہ}}{2}\ \text{مس}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\text{بہ}}{2}\right)\right]=\text{مس}^{-1}\frac{\text{جب عہ جم بہ}}{\text{جب بہ}+\text{جم عہ}}$

۲۶ — ثابت کرو کہ

$$\text{جم}^{-1}\sqrt{\frac{\text{ا}-\text{لا}}{\text{ا}-\text{ب}}}=\text{جب}^{-1}\sqrt{\frac{\text{لا}-\text{ب}}{\text{ا}-\text{ب}}}=\text{مم}^{-1}\sqrt{\frac{\text{ا}-\text{لا}}{\text{لا}-\text{ب}}}=\frac{1}{2}\text{جب}^{-1}\frac{2\sqrt{(\text{ا}-\text{لا})(\text{لا}-\text{ب})}}{\text{ا}-\text{ب}}$$

۲۷ — اگر $\text{جم}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}+\text{جم}^{-1}\frac{\text{ما}}{\text{ب}}=\text{عہ}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}-\frac{2\,\text{لا ما}}{\text{اب}}\ \text{جم عہ}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=\text{جب}^2\,\text{عہ}$$

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

۲۸ — $\text{مس}^{-1}\frac{\sqrt{1+\text{لا}^2}-\sqrt{1-\text{لا}^2}}{\sqrt{1+\text{لا}^2}+\sqrt{1-\text{لا}^2}}=\text{بہ}$

۲۹ — $\text{مس}^{-1}\,2\,\text{لا}+\text{مس}^{-1}\,3\,\text{لا}=\frac{\pi}{4}$

۳۰ — $\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}-1}{\text{لا}-2}+\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}+1}{\text{لا}+2}=\frac{\pi}{4}$

۳۱ — مس$^{-1}$(لا + ۱) + مم$^{-1}$(لا − ۱) = جب$^{-1}$ ۴/۵ + جم$^{-1}$ ۳/۵

۳۲ — مس$^{-1}$(لا + ۱) + مس$^{-1}$(لا − ۱) = مس$^{-1}$ ۸/۳۱

۳۳ — ۲ مس$^{-1}$(جم لا) = مس$^{-1}$(۲ قم لا)

۳۴ — مس$^{-1}$ لا + ۲ مم$^{-1}$ لا = ۳/۴ π

۳۵ — مس جم$^{-1}$ لا = جب مم$^{-1}$ ۱/۲

۳۶ — مم$^{-1}$ لا − مم$^{-1}$(لا + ۲) = ۱۵°

۳۷ — جم$^{-1}$ (لا^{2} − ۱)/(لا^{2} + ۱) + مس$^{-1}$ ۲لا/(لا^{2} − ۱) = ۲π/۳

۳۸ — مم$^{-1}$ لا + مم$^{-1}$(ن^{2} − لا + ۱) = مم$^{-1}$(ن − ۱)

۳۹ — جب$^{-1}$ لا + جب$^{-1}$ ۲لا = π/۳

۴۰ — جب$^{-1}$ ۵/لا + جب$^{-1}$ ۱۲/لا = π/۲

۴۱ — مس$^{-1}$ ا/لا + مس$^{-1}$ ب/لا + مس$^{-1}$ ج/لا + مس$^{-1}$ د/لا = π/۲

۴۲ — قط$^{-1}$ لا/ا − قط$^{-1}$ لا/ب = قط$^{-1}$ ب − قط$^{-1}$ ا

۴۳ — قم$^{-1}$ لا = قم$^{-1}$ ا + قم$^{-1}$ ب

۴۴ — ۲ مس$^{-1}$ لا = جم$^{-1}$ (۱ − ا^{2})/(۱ + ا^{2}) − جم$^{-1}$ (۱ − ب^{2})/(۱ + ب^{2})

مفصلہ ذیل کی ترسیمات کھینچو

۴۵ — جب$^{-1}$ لا [انتباہ اگر ما = جب$^{-1}$ لا تو لا = جب ما اور اس ترسیم کا و ما سے وہی تعلق ہے جو ترسیم دفعہ ۶۸ کا ولا سے ہے]

۴۶ — جم$^{-1}$ لا ۴۷ — مس$^{-1}$ لا

۴۸ — مم$^{-1}$ لا ۴۹ — قم$^{-1}$ لا

۵۰ — قط$^{-1}$ لا ۵۱ — مس لا اور ۲ لا کی

ترسیمات کھینچئے اور ان کے نقاط تقاطع دریافت کرنے سے ثابت کرو کہ مساوات مس$^{-1}$ ۲ لا = لا کے حل کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمت تقریباً ۶۷° کے قوسی ناپ کے برابر ہے۔

باب نوزدہم
چند آسان مثلثی سلسلوں کا بیان

۲۴۷ — اگر زاویوں کی کوئی تعداد سلسلہ حسابیہ میں ہو تو ان کی جیبوں کا حاصل جمع دریافت کرو

فرض کرو کہ زاوئے عہ، عہ + بہ، عہ + ۲ بہ، ..... {عہ + (ن - ۱) بہ} ہیں

نیز فرض کرو کہ

ص = جب عہ + جب (عہ + بہ) + جب (عہ + ۲ بہ) + ... + جب {عہ + (ن - ۱) بہ}

بموجب دفعہ ۱۰۳

۲ جب عہ جب بہ/۲ = جم (عہ - بہ/۲) - جم (عہ + بہ/۲)

۲ جب (عہ + بہ) جب بہ/۲ = جم (عہ + بہ/۲) - جم (عہ + ۳ بہ/۲)

۲ جب (عہ + ۲ بہ) جب بہ/۲ = جم (عہ + ۳ بہ/۲) - جم (عہ + ۵ بہ/۲)

....

۲ جب {عہ + (ن - ۲) بہ} جب بہ/۲ = جم {عہ + (ن - ۵/۲) بہ} - جم {عہ + (ن - ۳/۲) بہ}

۲ جب {عہ + (ن - ۱) بہ} جب بہ/۲ = جم {عہ + (ن - ۳/۲) بہ} - جم {عہ + (ن - ۱/۲) بہ}

ان ن سطروںکو اکٹھا جمع کرنے سے حاصل ہوگا

۲ جب ب/۲ × ص = جم(ع − ب/۲) − جم{ع + (ن − ۱/۲) ب}

دائیں طرف کی باقی رقمیں ایک دوسرے کو ساقط کردیتی ہیں

اس لئے بموجب دفعہ ۱۰۰

۲ جب ب/۲ × ص = ۲ جب {ع + ((ن − ۱)/۲) ب} جب ن ب/۲

یعنی ص = جب {ع + ((ن − ۱)/۲) ب} جب ن ب/۲ ÷ جب ب/۲

مثال — فرض کرو کہ ب = ۲ ع تب

جب ع + جب ۳ ع + جب ۵ ع + ... + جب (۲ ن − ۱) ع

= جب {ع + (ن − ۱) ع} جب ن ع ÷ جب ع = جب² ن ع ÷ جب ع

۲۴۸ — اگر زاویوں کی کوئی تعداد سلسلہ حسابیہ میں ہو تو اُن کی جیوب التمام کا حاصل جمع دریافت کرو۔

فرض کرو کہ زاویے ع، ع + ب، ع + ۲ ب، .... ع + (ن − ۱) ب ہیں

نیز فرض کرو کہ

ص = جم ع + جم(ع + ب) + جم(ع + ۲ ب) + ... + جم{ع + (ن − ۱) ب}

بموجب دفعہ ۱۰۲

۲ جم ع جب ب/۲ = جب(ع + ب/۲) − جب(ع − ب/۲)

۲ جم(ع + ب) جب ب/۲ = جب(ع + ۳ب/۲) − جب(ع + ب/۲)

۲ جم(ع + ۲ ب) جب ب/۲ = جب(ع + ۵ب/۲) − جب(ع + ۳ب/۲)

. . . .

۲ جم {عہ + (ن − ۲) ب} جب ب/۲ = جب {عہ + (ن − ۳/۲) ب} − جب {عہ + (ن − ۵/۲) ب}

اور ۲ جم {عہ + (ن − ۱) ب} جب ب/۲ = جب {عہ + (ن − ۱/۲) ب} − جب {عہ + (ن − ۳/۲) ب}

ان ن سطروں کو اکٹھا جمع کرنے سے حاصل ہوگا

۲ ص × جب ب/۲ = جب {عہ + (ن − ۱/۲) ب} − جب (عہ − ب/۲)

بائیں طرف کی باقی رقمیں ایک دوسرے کو ساقط کردیتی ہیں

اسلئے بموجب دفعہ ۱۰۰

۲ ص × جب ب/۲ = ۲ جم {عہ + (ن−۱)/۲ ب} جب ن ب/۲

یعنی ص = جم {عہ + (ن−۱)/۲ ب} جب ن ب/۲ ÷ جب ب/۲

۲۴۹ ــــ دفعات ۲۴۷ اور ۲۴۸ میں ص کی قیمت دریافت کرنے کے دونوں جملے معدوم ہوتے ہیں اگر جب ن ب/۲ صفر ہو، یعنی اگر زاویہ ن ب/۲، π کے کسی ضعف کے برابر ہو۔

یعنی جب زاویہ ن ب/۲ = ع π جہاں ع کوئی صحیح عدد ہے

یعنی جب زاویہ ب = ع × ۲π/ن

اس لئے ثابت ہوا کہ اگر ن زاوئے سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو انکی جیوب (یا جیوب التمام) کا مجموعہ معدوم ہوتا ہے اگر زاویوں کا فرق مشترک ۲π/ن کا کوئی ضعف ہو

امثلہ جم عہ + جم (عہ + $\frac{۲\pi}{ن}$) + جم (عہ + $\frac{۴\pi}{ن}$) + ... ن رقموں تک = ۰

اور جب عہ + جب (عہ + $\frac{۴\pi}{ن}$) + جب (عہ + $\frac{۸\pi}{ن}$) + ... ن رقموں تک = ۰

۲۵۰ ـــ سلسلہ جب عہ - جب (عہ + بہ) + جب (عہ + ۲بہ) - .... کو ن رقموں تک جمع کرو۔

بموجب دفعہ ۹۷

جب (عہ + بہ + π) = - جب (عہ + بہ)

جب (عہ + ۲بہ + ۲π) = جب (عہ + ۲بہ)

جب (عہ + ۳بہ + ۳π) = - جب (عہ + ۳بہ)

....

اسلئے سلسلہ = جب عہ + جب (عہ + بہ + π) + جب {عہ + ۲ (بہ + π)}

+ جب {عہ + ۳ (بہ + π)} + ...

$$= \frac{\text{جب}\left\{\text{عہ} + \frac{ن-۱}{۲}(\text{بہ} + \pi)\right\} \text{جب} \frac{ن(\text{بہ}+\pi)}{۲}}{\text{جب} \frac{\text{بہ}+\pi}{۲}}$$ بموجب دفعہ ۲۴۷

$$= \frac{\text{جب}\left\{\text{عہ} + \frac{ن-۱}{۲}(\text{بہ} + \pi)\right\} \text{جب} \frac{ن(\text{بہ}+\pi)}{۲}}{\text{جم} \frac{\text{بہ}}{۲}}$$

مثال ۲ ـــ سلسلہ جم^۳ عہ + جم^۳ ۲عہ + جم^۳ ۳عہ + ... کو ن رقموں تک جمع کرو۔

بموجب دفعہ ۱۱۴

جم ۳عہ = ۴ جم^۳ عہ - ۳ جم عہ

یعنی ۴ جم^۳ عہ = ۳ جم عہ + جم ۳عہ

اسی طرح سے ۴ جم^۳ ۲ عہ = ۳ جم ۲ عہ + جم ۶ عہ

۴ جم^۳ ۳ عہ = ۳ جم ۳ عہ + جم ۹ عہ

....

اس لئے اگر سلسلہ کا حاصل جمع ص ہو تو

۴ ص = (۳ جم عہ + جم ۳ عہ) + (۳ جم ۲ عہ + جم ۶ عہ) + (۳ جم ۳ عہ + جم ۹ عہ) + ...

= ۳ (جم عہ + جم ۲ عہ + جم ۳ عہ + ...) + (جم ۳ عہ + جم ۶ عہ + جم ۹ عہ + ...)

$$= ۳\,\frac{\text{جم}\left\{\text{عہ} + \frac{\text{ن}-1}{۲}\times\text{عہ}\right\}\text{جب}\,\frac{\text{ن عہ}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۲}} + \frac{\text{جم}\left\{۳\,\text{عہ} + \frac{\text{ن}-1}{۲}\times ۳\,\text{عہ}\right\}\text{جب}\,\frac{۳\times\text{ن عہ}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{۳\,\text{عہ}}{۲}}$$

$$= ۳\,\frac{\text{جم}\,\frac{\text{ن}+1}{۲}\,\text{عہ}\;\text{جب}\,\frac{\text{ن عہ}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۲}} + \frac{\text{جم}\,\frac{۳(\text{ن}+1)}{۲}\,\text{عہ}\;\text{جب}\,\frac{۳\,\text{ن عہ}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{۳\,\text{عہ}}{۲}}$$

اسی طرح سے اگر زاوئے سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو انکی جیبوں کے مکعبوں کا مجموعہ معلوم ہو سکتا ہے

نتیجہ صریح — چونکہ

۲ جب^۲ عہ = ۱ − جم ۲ عہ　اور　۲ جم^۲ عہ = ۱ + جم ۲ عہ

اس لئے جیوب التمام کے مربعوں کا حاصل جمع دریافت ہو سکتا ہے

نیز چونکہ　۸ جب^۴ عہ = ۲ [۱ − جم ۲ عہ]^۲

= ۲ − ۴ جم ۲ عہ + ۲ جم^۲ ۲ عہ = ۳ − ۴ جم ۲ عہ + جم ۴ عہ

پس جیبوں کی چوتھی قوتوں کا مجموعہ حاصل ہو سکتا ہے اور اسی طرح سے جیوب التمام کی قوتوں کا مجموعہ بھی حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال ۳ — سلسلہ جم عہ جب ب + جم ۳ عہ جب ۲ ب + جم ۵ عہ جب ۳ ب + ...

کو ن رقموں تک جمع کرو۔

فرض کرو کہ سلسلہ کا حاصل جمع ص ہے تب

۲ ص = {جب(عہ + بہ) − جب(عہ − بہ)} + {جب(۳ عہ + ۲ بہ) − جب(۳ عہ − ۲ بہ)}

+ {جب(۵ عہ + ۳ بہ) − جب(۵ عہ − ۳ بہ)} + ...

= {جب(عہ + بہ) + جب(۳ عہ + ۲ بہ) + جب(۵ عہ + ۳ بہ) + ...}

− {جب(عہ − بہ) + جب(۳ عہ − ۲ بہ) + جب(۵ عہ − ۳ بہ) + ...}

$$= \frac{\text{جب}\left\{(\text{عہ}+\text{بہ}) + \frac{\text{ن}-1}{2}(2\,\text{عہ}+\text{بہ})\right\} \text{جب ن} \frac{2\,\text{عہ}+\text{بہ}}{2}}{\text{جب} \frac{2\,\text{عہ}+\text{بہ}}{2}}$$

$$- \frac{\text{جب}\left\{(\text{عہ}-\text{بہ}) + \frac{\text{ن}-1}{2}(2\,\text{عہ}-\text{بہ})\right\} \text{جب ن} \frac{2\,\text{عہ}-\text{بہ}}{2}}{\text{جب} \frac{2\,\text{عہ}-\text{بہ}}{2}} \quad \text{بموجب دفعہ ۲۸۷}$$

$$= \frac{\text{جب}\left\{\text{ن عہ} + \frac{\text{ن}+1}{2}\,\text{بہ}\right\} \text{جب} \frac{\text{ن}(2\,\text{عہ}+\text{بہ})}{2}}{\text{جب} \frac{2\,\text{عہ}+\text{بہ}}{2}}$$

$$- \frac{\text{جب}\left\{\text{ن عہ} - \frac{\text{ن}+1}{2}\,\text{بہ}\right\} \text{جب} \frac{\text{ن}(2\,\text{عہ}-\text{بہ})}{2}}{\text{جب} \frac{2\,\text{عہ}-\text{بہ}}{2}}$$

مثال ۴ — ایک ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع $ا_1 ا_2 \ldots ا_ن$ ایک دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہے، دائرہ کا مرکز و ہے اگر قوس $ا_ن ا_1$ پر کوئی ایسا نقطہ ع لیا جائے کہ ع و $ا_1$ = طہ تو جو خطوط نقطہ ع کو کثیر الاضلاع کے رؤس الزوایا کے ساتھ وصل کرتے ہیں ان کے طولوں کا مجموعہ دریافت کرو

چونکہ زاویوں $ا_1$ و $ا_2$، $ا_2$ و $ا_3$، ...... $ا_ن$ و $ا_1$ میں سے ہر ایک $\frac{2\pi}{\text{ن}}$ کے برابر ہے، اسلئے زاویے ع و $ا_1$، ع و $ا_2$، ...... بالترتیب طہ، طہ + $\frac{2\pi}{\text{ن}}$، طہ + $\frac{4\pi}{\text{ن}}$، ...... ہیں

اس لئے اگر ر دائرہ کا نصف قطر ہو تو

$$ع ا_۱ = ۲ر\,\text{جب}\,\frac{ع و ا_۱}{۲} = ۲ر\,\text{جب}\,\frac{ط}{۲}$$

$$ع ا_۲ = ۲ر\,\text{جب}\,\frac{ع و ا_۲}{۲} = ۲ر\,\text{جب}\left(\frac{ط}{۲} + \frac{\pi}{ن}\right)$$

$$ع ا_۳ = ۲ر\,\text{جب}\,\frac{ع و ا_۳}{۲} = ۲ر\,\text{جب}\left(\frac{ط}{۲} + \frac{۲\pi}{ن}\right)$$

....

$$\text{اسلئے مجموعۂ مطلوبہ} = ۲ر\left[\text{جب}\,\frac{ط}{۲} + \text{جب}\left(\frac{ط}{۲} + \frac{\pi}{ن}\right) + \text{جب}\left(\frac{ط}{۲} + \frac{۲\pi}{ن}\right) + \cdots \text{ن رقموں تک}\right]$$

$$= ۲ر\,\frac{\text{جب}\left[\frac{ط}{۲} + \frac{ن-۱}{۲}\,\frac{\pi}{ن}\right]\text{جب}\,\frac{ن}{۲} \times \frac{\pi}{ن}}{\text{جب}\,\frac{\pi}{۲ن}} \quad (\text{دفعہ } ۲۴۷)$$

$$= ۲ر\,\text{قم}\,\frac{\pi}{۲ن} \times \text{جب}\left[\frac{\pi}{۲} + \frac{ط}{۲} - \frac{\pi}{۲ن}\right]$$

$$= ۲ر\,\text{قم}\,\frac{\pi}{۲ن}\;\text{جم}\left(\frac{ط}{۲} - \frac{\pi}{۲ن}\right)$$

امثلہ نمبری ۴۴

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو

۱ — $\text{جم}\,ط + \text{جم}\,۳ط + \text{جم}\,۵ط + \cdots\cdots$ ن رقموں تک

۲ — $\text{جم}\,\frac{د}{۲} + \text{جم}\,۲د + \text{جم}\,\frac{۷د}{۲} + \cdots\cdots$ ن رقموں تک

ثابت کرو کہ

۳ — $$\frac{\text{جب}\,عہ + \text{جب}\,۲عہ + \text{جب}\,۳عہ + \cdots + \text{جب}\,ن\,عہ}{\text{جم}\,عہ + \text{جم}\,۲عہ + \cdots + \text{جم}\,ن\,عہ} = \text{مس}\,\frac{ن+۱}{۲}\,عہ$$

۴ — $$\frac{\text{جب}\,عہ + \text{جب}\,۳عہ + \text{جب}\,۵عہ + \cdots + \text{جب}\,(۲ن-۱)\,عہ}{\text{جم}\,عہ + \text{جم}\,۳عہ + \text{جم}\,۵عہ + \cdots + \text{جم}\,(۲ن-۱)\,عہ} = \text{مس}\,ن\,عہ$$

۵— (جب عہ − جب (عہ + بہ) + جب (عہ + ۲ بہ) + ... ن رقموں تک) / (جم عہ − جم (عہ + بہ) + جم (عہ + ۲ بہ) + ... ن رقموں تک)

= بس { عہ + (ن − ۱)/۲ (π + بہ) }

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو۔

۶— جم π/(۲ن + ۱) + جم ۳π/(۲ن + ۱) + جم ۵π/(۲ن + ۱) + ... ن رقمو

۷— جم عہ − جم (عہ + بہ) + جم (عہ + ۲ بہ) − .... ۲ن رقمو

۸— جب طہ + جب (ن − ۴)/(ن − ۲) طہ + جب (ن − ۶)/(ن − ۲) طہ + ... ن رقمو

۹— جم لا + جب ۳ لا + جم ۵ لا + جب ۷ لا + ... + جب (۴ن − ۱) لا

۱۰— جب عہ جب ۲ عہ + جب ۲ عہ جب ۳ عہ + جب ۳ عہ جب ۴ عہ + ... ن رقمو

۱۱— جم عہ جب ۲ عہ + جب ۲ عہ جم ۳ عہ + جم ۳ عہ جب ۴ عہ
+ جب ۴ عہ جم ۵ عہ + ... ۲ن رقموں تک

۱۲— جب عہ جب ۳ عہ + جب ۲ عہ جب ۴ عہ + جب ۳ عہ جب ۵ عہ + ... ن

۱۳— جم عہ جم بہ + جم ۳ عہ جم ۲ بہ + جم ۵ عہ جم ۳ بہ + ... ن رقمو

۱۴— جب^{2} عہ + جب^{2} ۲ عہ + جب^{2} ۳ عہ + ... ن رقمو

۱۵— جب^{2} طہ + جب^{2} (طہ + عہ) + جب^{2} (طہ + ۲ عہ) + ... ن رقمو

۱۶— جب^{3} عہ + جب^{3} ۲ عہ + جب^{3} ۳ عہ + ... ن رقمو

۱۷— جب^{4} عہ + جب^{4} ۲ عہ + جب^{4} ۳ عہ + ... ن رقموا

۱۸— جم^{4} عہ + جم^{4} ۲ عہ + جم^{4} ۳ عہ + ... ن رقمو

۱۹— جم طہ جم ۲ طہ + جم ۲ طہ جم ۳ طہ + جم ۳ طہ جم ۴ طہ + ... ن رقمو

۲۰— جب عہ جب (عہ + بہ) − جب (عہ + بہ) جب (عہ + ۲ بہ) + ... ۲ن

۲۱— سلسلہ جب عہ + جب ۲ عہ + جب ۳ عہ + ... ن رقمو

کے مجموعہ سے سلسلہ ۱ + ۲ + ۳ + ... + ن کا مجموعہ عہ کو نہایت قلیل بنانے سے حاصل کرو۔

۲۲۔ سلسلہ ۱ + ۳ + ۵ + ... کے ن رقموں کے مجموعہ کو مثال دفعہ ۲۴۴ کے نتیجہ سے حاصل کرو۔

۲۳۔ اگر عہ = $\frac{۲\pi}{۱۷}$ تو ثابت کرو کہ

۲ (جم عہ + جم ۲ عہ + جم ۴ عہ + جم ۸ عہ) اور

۲ (جم ۳ عہ + جم ۵ عہ + جم ۶ عہ + جم ۷ عہ)

مساوات لا² + لا − ۴ = ۰ کی قیمتیں ہیں

۲۴۔ ایک ن اضلاع کی منتظم کثیرالاضلاع ا ب ج د.... ایک دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہے، دائرہ کا مرکز و اور نصف قطر ر ہے۔ اگر کوئی نقطہ ع قوس اب پر ایسا لیا جائے کہ ع و ا = طہ تو ثابت کرو کہ

ع ا × ع ب + ع ا × ع ج + ع ا × ع د + ... + ع ب × ع ج + ...

$$= ر^2 \left[۲ جم^2 \left(\frac{طہ}{۲} - \frac{\pi}{۲ن} \right) قم^2 \frac{\pi}{۲ن} - ن \right]$$

۲۵۔ ن اضلاع کی دو منتظم کثیر الاضلاع اشکال ہیں، ان میں سے ایک، دئے ہوئے دائرہ کے اندر اور دوسری باہر بنی ہوئی ہے، اگر ایک کثیر الاضلاع کے راس زاویہ کو دوسری کثیر الاضلاع کے ہر ایک راس زاویہ کے ساتھ خطوط کے ذریعہ وصل کردیا جائے تو ثابت کرو کہ ان خطوط کے مربعوں کے مجموعہ کو اشکال کثیر الاضلاع کے رقبوں کے مجموعہ سے

نسبت ۲: جب $\frac{\pi ۲}{ن}$ ہوگی۔

۲۶۔ ایک منتظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے اندر بنی ہوا ہے، اس کے زاویوں کے راس $ا_۱$، $ا_۲$، ...... $ا_{۲ن+۱}$ ہیں اگر محیط دائرہ پر کوئی نقطہ و نقاط $ا_۱$ اور $ا_{۲ن+۱}$ کے درمیان ہو تو ثابت کرو کہ

$$و ا_۱ + و ا_۳ + ... + و ا_{۲ن+۱} = و ا_۲ + و ا_۴ + ... + و ا_{۲ن}$$

۲۷۔ ایک ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے، دائرہ کا نصف قطر ا ہے اگر محیط دائرہ کے کسی نقطہ سے کثیر الاضلاع کے ضلعوں پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۲}{ن} \sum \left(\frac{ع}{ا}\right)^۲ = ۳ \quad \text{اور} \quad \frac{۲}{ن} \sum \left(\frac{ع}{ا}\right)^۳ = ۵$$

جہاں ع کوئی عمود ہے اور علامت $\sum$ = حاصل جمع اُن تمام رقموں کا جن کا عام نمونہ وہ رقم ہے جس کے پہلے یہ علامت لکھی ہوئی ہے۔

باب بیستم

اسقاط

۲۵۱ ـــ اگر ایک مقدار مجہول کی دو مساواتیں معلوم ہوں تو ضرور ہے کہ ان مساواتوں کی مستقل مقداروں میں کوئی ربط ہو تاکہ مقدار مجہول کی ایک ہی قیمت دونوں کی شرائط کو پورا کرے، مثلاً فرض کرو کہ ایک مقدار مجہول لا ذیل کی دو مساواتوں کی شرائط کو پورا کرتی ہے۔

$$ا\,لا + ب = ۰ \quad \text{اور} \quad ج\,لا^{۲} + د\,لا + ع = ۰$$

پہلی مساوات سے $لا = -\frac{ب}{ا}$

اور لا کی اس قیمت سے دوسری مساوات کی شرائط بھی پوری ہونگی اگر

$$ج\left(-\frac{ب}{ا}\right)^{۲} + د\left(-\frac{ب}{ا}\right) + ع = ۰$$

یعنی اگر $ب^{۲}ج - ا\,ب\,د + ا^{۲}ع = ۰$

یہ مساوات دو مندرجہ بالا معادلات میں سے مقدار مجہول لا کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے اس لئے اس کو حاصل اسقاط کہتے ہیں۔

۲۵۲ — نیز فرض کرو کہ ایک زاویہ طہ شرائط معادلات جب^۳ طہ = ب اور جم^۳ طہ = ج کو پورا کرتا ہے

جب طہ = ب^⅓ اور جم طہ = ج^⅓

اب طہ کی تمام قیمتوں کے لئے

جب^۲ طہ + جم^۲ طہ = ۱، یعنی اس صورت میں

ب^⅔ + ج^⅔ = ۱

اور یہ مطلوبہ حاصل اسقاط ہے۔

۲۵۳ — جب ایک مقدار مجہول کی دو مساواتیں معلوم ہوں تو اصولاً ہم ان معادلات سے اس مقدار کو ہمیشہ ساقط کر سکتے ہیں مگر عملی طور پر بظاہر سادہ سوالات کے حل کرنے میں بھی ذہانت اور اور حکمت عملی کی ضرورت ہوتی ہے۔

اسی طرح سے اگر دو مقادیر مجہول کی تین مساواتیں دی ہوئی ہوں تو کم از کم نظری بحث میں ہم ان مقادیر مجہولہ کو ان معادلات سے ہمیشہ ساقط کر سکتے ہیں۔

۲۵۴ — اس جگہ ہم اسقاط کی چند مثالیں دینگے۔

مثال ۱ — معادلات ا جم طہ + ب جب طہ = ج

اور د جم طہ + ع جب طہ = ف

طہ کو ساقط کرو۔

جب چلیپائی یا کسی اور طرح سے معادلات کو جم طہ اور جب طہ کے لئے حل کرو

$$\frac{\text{جم طہ}}{\text{ب ف} - \text{ج ع}} = \frac{\text{جب طہ}}{\text{ج د} - \text{ا ف}} = \frac{1}{\text{ب د} - \text{ا ع}}$$

$$1 = \text{جم}^2\text{ طہ} + \text{جب}^2\text{ طہ} = \frac{(\text{ب ف} - \text{ج ع})^2 + (\text{ج د} - \text{ا ف})^2}{(\text{ب د} - \text{ا ع})^2}$$

$$(\text{ب ف} - \text{ج ع})^2 + (\text{ج د} - \text{ا ف})^2 = (\text{ب د} - \text{ا ع})^2$$

مثال ۲۔ معادلات ذیل سے طہ کو ساقط کرو

$$\frac{\text{ا لا}}{\text{جم طہ}} - \frac{\text{ب ما}}{\text{جب طہ}} = \text{ا}^2 - \text{ب}^2 \cdots\cdots\cdots (1)$$

اور
$$\frac{\text{ا لا جب طہ}}{\text{جم}^2\text{ طہ}} + \frac{\text{ب ما جم طہ}}{\text{جب}^2\text{ طہ}} = \cdot \cdots\cdots\cdots (2)$$

معادلات (۲) سے ا لا جب^3 طہ = ـب ما جم^3 طہ

$$\frac{\text{جب طہ}}{\sqrt[3]{(-\text{ب ما})}} = \frac{\text{جم طہ}}{\sqrt[3]{(\text{ا لا})}} = \frac{\sqrt{\text{جب}^2\text{ طہ} + \text{جم}^2\text{ طہ}}}{\sqrt{(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب ما})^{\frac{2}{3}}}}$$

(دیکھو ٹوڈ ہنٹر اور لونی کا الجبرا مبتدیوں کیلئے دفعہ ۳۸۱)

$$= \frac{1}{\sqrt{(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب ما})^{\frac{2}{3}}}}$$

اس لئے $$\frac{1}{\text{جب ط}} = \frac{\sqrt{(\text{ب ا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ا لا})^{\frac{2}{3}}}}{(\text{ب ا})^{\frac{1}{3}}}$$

اور $$\frac{1}{\text{جم ط}} = \frac{\sqrt{(\text{ب ا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ا لا})^{\frac{2}{3}}}}{(\text{ا لا})^{\frac{1}{3}}}$$

یعنی مساوات (۱) میں $\frac{1}{\text{جم ط}}$ اور $\frac{1}{\text{جب ط}}$ کی قیمتیں مندرج کرنے سے

$$\text{ا}^2 - \text{ب}^2 = \sqrt{(\text{ب ا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ا لا})^{\frac{2}{3}}}\left[\text{ا لا} \times \frac{1}{(\text{ا لا})^{\frac{1}{3}}} - \text{ب ا}\left\{-\frac{1}{(\text{ب ا})^{\frac{1}{3}}}\right\}\right]$$

$$= \sqrt{(\text{ب ا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ا لا})^{\frac{2}{3}}}\left\{(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب ا})^{\frac{2}{3}}\right\}$$

$$= \left\{(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب ا})^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

یعنی $(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب ا})^{\frac{2}{3}} = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)^{\frac{2}{3}}$ .... (۳)

جو طالب ہندسہ تحلیلہ سے واقف ہے وہ فوراً پہچان لیگا کہ مساوات (۳) قطع ناقص کے عمادوں کے متعلق ایک مشہور مسئلہ کا حل ہے۔

مثال ۳ — زاویہ ط کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\ \text{جم ط} - \frac{\text{ا}}{\text{ب}}\ \text{جب ط} = \text{جم ۲ط} \quad \text{.........} \quad (۱)$$

اور $$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\ \text{جب ط} + \frac{\text{ا}}{\text{ب}}\ \text{جم ط} = \text{۲ جب ۲ط} \quad \text{.......} \quad (۲)$$

مساوات (۱) کو جم ط سے اور (۲) کو جب ط سے ضرب دینے اور جمع کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{ل}}{\text{ا}} = \text{جم طہ جم ۲ طہ} + \text{۲ جب طہ جب ۲ طہ}$$

$$= \text{جم طہ} + \text{جب طہ جب ۲ طہ} = \text{جم طہ} + \text{۲ جب}^{2}\text{ طہ جم طہ} \quad \ldots\ldots (۳)$$

) کو جم طہ سے اور (۱) کو جب طہ سے ضرب دو اور

ریق کرو تب

$$\frac{\text{ما}}{\text{ب}} = \text{۲ جب ۲ طہ جم طہ} - \text{جم ۲ طہ جب طہ}$$

$$\text{جب ۲ طہ جم طہ} + \text{جب طہ} = \text{جب طہ} + \text{۲ جب طہ جم}^{2}\text{ طہ} \quad \ldots\ldots (۴)$$

) اور (۴) کو جمع کرنے سے

$$\frac{\text{ل}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = (\text{جب طہ} + \text{جم طہ})\left[۱ + \text{۲ جب طہ جم طہ}\right]$$

$$= (\text{جب طہ} + \text{جم طہ})\left[\text{جب}^{2}\text{ طہ} + \text{جم}^{2}\text{ طہ} + \text{۲ جب طہ جم طہ}\right]$$

$$= (\text{جب طہ} + \text{جم طہ})^{3}$$

$$\text{س}\quad \text{جب طہ} + \text{جم طہ} = \left(\frac{\text{ل}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

) کو (۳) سے تفریق کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{ل}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = (\text{جم طہ} - \text{جب طہ})(۱ - \text{۲ جب طہ جم طہ})$$

$$= (\text{جم طہ} - \text{جب طہ})^{3}$$

$$\text{جم طہ} - \text{جب طہ} = \left(\frac{\text{ل}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots (۶)$$

ولات (۵) اور (۶) کو دوسری قوت پر اٹھانے اور

کرنے سے

$$۲ = \left(\frac{\text{ل}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\text{ل}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

اشلہ نمبری ۴۵

زاویہ طہ کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

۱ — ا جم طہ + ب جب طہ = ج اور ب جم طہ - ا جب طہ = د

۲ — لا = ا جم (طہ - عہ) اور ما = ب جم (طہ - یہ)

۳ — ا جم ۲ طہ = ب جب طہ اور ج جب ۲ طہ = د جم طہ

۴ — ا جب عہ - ب جم عہ = ۲ ب جب طہ اور ا جب ۲ عہ - ب جم ۲ طہ = ا

۵ — لا جب طہ - ما جم طہ = $\sqrt{لا^2 + ما^2}$ اور $\frac{جب^2 طہ}{ا^2} + \frac{جم^2 طہ}{ب^2} = \frac{1}{لا^2 + ما^2}$

۶ — $\frac{لا جم طہ}{ا} + \frac{ما جب طہ}{ب} = 1$

اور لا جب طہ - ما جم طہ = $\sqrt{ا^2 جب^2 طہ + ب^2 جم^2 طہ}$

۷ — جب طہ - جم طہ = ف

اور　قم طہ - جب طہ = ق

۸ — لا = ا جم طہ + ب جم ۲ طہ اور ما = ا جب طہ + ب جب ۲ طہ

۹ — اگر م = قم طہ - جب طہ اور ن = قط طہ - جم طہ

تو ثابت کرو کہ $م^{\frac{2}{3}} + ن^{\frac{2}{3}} = (م ن)^{-\frac{2}{3}}$

۱۰ — ثابت کرو کہ معادلات

لا جم (طہ + عہ) + ما جب (طہ + عہ) = ا جب ۲ طہ

اور　ما جم (طہ + عہ) - لا جب (طہ + عہ) = ۲ ا جم ۲ طہ

کا حاصل اسقاط $(لا جم عہ + ما جب عہ)^{\frac{2}{3}} + (لا جب عہ - ما جم عہ)^{\frac{2}{3}} = (۲ ا)^{\frac{2}{3}}$ ہے

طہ اور فہ کو معادلات ذیل سے ساقط کرو۔

۱۱ــ جب طہ + جب فہ = ا، جم طہ + جم فہ = ب، طہ - فہ = ا

۱۲ــ مس طہ + مس فہ = لا، مم طہ + مم فہ = ما، طہ + فہ = ا

۱۳ــ ا جم^۲ طہ + ب جب^۲ طہ = ج، ب جم^۲ فہ + ا جب^۲ فہ = د

اور ا مس طہ = ب مس فہ۔

۱۴ــ جم طہ + جم فہ = ا، مم طہ + مم فہ = ب

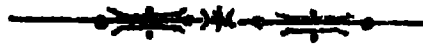
اور قم طہ + قم فہ = ج

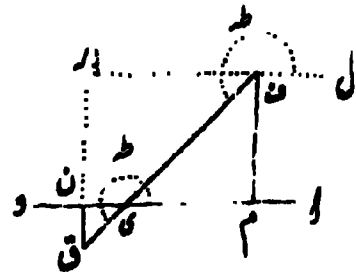
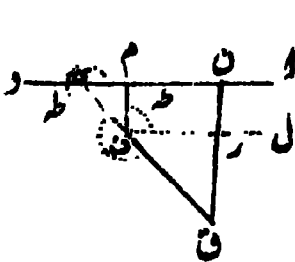
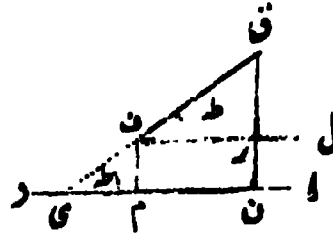
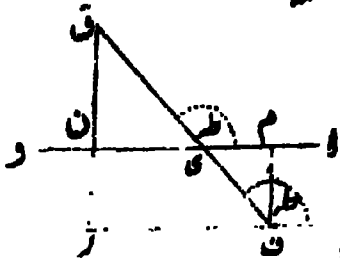
۱۵ــ ا جب طہ = ب جب فہ، ا جم طہ + ب جم فہ = ج

اور لا = ما مس (طہ + فہ)

۱۶ــ $\frac{لا}{ا}$ جم طہ + $\frac{ما}{ب}$ جب طہ = ۱، $\frac{لا}{ا}$ جم فہ + $\frac{ما}{ب}$ جب فہ = ۱

اور ا^۲ جب $\frac{طہ}{۲}$ جب $\frac{فہ}{۲}$ + ب^۲ جم $\frac{طہ}{۲}$ جم $\frac{فہ}{۲}$ = ج^۲

باب بست ویکم

تظلیل

۲۵۵ — فرض کرو کہ ف ق ایک مستقیم خط ہے اور اس کے سروں ف اور ق سے ایک ثابت مستقیم خط و ا پر عمود نکالے گئے ہیں۔

خط و ا پر م ن کو ف ق کا ظل یا تظلیل کہتے ہیں۔

اگر م ن کی سمت وہی ہو جو و ا کی ہے تو اس کو مثبت کہتے ہیں اور اگر مخالف ہو تو منفی۔

۲۵۶ — اگر ایک مستقیم خط ف ق اور ثابت مستقیم خط و ا کا درمیانی زاویہ طہ ہو تو ثابت کرو ف ق کا ظل و ا پر ف ق جم طہ کے برابر ہے۔

ف ق کی سمت خواہ کچھ ہی ہو نقطہ ف میں سے ایک مستقیم خط ف ل، و ا کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ خط (جو بشرط ضرورت خارج کیا جا سکتا ہے) ق ن یا ق ان محدودہ کو نقطہ ر پر ملتا ہے۔

تب ہر ایک شکل میں زاویہ ل ف ق یا زاویہ ا ی ق دونوں طہ کے برابر ہیں۔

نیز م ن = ف ر = ف ق جم ل ف ق = ف ق جم طہ
بموجب تعریفات دفعہ ۵۶

اسی طرح سے ف ق کا ظل ایک ایسے خط پر جو و ا پر عمود ہو

= ر ق = ف ق جب ل ف ق

= ف ق جب طہ

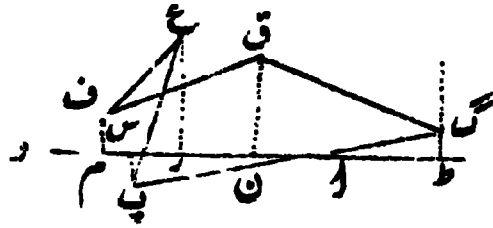
اس لئے معلوم ہوا کہ خط ف ق کا ظل ایک ایسے خط پر جو ف ق سے زاویہ طہ بناتا ہو ف ق جم طہ ہے اور اس کا ظل ایک ایسے خط پر

جو مذکورۂ بالا خط پر عمود ہو ف ق جب طہ ہے۔

۲۵۷۔ دفعہ ۵۶ میں جیب التمام کی تعریف ہم اس طرح کر سکتے تھے۔ اگر و ع کا ظل خط ابتدائی پر بنایا جائے تو جو نسبت اس ظل کو و ع سے ہو اسکو زاویہ طہ کی جیب التمام کہتے ہیں جہاں طہ، و ع اور ابتدائی خط کا درمیانی زاویہ ہے، اسی طرح سے اگر و ع کا ظل ایک ایسے خط پر بنایا جائے جو ابتدائی خط پر عمود ہو تو جو نسبت اس ظل کو و ع سے ہو اس کو زاویہ طہ کی جیب کہتے ہیں۔

جیب اور جیب التمام کی تعریفات پر اس نقطہ خیال سے دیکھنا بعض اوقات مفید ہوتا ہے

۲۵۸۔ اگر ایک ثابت خط و ا پر ف ق کا ظل بنایا جائے تو ثابت کرو کہ یہ ظلّ ہر ایک ایسے شکستہ (یا غیر مستقیم) خط کے ظلّوں کے مجموعہ کے برابر ہوگا جو ف سے شروع ہو اور ق پر ختم ہو۔

فرض کرو کہ ف ع پ گ ق ایک شکستہ خط ہے جو ف اور ق کو ملاتا ہے خط و ا پر عمود ف م، ق ن، ع ر، پ چ اور گ ط نکالو۔

ف ع کا ظل م ر ہے اور مثبت ہے
ع پ کا ظل ر س ہے اور منفی ہے
پ گ کا ظل س ط ہے اور مثبت ہے
گ ق کا ظل ط ن ہے اور منفی ہے
شکستہ خط ف ع پ گ ق کے ظلوں کا مجموعہ

= م ر + ر س + س ط + ط ن

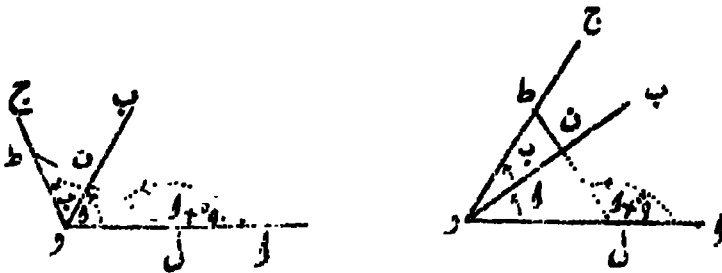
= م ر ـ س ر + س ط ـ ن ط

= م س + س ن = م ن

اسی قسم کا ثبوت تمام صورتوں پر حاوی ہوگا خواہ ف اور ق کہیں واقع ہوں اور شکستہ خط خواہ کتنے مختلف مستقیم خطوں کو ملانے سے بنا ہو۔

نتیجہ صریح۔ اگر کوئی شکستہ خط نقاط ف اور ق کو ملائے تو اس کے ظلوں کا مجموعہ اُن دو نقطوں کو ملانے والے کسی اور شکستہ خط کے ظلوں کے مجموعہ کے برابر ہوگا کیونکہ ہر ایک صورت میں مجموعہ مذکورہ مستقیم خط ف ق کے ظل کے برابر ہوگا۔

۲۵۹ — زاویوں کے مسائل جمع تفریق کے ثبوت (بطریق تحلیلی)

فرض کرو کہ ا و ب زاویہ ا سے اور ب و ج زاویہ ب سے تعبیر ہوتا ہے۔ زاویہ ا + ب کے احاطہ کرنے والے خط و ج پر کوئی نقطہ ط مقرر کرو اور و ب پر عمود ط ن نکالو اور اسکو اتنا خارج کرو کہ و ا کو نقطہ ل پر ملے۔

تب ∠ ا ل ط = ∠ ل ن و + ∠ ا و ب = ۹۰° + ا

(۱) ثابت کرنا مطلوب ہے جم (ا + ب) = جم ا جم ب − جب ا جب ب

و ط × جم (ا + ب) = و ط جم ا و ط

= و ط کا ظل خط و ا پر (دفعہ ۲۵۶)

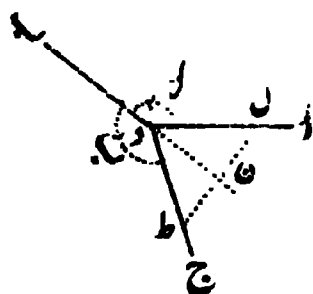
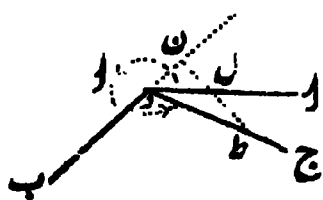
= و ن کا ظل و ا پر + ن ط کا ظل و ا پر (دفعہ ۸۸)

= و ن جم ا و ن + ن ط جم ا ل ط (دفعہ ۲۵۶)

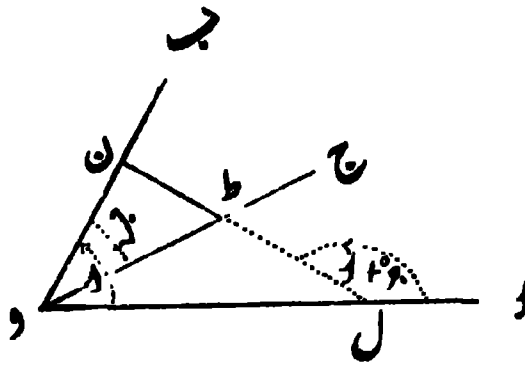
= و ط جم ب جم ا + و ط جب ب جم (۹۰° + ا)

= و ط (جم ا جم ب − جب ا جب ب) (دفعہ ۶۷)

و ط پر تقسیم کرنے سے نتیجہ (۱) حاصل ہوگا

۱) ثابت کرنا مطلوب ہے جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب
ط × جب (ا + ب) = و ط × جب ا و ط
: و ط کا ظل ایک ایسے خط پر جو و ا پر عمود ہو (دفعہ ۲۵۶)
: و ن اور ن ط کے ظلوں کا مجموعہ ایک ایسے خط پر
جو و ا پر عمود ہو (دفعہ ۲۵۸)
: و ن جب ا + ن ط جب ا ل ط (دفعہ ۲۵۶)
: و ط جم ب جب ا + و ط جب ب جب (۹۰° + ا) (دفعہ ۲۵۶)
: و ط [جب ا جم ب + جم ا جب ب] (دفعہ ۷۶)
جس سے نتیجہ (۲) حاصل ہوتا ہے

ن شکلوں سے ظاہر ہے کہ اوپر کا ثبوت ہر حالت
ں صحیح ہے خواہ احاطہ کرنیوالے خطوط و ب اور
ج کسی جگہ واقع ہوں ۔
۲۶ — زاویوں کے مسئلہ تفریق کی صورت میں
رض کرو کہ ا و ب زاویہ ا ہے اور ب د ج

زاویہ ب ہے جو منفی سمت میں مرتسم کیا گیا ہے یعنی ا و ج زاویہ ا ۔ ب کے برابر ہے، نیز و ج خط و ب سے ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جس کے پہلے اگر مناسب علامت لکھی جائے تو وہ ۔ ب کے برابر ہوتا ہے۔

زاویہ مجوزہ کے احاطہ کرنے والے خط و ج پر کوئی نقطہ ط لو اور و ب پر عمود ط ن نکالو اور اس کو اسقدر خارج کرو کہ وہ و ا کو نقطہ ل پر ملے۔

ثابت کرنا مطلوب ہے کہ جم (ا ۔ ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب

و ط جم (ا ۔ ب) = و ط جم ا و ج

= و ط کا ظِل و ا پر (دفعہ ۲۵۶)

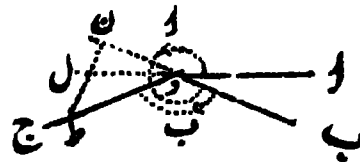
= و ن کا ظل و ا پر + ن ط کا ظل و ا پر (دفعہ ۲۵۸)

= و ن جم ا + ن ط جم (۹۰ + ا) (دفعہ ۲۵۶)

وطجم (-ب) جم ا + وطجب (-ب) جم (۹۰+ا) (دفعہ ۲۵۶)
وطجم ب جم ا + وط (-جب ب) (-جب ا) (دفعات ۴۸ و ۷۵)

وط [جم ا جم ب + جب ا جب ب]

ئے جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب
) ثابت کرنا مطلوب ہے جب (ا-ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب

ا جب (ا - ب) = وط × جب ا و ج
وط کا ظل ایک ایسے خط پر جو و ا پر عمود ہو (دفعہ ۲۵۶)
ون اور ن ط کے ظلوں کا مجموعہ ایک ایسے خط پر
جو و ز پر عمود ہو (دفعہ ۲۵۸)
ن جب ا + ن ط جب (۹۰ + ا) (دفعہ ۲۵۶)
وط جم (- ب) جب ا + وط جب (- ب) جب (۹۰ + ا)
(دفعہ ۲۵۶)
وط جم ب جب ا - وط جب ب جم ا (دفعات ۴۷ اور ۴۸)
جب (ا - ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب
ر یہ ثبوت ہر حالت میں درست ہیں خواہ احاطہ

ے خطوط و ب اور و ج کسی جگہ پر واقع ہوں۔

متفرق مثالیں

۱ — اگر ایک زاویہ عہ دو ایسے حصوں میں تقسیم کیا جائے جن کے مماسوں کی نسبت لہ ہو تو ثابت کرو کہ حصوں کا تفاوت لا مساوات جب لا $= \frac{\text{لہ}-۱}{\text{لہ}+۱}$ جب عہ سے حاصل ہوگا۔

۲ — اگر مس (π جم طہ) = مم (π جب طہ) تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم}\left(\text{طہ} - \frac{\pi}{۴}\right) = \pm \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

۳ — کسی مثلث ا ب ج میں ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{اَ}-\text{بَ}}{\text{جَ}} = \frac{\text{مس}\frac{\text{ا}}{۲} - \text{مس}\frac{\text{ب}}{۲}}{\text{مس}\frac{\text{ا}}{۲} + \text{مس}\frac{\text{ب}}{۲}}$$

اور

$$\frac{\text{اَ}-\text{بَ}}{\text{جَ}} = \frac{۱+\text{مس}\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{مس}\frac{\text{ب}}{۲}}{۱-\text{مس}\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{مس}\frac{\text{ب}}{۲}}$$

اس میں ا، ب، ج مثلث کے زاوئے ہیں اور اَ، بَ، جَ مثلث کے اضلاع ہیں۔

۴ — ایک ہوائی جہاز ۱۸۰ میل فی گھنٹہ کی مستقل رفتار سے زمین سے ایک مستقل بلندی پر مشرق کی طرف جارہا تھا۔ کسی خاص وقت ایک شخص نے اسکو ٹھیک اپنے شمال کیطرف دیکھا، اُس وقت اس کا زاویہ ارتفاع °۹ ′۳۰ تھا، اسکے ایک منٹ بعد اس نے جہاز کو ایسی سمت میں دیکھا جو شمال سے

برق کی طرف کو ۶۴° کا زاویہ بناتی تھی - جہاز کی بلندی
یافت کرو، نیز جہاز کا زاویہ ارتفاع اس وقت دریافت
، جب مشاہدہ کرنے والے نے اُس کو دوسرے مقام
، دیکھا -

— اگر ایک مثلث کے اضلاع ۵۱، ۳۵ اور ۲۶ فٹ ہوں
ایک ایسے مثلث کے اضلاع دریافت کرو جس کا قاعدہ
فٹ ہو اور جس کا رقبہ اور مجموعہ اضلاع وہی ہو جو
لے مثلث کا ہے -

— ثابت کرو کہ

$$\text{جب مم}^{-1}\text{ جم مس}^{-1}\text{ لا} = \sqrt{\frac{\text{لا}^2+1}{\text{لا}^2+2}}$$

— زاویہ طہ کو معاولات

جب (طہ + عہ) = ا ، جم^2 (طہ + یہ) = ب سے ساقط کرو

— ثابت کرو کہ خواہ زاویہ طہ کوئی قیمت اختیار کرے

، ا جب^2 طہ + ب جب طہ جم طہ + ج جم^2 طہ

$$\frac{\text{ا}+\text{ج}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\text{ب}^2+(\text{ا}-\text{ج})^2} \text{ اور } \frac{\text{ا}+\text{ج}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\text{ب}^2+(\text{ا}-\text{ج})^2}$$

، درمیان واقع ہوگا -

— اگر جب لا = ک جب (ا - لا)

تو ثابت کرو کہ مس (لا - $\frac{ا}{۲}$) = $\frac{ک - ۱}{ک + ۱}$ مس $\frac{ا}{۲}$
اور جدولوں کی مدد سے مساوات کو حل کرو جبکہ ک = ۳
اور ا = ۵۰°

۱۰- مس طہ + مس (طہ + $\frac{\pi}{۳}$) + مس (طہ + $\frac{۲\pi}{۳}$) کو
مس ۳ طہ کی رقوم میں بیان کرو
اسطرح سے یا کسی اور طرح سے مساوات ذیل کو حل کرو

مس طہ + مس (طہ + $\frac{\pi}{۳}$) + مس (طہ + $\frac{۲\pi}{۳}$) = ۳

۱۱- اگر کسی مثلث ا ب ج میں مس $\frac{ا}{۲}$، مس $\frac{ب}{۲}$ اور مس $\frac{ج}{۲}$
سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ جم ا، جم ب، جم ج
بھی سلسلہ حسابیہ میں ہوں گے

۱۲- ایک شخص نے سمندر کے کنارے کھڑے ہوکر
دو لنگروں کو ایک ہی سیدھ میں دیکھا، انکو ملانیوالا
خط کنارے سے زاویہ عہ بناتا تھا، جب وہ سمندر کے
کنارے فاصلہ ا چلا تو اُس نے دیکھا کہ لنگروں کے
محاذی اسکی آنکھ پر زاویہ عہ بنتا ہے، فاصلہ ب آگے
جانے پر اس نے دیکھا کہ دوبارہ اسکی آنکھ پر زاویہ عہ
بنتا ہے۔ثابت کرو کہ لنگروں کا درمیانی فاصلہ

(ا + $\frac{ب}{۲}$) قط عہ - $\frac{۲ ا (ا + ب)}{۲ ا + ب}$ جم عہ ہے -

اس سوال میں فرض کرو کہ کنارہ سیدھا ہے اور سطح
سمندر سے آنکھ کی اونچائی صفر ہے

ـــ ایک مثلث ا ب ج کے زاویوں کے منصف
ں کے بیرونی دائرہ کو نقاط د، ع، ف پر بالترتیب
کرتے ہیں، ثابت کرو کہ مثلث د ع ف کے رقبہ کو
ت ا ب ج کے رقبہ کے ساتھ س : ۲ ر ہے۔

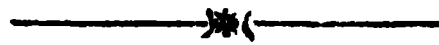
ـــ ایک منتظم مخمس کے متبادل زاویوں کو ملانے
ایک اور منتظم مخمس پیدا ہوتی ہے، ان کے رقبوں کی
ں نسبت دریافت کرو۔

ـــ اگر $\text{فہ} = \text{مس}^{-1}\dfrac{\text{لا}\sqrt{۳}}{\text{۲ک} - \text{لا}}$ اور $\text{طہ} = \text{مس}^{-1}\dfrac{\text{۲لا} - \text{ک}}{\text{ک}\sqrt{۳}}$ تو
ت کرو کہ فہ − طہ کی ایک قیمت °۳۰ ہے۔

ـــ اگر $\text{م}^{۲} + \text{مَ}^{۲} + \text{۲ م مَ جم طہ} = ۱$

$\text{ن}^{۲} + \text{نَ}^{۲} + \text{۲ ن نَ جم طہ} = ۱$

اور $\text{م ن} + \text{مَ نَ} + (\text{م نَ} + \text{مَ ن})\text{جم طہ} = ۰$

ت کرو کہ $\text{م}^{۲} + \text{ن}^{۲} = \text{قم}^{۲}\,\text{طہ}$

ـــ اگر لا کی قیمت حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ

$\dfrac{\text{لا}^{۲} - \text{۲لا جم عہ} + ۱}{\text{لا}^{۲} - \text{۲لا جم بہ} + ۱}$ بلحاظ مقدار کے $\dfrac{\text{جب}^{۲}\frac{\text{عہ}}{۲}}{\text{جب}^{۲}\frac{\text{بہ}}{۲}}$ اور $\dfrac{\text{جم}^{۲}\frac{\text{عہ}}{۲}}{\text{جم}^{۲}\frac{\text{بہ}}{۲}}$

کے درمیان واقع ہوگی ۔

۱۸ــ اگر ایک ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع کا مجموعۂ اضلاع ایک دائرہ کے محیط کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ دائرہ کے رقبہ کو کثیر الاضلاع کے رقبہ کے ساتھ نسبت مس $\frac{\pi}{ن}$: $\frac{\pi}{ن}$ کی ہے ۔

۱۹ــ اگر $\frac{\text{جب}(۲عہ - طہ)}{\text{جب طہ}}$ = ۱ + لا جہاں لا نہایت ہی قلیل ہے تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جب جم طہ}}{\text{جم عہ}}$ = ۱ + $\frac{۱}{۲}$ لا مس^۲ عہ تقریباً

۲۰ــ اگر ۲ صہ = عہ + بہ + جہ + لہ تو ثابت کرو کہ

جم (صہ - عہ) جم (صہ - بہ) جم (صہ - جہ) جم (صہ - لہ)

+ جب (صہ - عہ) جب (صہ - بہ) جب (صہ - جہ) جب (صہ - لہ)

= جم عہ جم بہ جم جہ جم لہ + جب عہ جب بہ جب جہ جب لہ

۲۱ــ معادلات ذیل کو مکمل طور پر حل کرو ۔

(۱) مس عہ مس (طہ - عہ) + مس بہ مس (طہ - بہ)

= مس $\frac{\text{عہ}+\text{بہ}}{۲}$ (مس عہ - مس بہ)

اور (۲) جب ۳ طہ = ۴ جب طہ جب ۲ طہ جب ۴ طہ

۲۲ــ ایک انکڑا (کرنیک) و ا طول میں ۲ فٹ، نقطہ و کے گرد گھوم سکتا ہے، ب کا رابط (سلاخ) ا ب ہے اور نقطہ ب ہمیشہ ایک ایسے خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے جو نقطہ و میں سے گذرتا ہے، اگر ا ب کا طول ۵ فٹ ہو اور نقطہ ب اپنے انتہائی مقام سے کل مسافت کا $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۲}$ اور $\frac{۳}{۴}$ واں حصہ طے کرچکا ہو تو ہر ایک صورت

میں جو زاوئے اکزا و ا خط و ب سے بنائے انکی قیمتیں دریافت کرو۔

۲۳— ایک ۲۰۰ فٹ بلند پہاڑ کی چوٹی سے دو جہاز سطح سمندر پر نظر پڑے، ایک کا زاویہ انخفاض ۹° ۱۰' تھا اور اسکی سمت، مشرق سے شمال کیطرف کو ۳۰° کا زاویہ بناتی تھی، دوسرے کا زاویہ انخفاض ۷° ۳۰' تھا اور اسکی سمت، مشرق سے جنوب کیطرف کو ۲۵° کا زاویہ بناتی تھی، جہازوں کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو، نیز یہ بھی معلوم کرو کہ اگر کسی ایک جہاز پر کھڑے ہوکر دوسرے جہاز کی طرف دیکھا جائے تو اسکی جہت کیا ہوگی

۲۴— ثابت کرو کہ ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز میں سے اور مثلث کے کسی دو جانبی دائروں کے مرکزوں میں سے جو دائرہ گزرتا ہے اس کا نصف قطر مثلث کے بیرونی دائرہ کے قطر کے برابر ہوتا ہے۔

۲۵— اگر مس $(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{م}}{2})$ = مس³ $(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{ل}}{2})$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب م} = \text{جب ل}\ \frac{3 + \text{جب}^2\text{ل}}{1 + 3\,\text{جب}^2\text{ل}}$$

۲۶— ثابت کرو کہ

جب ب جب ج جم² ع جب (ب − ج) + دو متشابہ جملے

= - جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

۲۷ــ پرکار کی ہر ایک شاخ ۷ انچ لمبی ہے اور دونو[ں]
شاخوں کے نقطہ مشترک سے ۴ انچ کے فاصلے پر پنسل [کی]
شاخ میں ایک جوڑ ہے، اگر پرکار کے ذریعہ ایک ۴ ا[نچ]
نصف قطر کا دائرہ کھینچا جائے اور دائرہ کھینچتے وقت
پنسلی شاخ کو جوڑ پر اسطرح ٹیڑھا کر دیا جائے کہ پنسل
کاغذ پر عمود وار ہو تو ثابت کرو کہ دونوں شاخوں [کے]
زوایا میلان سمت راس کے ساتھ تقریباً ۹° ۵ً اور
۲۵° ۳۰ً ہونگے -

۲۸ــ ایک مثلث متساوی الاضلاع کھیت میں ایک
برج ہے، مثلث کا ضلع ۸۰ فٹ ہے، برج کے محاذی کھی[ت]
کے تینوں کونوں پر جو زاوے بنتے ہیں ان کے مما[س]
بالترتیب $\sqrt{3}+1$ ، $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{2}$ ہیں، برج کی بلندی د[ریافت]
کرو -

۲۹ــ دو دائروں کے نصف قطر بالترتیب ر١ اور [ر٢]
ہیں اور وہ ایک دوسرے کو زاویہ عہ پہ قطع کرتے [ہیں]
ثابت کرو کہ دائروں کا مشترک رقبہ

$$(ر_1^2 - ر_2^2)\ مس^{-1} \frac{ر_2 \ جب\ عہ}{ر_1 + ر_2\ جم\ عہ} + ر_2^2\ عہ - ر_1 ر_2\ جب\ عہ$$

۳۰ــ جملات ذیل کی قیمتیں دریافت کرو -

$$مس^{-1} \frac{\sqrt{1+ا^2} - 1}{ا}$$ اور

مس (½ جب⁻¹ ۲لا/(۱ + لا²) + ½ جم⁻¹ (۱ − لا²)/(۱ + لا²))

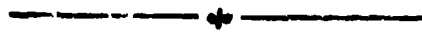
۳۱— عہ اور بہ کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

جب عہ + جب بہ = ل

جم عہ + جم بہ = م

اور مس عہ/۲ مس بہ/۲ = ن

۳۲— عمل ترسیمی سے دریافت کروکہ مساوات

ج² مس لا = ۱ کی کتنی قیمتیں ۰ اور ۲π کے درمیان واقع ہوتی ہیں ؟

۳۳— ثابت کروکہ

جم ۲عہ = ۲جب² بہ + ۴جم (عہ + بہ) جب عہ جب بہ + جم ۲(عہ + بہ)

۳۴— ثابت کروکہ جب π/۱۴ جب ۳π/۱۴ جب ۵π/۱۴ = ۱/۸

۳۵— معادلات ذیل کو حل کرو۔

√۳ جب ۲ا = جب ۲ب

√۳ جب² ا + جب² ب = ½ (√۳ − ۱)

۳۶— اگر کسی مثلث کے زاویوں کے ماس سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کروکہ ضلعوں کے مربعوں کی باہمی نسبتیں لا² (لا² + ۹) : (۳ + لا²)² : ۹ (۱ + لا²) ہیں

جہاں لا بڑے سے بڑا یا چھوٹے سے چھوٹا مماس ہے۔

۴۷— ایک خط مستقیم پر تین نقاط ا، ب، ج ایک ہی سطح افقی میں ہیں، اب = ۱۰۰ گز اور ب ج = ۱۵۰ گز، ایک غبارہ کے ارتفاعی زاوئے نقاط ا، ب، ج سے ایک ہی وقت میں عہ، بہ، جہ دیکھے گئے ہیں، ثابت کرو کہ غبارہ کی بلندی (ب) گزوں میں مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہے

ب۲(۳مم۲ عہ + ۲مم۲ جہ — ۵مم۲ بہ) = ۷۵۰۰۰

۴۸— اگر کسی مثلث کے نقاط راس سے عمود ف، ق، ر ایک ایسے خط مستقیم پر کھینچے جائیں جو مثلث کے اضلاع محدودہ کو د، ع، پ پر ملے تو ثابت کرو کہ

ا۲(ف-ق)(ف-ر) + ب۲(ق-ر)(ق-ف) + ج۲(ر-ف)(ر-ق)
= ۴ ∆۲ جہاں ∆ مثلث کا رقبہ ہے

نیز ثابت کرو کہ ع پ = $\frac{۲ ف ∆}{(ف-ق)(ف-ر)}$

۴۹— ایک ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع کے ضلع کا طول ۲ل ہے اور کثیر الاضلاع کا رقبہ ا ہے، اگر اسکے اندر بنے ہوئے اور گرد بنے ہوئے دائروں کے رقبے بالترتیب ا۱ اور ا۲ ہوں تو ثابت کرو کہ

ا۲ - ا۱ = π ل۲ اور ن ل۲ ا۲ = π ا۲

۴۰۔ ایک مثلث کے اضلاع ۳۱، ۵۶، ۶۴ ہیں، ثابت کرو کہ اس کے ایک زاویہ اور زاویہ قائمہ کا فرق ایک دقیقہ سے کم ہے۔

۴۱۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{۱ + جب ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{جم ب}}{\text{۱ − جب ب}} = \frac{\text{۲ جب ا − ۲ جب ب}}{\text{جب (ا − ب) + جم ا − جم ب}}$$

۴۲۔ ثابت کرو کہ

$$(\text{۱ + قط ۲ ط})(\text{۱ + قط ۴ ط})(\text{۱ + قط ۸ ط}) \cdots\cdots (\text{۱ + قط } ۲^{\text{ن}} \text{ ط})$$
$$= \text{مس } ۲^{\text{ن}} \text{ ط} \times \text{مم ط}$$

۴۳۔ اگر ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہوں اور اس کے سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے زاویہ کا فرق عہ ہو تو ثابت کرو کہ اضلاع کی باہمی نسبتیں ۱ − لا : ۱ : ۱ + لا ہیں جہاں $\text{لا} = \sqrt{\frac{\text{۱ − جم عہ}}{\text{۷ − جم عہ}}}$

۴۴۔ ایک گول جھیل ا ب ج د کے کنارے پر ایک برج ہے، برج کا پائیں د ہے اور نقاط ا، ب، ج سے اس کی چوٹی کے ارتفاعی زاویے عہ، یہ، جہ مشاہدہ کئے گئے ہیں، اگر زاویوں ب ا ج اور ا ج ب میں سے ہر ایک ط کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ

۲ جم طہ مم بہ = مم عہ + مم جہ

۴۵ — ایک مثلث ا ب ج کے زاویوں کے داخلی منصف اضلاع کو نقاط د، ع، ف پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ مثلث د ع ف کا رقبہ

(۲ △ اَ بَ جَ) / ((بَ + جَ)(جَ + اَ)(اَ + بَ)) ہے

۴۶ — اگر جم$^{-1}$ لا + جم$^{-1}$ ما + جم$^{-1}$ ی = π تو ثابت کرو کہ

لا^{2} + ما^{2} + ی^{2} + ۲ لا ما ی = ۱

۴۷ — زاویہ طہ کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

لہ جم ۲ طہ = جم (طہ + عہ)

اور لہ جب ۲ طہ = ۲ جب (طہ + عہ)

۴۸ — ایک دائرہ کا قطر ۶ انچ ہے، اسکی ایک قوس اور قوس کے وتر کا مجموعہ ۸ انچ ہے، قوس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ بنے اس کے دریافت کرنے کے لئے ایک مساوات مرتب کرو اور مساوات کو ترسیمی عمل سے حل کرو۔

——— ※ ———

۴۹ — مختصر کرو

{ جم(عہ + بہ) / جم(عہ − بہ) − جم(عہ + جہ) / جم(عہ − جہ) }^{2} + [جب(عہ + بہ) / جم(عہ − بہ) − جب(عہ + جہ) / جم(عہ − جہ)]^{2}

۵۰ — ثابت کرو کہ

جب^2 ۱۲° + جب^2 ۲۱° + جب^2 ۳۹° + جب^2 ۴۸° = ۱ + جب^2 ۹° + جب^2 ۱۸°

۵۱ — ایک مثلث کے اضلاع اَ، بَ، جَ ہیں اس مثلث کے اندر ایک متشابہ مثلث بنایا گیا ہے جس کے اضلاع م اَ، م بَ، م جَ ہیں، اگر اضلاع اَ اور م اَ کا درمیانی زاویہ طہ ہو تو ثابت کرو کہ ۲ م جم طہ = ۱

۵۲ — ایک پہاڑ کی چوٹی کا دو مقامات ا اور ب سے جو ایک ہی سطح اُفق میں واقع ہیں مشاہدہ کیا گیا ہے، مقام ا پہاڑی کے ٹھیک جنوب میں ہے اور ا سے مقام ب کی سمت، شمال مشرق ہے، اگر مقامات ا اور ب سے چوٹی کے ارتفاعی زاوئے ۹° ۳۰' اور ۷° ۳۰' ہوں تو پہاڑی سے مقام ب کی قطبی جہت دریافت کرو۔

۵۳ — ایک مثلث ا ب ج کے بیرونی دائرہ کا مرکز د ہے، دائرہ کے نقاط ب اور ج پر کے مماس نقطہ لِ پر ملتے ہیں، اگر زاویہ د ا لِ، طہ کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ

۲ مس طہ = مم ب ∼ مم ج

۵۴ — ہندسی عمل سے جم($\frac{۱}{۴}$ جب$^{-۱}$ ا) کی قیمتوں کی تعداد دریافت کرو، نیز ثابت کرو کہ ان کا حاصل ضرب $-\frac{۱}{۱۶}$(۱ − ا^2) ہے

۵۵ — ثابت کرو کہ جملہ $\frac{\text{مس (لا + عہ)}}{\text{مس (لا − عہ)}}$ کی قیمت

مس۲ $(\frac{\pi}{۴} - عہ)$ اور مس۲ $(\frac{\pi}{۴} + عہ)$ کے درمیان نہیں واقع ہوسکتی۔

۵۶— ثابت کرو کہ

جم۴ طہ + جم۴ $(طہ + \frac{\pi}{ن})$ + جم۴ $(طہ + \frac{۲\pi}{ن})$ + ... ن رقموں تک $= \frac{۳ن}{۸}$

۵۷— اگر {جب (عہ − بہ) + جم (عہ + ۲بہ) جب بہ}۲ = ۴ جم عہ جب بہ جب (عہ + بہ)

تو ثابت کرو کہ مس عہ = مس بہ $\left\{\frac{۱}{(۲^{\frac{۱}{۲}} \text{جم بہ} - ۱)^{۲}} - ۱\right\}$ اس میں عہ اور بہ میں سے ہر ایک زاویہ قائمہ سے کم ہے۔

۵۸— لا کی وہ سب قیمتیں دریافت کرو جو مساوات ذیل کو پورا کریں

مس(لا+بہ) مس(لا+جہ) + مس(لا+جہ) مس(لا+عہ) + مس(لا+عہ) مس(لا+بہ) =

۵۹— مثلث ا ب ج میں زاویہ ا سے ضلع ب ج پر جو عمود نکالا جائے اس کا پایئں د ہے، اگر ب ج = ۱۱۷ فٹ، ∠ ب = ۳۴° ۴۱′ اور ∠ ج = ۴۱° ۲۷′ تو ا د کا طول دریافت کرو

۶۰— ایک بنیادی خط پر تین نقاط ا، ب، ج سے ایک

پہاڑ کی چوٹی کے زوایا ارتفاع بالترتیب عہ، بہ، جہ مشاہدہ کئے گئے ہیں، ثابت کرو کہ پہاڑ کی بلندی

(- اب × ب ج × ج ا)^{۲} [ب ج مم^{۲} عہ + ج ا مم^{۲} بہ + اب مم^{۲} جہ]$^{-\frac{۱}{۲}}$ ہے، اس جملہ میں خطوں کے رخوں کی علامات کو ملحوظ رکھا گیا ہے۔

۶۱— اگر مثلث اب ج کے زاویہ ج کا منصّف ضلع اب کو د پر اور بیرونی دائرہ کو ع پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ

ج ع : د ع = (وَ + بَ)^{۲} : جَ^{۲}

جہاں وَ، بَ، جَ مثلث کے ضلعوں کے طول ہیں

۶۲— طہ کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

ا مس طہ + ب مم ۲ طہ = ج

اور ا مم طہ - ب مس ۲ طہ = ج

۶۳— عمل ترسیمی سے صحیح طور پر نصف درجہ تک مساوات مم لا = جم ۲ لا کی تقریبی قیمت دریافت کرو

۶۴— ایک شخص ایک ٹینس کورٹ کے قائم الزاویہ کونوں کو بنانے میں تین رسیاں استعمال کرتا ہے، انکے طول بالترتیب ۳ گز، ۴ گز، ۴ گز ۲ فٹ ۱۰ انچ ہیں، کورٹ کے زاویوں کی پیمائش میں جو غلطیاں اسطرح واقع ہوتی ہیں ان کی مقداریں دریافت کرو۔

۶۵ــ اگر ن^۲ جب^۲ (عہ + بہ) = جب^۲ عہ + جب^۲ بہ - ۲ جب عہ جب بہ جم (عہ - بہ)

تو ثابت کرو کہ مس عہ = $\frac{ن \pm ۱}{ن \mp ۱}$ مس بہ .

۶۶ــ اگر جملہ $\frac{\text{ا جم (طہ + عہ) + ب جب (طہ + بہ)}}{\text{ا جب (طہ + عہ) + ب جم (طہ + بہ)}}$ کی قیمت

طہ کی تمام قیمتوں کے لئے ہمیشہ مستقل رہے تو ثابت کرو کہ

ا^۲ - ب ب^۲ = (ا ب - ا ب^۲) جب (عہ - بہ)

۶۷ــ ثابت کرو کہ طہ کی وہ قیمتیں جو شرائط مساوات

جب ۲ طہ جم^۲ (عہ - بہ) - جب ۲ عہ جم^۲ (بہ + طہ) - جب ۲ بہ جب^۲ (عہ + طہ) = ۰

کو پورا کرتی ہیں جملات (۲ن + ۱) $\frac{\pi}{۲}$ - بہ اور ن π + عہ میں

شامل ہیں جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے -

۶۸ــ مثلث ا ب ج کے وسطانیات ایک دوسرے

سے زاوئے عہ ، بہ ، جہ بناتے ہیں ثابت کرو کہ

ئم عہ + ئم بہ + ئم جہ + ئم ا + ئم ب + ئم ج = ۰

۶۹ــ ایک دریا کے کنارے دو مقامات کا باہمی فاصلہ

۲ ا ہے ، مقابل کے کنارے پر ایک برج ہے اور ہر دو

مقامات سے برج کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع عہ ہے ، ان مقامات

کے عین وسط میں ایک مقام ہے اگر اس پر کھڑے ہوکر

دیکھا جائے تو چوٹی کا زاویہ ارتفاع بہ دکھائی دیتا ہے ،

برج کی بلندی اور دریا کا عرض ا ، عہ ، بہ کی رقوم میں

دریافت کرو -

اگر ا = ۱۰۰ گز، عہ = ۲۲ ½ اور بہ = ۳۰ تو ثابت کرو کہ برج کی بلندی ۱۵۰ ۲ گز ہے۔

۷۰ — اگر ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے نقاط تماس اضلاع ب ج، ج ا، اب کے ساتھ بالترتیب د، ع، ف ہوں اور اگر اد، ب ع، ج ف کے مربعے سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو مثلث کے اضلاع سلسلہ موسیقیہ میں ہونگے۔

۷۱ — ایک مثلث متساوی الا ضلاع اور ایک منتظم مسبع دونوں ایک دائرہ کے اندر بنائے گئے ہیں ثابت کرو کہ اگر مثلث کے نصف ضلع کے طول سے مسبع کے ایک ضلع کے طول کو نفی کردیں تو حاصل دائرہ کے نصف قطر کے $\frac{1}{500}$ ویں حصہ سے کم ہوگا۔

۷۲ — ثابت کرو کہ مقدار جم طہ { جب طہ + √(جب² طہ + جب² عہ) } کی قیمت √(۱ + جب² عہ) اور − √(۱ + جب² عہ) کے درمیان واقع ہوتی ہے

---

۷۳ — ۸ جب عہ جب بہ جب جہ جب لہ کو آٹھ جیوب التمام کے سلسلے میں بیان کرو

۷۴ — اگر جب² فہ = $\frac{\text{جم ۲ عہ جم ۲ بہ}}{\text{جم}^2 (\text{عہ} + \text{بہ})}$ تو ثابت کرو

کہ مس² $\frac{\text{فہ}}{2}$ = $\frac{\text{مس}(\frac{\pi}{4} \pm \text{عہ})}{\text{مس}(\frac{\pi}{4} \pm \text{بہ})}$

۷۵ـ ایک مثلث کا قاعدہ ءَ، مقابل کا زاویہ ا اور باقی دو اضلاع کا حاصل ضرب ک۲ دیا ہوا ہے، مثلث کو حل کرو اور ثابت کرو کہ ان اجزاء سے کوئی مثلث نہیں بن سکتا اگر اَ > ۲ک جب $\frac{ا}{۲}$

۷۶ـ پہاڑ کی ایک جانب میں دو نقاط ف اور ق ہیں، سطح افقی کے ایک نقطہ و سے ان نقاط کے ارتفاعی زاویئے ۳۸° اور ۲۵° مشاہدہ کیئے گئے ہیں، پہاڑ کے پائیں ا کا فاصلہ و سے ۵۰۰ گز ہے اور طول اق = ۳۲۰ گز، تمام شکل سطح عمودی میں واقع ہے، ثابت کرو کہ فاصلہ ف ق تقریباً ۳۲۹ گز ہے، پہاڑ کی سلامی (ڈھلان) دریافت کرو۔

۷۷ـ مثلث اب ج کے جانبی دائروں کے مرکز ے۱، ے۲، ے۳ ہیں اور مثلثات ب ے۱ ج، ج ے۲ ا اور ا ے۳ ب کے اندرونی دائروں کے نصف قطر صم۱، صم۲، صم۳ ہیں ثابت کرو کہ

صم۱ : صم۲ : صم۳ = جب $\frac{ا}{۲}$: جب $\frac{ب}{۲}$: جب $\frac{ج}{۲}$

۷۸ـ دو دائروں کے نصف قطروں کا مجموعہ ا ہے، دائرے ایک سطح افقی میں اس طرح رکھے گئے ہیں کہ ان کے مرکزوں کا باہمی فاصلہ ۲ ا ہے، اگر رسی کے ایک حلقہ کو کس کر دائروں کے گرد اس طرح لپیٹ دیا جائے کہ وہ دائروں کے درمیان آٹھ کی شکل میں

...ڑی گذرے تو ثابت کرو کہ رسی کا طول (۲√۳ + ۴π/۳) ا
ہے۔

۷... ـــ ثابت کرو کہ

مس⁻¹ [(√(لا² + ا²) − لا + ب) / √(ا² − ب²)] + مس⁻¹ [لا √(ا² − ب²) / (ب √(لا² + ا²) + ا² + ...)]

مس⁻¹ [√(ا² − ب²) / ب] = ن π ۔

۸ـــ معلوم ہے کہ لا کی تقریبی قیمت ۔ ۵۴ء۲ شرائط
...ساوات ۳ جب لا = ۲لا + ۳ کو پورا کرتی ہے، اس سے
...زدیک تر تقرب دریافت کرو [فرض کرو کہ ۵۴ء۲
...م قطری زاویے = ۱۴۰° ۲۲′ ۳۰″]

———*———

۸ـــ ثابت کرو کہ
...ب ا = جب (۳۶° + ا) ـ جب (۳۶° ـ ا) ـ جب (۷۲° + ا) + جب (۷۲° ـ ا)

۸ـــ معادلات ذیل کا مکمل حل دریافت کرو

مس ۳ ط + مس ۳ فہ = ۲

اور مس ط + مس فہ = ۴

۸۲ـــ اگر کسی مثلث ا ب ج میں
جب³ ط = جب (ا ـ ط) جب (ب ـ ط) جب (ج ـ ط)

تو ثابت کرو کہ مم $\text{ط} =$ مم $\text{ا} +$ مم $\text{ب} +$ مم ج

۸۴۔ ایک جہاز ۱۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک بندرگاہ ا کی طرف جارہا تھا، مقام ب سے جو ا کے ٹھیک مغرب کی طرف دس میل کے فاصلہ پر تھا جہاز کی جہت مشاہدہ کی گئی اور وہ مشرق سے شمال کی جانب میں ۲۴° کا زاویہ بناتی تھی، $\frac{۳}{۴}$ گھنٹہ کے بعد جہاز بندرگاہ میں پہنچ گیا، اول مشاہدہ کے وقت جہاز کا فاصلہ مقام ب سے دریافت کرو۔

۸۵۔ ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج کے جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے جو مثلث بنتا ہے اُس کے اندرونی دائرہ کا نصف قطر $\frac{۴\,\text{س}\ \text{جم}\frac{\text{ا}}{۲}\ \text{جم}\frac{\text{ب}}{۲}\ \text{جم}\frac{\text{ج}}{۲}}{\text{جم}\frac{\text{ا}}{۲}+\text{جم}\frac{\text{ب}}{۲}+\text{جم}\frac{\text{ج}}{۲}}$ ہے۔

۸۶۔ ایک ن اضلاع کی کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہے اور اس کے اضلاع کے محاذی مرکز پر زاویے ۲ عہ، ۴ عہ، ۶ عہ، .... ۲ ن عہ بنتے ہیں، ثابت کرو کہ اسکے رقبے کو نسبت ایک ایسی ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع کے رقبہ کے ساتھ جو اسی دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہو جب ن عہ : ن جب عہ ہے

۸۷۔ مساوات

$$\text{مم}^{-1}\frac{\text{ا}}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲-\text{ا}^۲}} = ۲\,\text{مس}^{-1}\sqrt{\frac{۳-۴\,\text{لا}^۲}{۴\,\text{لا}^۲}} - \text{مس}^{-1}\sqrt{\frac{۳-۴\,\text{لا}^۲}{\text{لا}^۲}}$$

کو لا اور ما کی منطق صحیح مساوات کی شکل میں بیان کرو۔

۸۸۔ اگر $لا_۱$ ، $لا_۲$ ، $لا_۳$ ، $لا_۴$ مساوات

$لا^۴ - لا^۳$ جب ۲ به + $لا^۲$ جم ۲ به - لا جم به - جب به = ۰

کی قیمتیں ہوں تو ثابت کرو کہ

$مس^{-۱} لا_۱ + مس^{-۱} لا_۲ + مس^{-۱} لا_۳ + مس^{-۱} لا_۴ = ن \pi + \frac{\pi}{۲} - به$

جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے۔

۸۹۔ اگر $\frac{\text{جب (طہ - بہ) جم عہ}}{\text{جب (فہ - عہ) جم بہ}} + \frac{\text{جم (عہ + طہ) جب بہ}}{\text{جم (فہ - بہ) جب عہ}} = ۰$

اور $\frac{\text{مس طہ مس عہ}}{\text{مس فہ مس بہ}} + \frac{\text{جم (عہ - بہ)}}{\text{جم (عہ + بہ)}} = ۰$

تو ثابت کرو کہ مس طہ = $\frac{۱}{۲}$(مس بہ + مم عہ) اور مس فہ = $\frac{۱}{۲}$(مس عہ - مم بہ)

۹۰۔ اگر جم ۳ لا = $-\frac{۳}{۸}\sqrt{۱۶}$ تو ثابت کرو کہ

جم لا کی تین قیمتیں $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶}$ جب $\frac{\pi}{۱۰}$ ، $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶}$ جب $\frac{\pi}{۹}$

اور $-\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶}$ جب $\frac{۳\pi}{۱۰}$ ہیں۔

۹۱۔ ایک مثلث کا قاعدہ ا اور اضلاع کی نسبت

ب (> ۱) دی ہوئی ہے ثابت کرو کہ مثلث کا ارتفاع

ف مقدار $\frac{\text{اب}}{\text{۱-ب}^۲}$ سے زیادہ نہیں ہو سکتا اور اگر

ف کی یہ قیمت ہو تو مثلث کے زاویۂ راس کی قیمت

$\frac{\pi}{۲} - ۲ مس^{-۱}$ ب ہوگی۔

۹۲۔ ایک ریلوے لائن کی گولائی کی شکل ربع دائرہ کی ہے

اور اس کے دونوں سروں پر اور باقی محیط کے برابر برابر فاصلوں پر تار برقی کے کھمبے لگے ہوئے ہیں اور اسکی تعداد ن ہے، احاطہ کرنیوالے نصف قطر ممدودہ پر ایک شخص کھڑا ہوکر نزدیک کے سرے سے ف ویں اور ق ویں کھمبوں کو ایک خط مستقیم میں دیکھتا ہے ثابت کرو کہ گولائی کا نصف قطر ½ جم(ف + ق) فہ قم ف فہ قم ق فہ ہے جہاں فہ = π / ۴(ن − ۱)، اس میں ا نزدیک کے سرے سے اس شخص کے فاصلہ کو تعبیر کرتا ہے۔

۹۳ — ثابت کرو کہ مثلث کے تین جانبی دائروں کے نصف قطر مساوات ذیل کی قیمتوں کے برابر ہیں

لا³ − لا² (۴م + ر) + لا ن² − ر ن² = ۰

اس میں ن نصف مجموعۂ اضلاع کو تعبیر کرتا ہے۔

۹۴ — لا اور ما کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

جم لا + جم ما = ا

جم ۲لا + جم ۲ما = ب

اور جم ۳لا + جم ۳ما = ج

حاصل اسقاط کو منطق شکل میں بیان کرو۔

۹۵ — سلسلہ ذیل کو ن رقموں تک جمع کرو

جب طہ جب ۲طہ جب ۳طہ + جب ۲طہ جب ۳طہ جب ۴طہ + جب ۳فہ جب ۴طہ جب ۵طہ + ……

۹۶ — ایک دائرہ کا نصف قطر ۵ انچ ہے اور اس کے

ایک قطعہ کا رقبہ ۲۵ مربع انچ ہے، قطعہ کی قوس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ بنتا ہے اس کو عمل ترسیمی سے دریافت کرو۔

---

۹۷ — ثابت کرو کہ ۴ جب ۲۷° = (۵ + √۵)^½ − (۳ − √۵)^½

۹۸ — اگر جم (بہ − جہ) + جم (جہ − عہ) + جم (عہ − بہ) + ۱ = ۰ تو ثابت کرو کہ بہ − جہ، جہ − عہ یا عہ − بہ، π کے کسی ضعف کے برابر ہے۔

۹۹ — کسی مثلث کے زاویوں کی جیوب کا حاصل ضرب ف ہے اور جیوب التمام کا حاصل ضرب ق ہے، ثابت کرو کہ زاویوں کے مماس مساوات ذیل کی قیمتیں ہیں

ق لا³ − ف لا² + (۱ + ق) لا − ف = ۰

اگر ف = ¼ (۳ + √۳) اور ق = ¼ (√۳ − ۱) تو ثابت کرو کہ مثلث کے زاویے ۴۵°، ۶۰° اور ۷۵° ہیں۔

۱۰۰ — ایک خاص مقام سے جہاز کی مختلف جہات کا مشاہدہ کیا گیا، کسی خاص وقت جہاز، سمت شمال سے مغرب کی طرف کو زاویہ عہ بناتا تھا، اس کے دس منٹ بعد وہ ٹھیک شمال کی جانب میں تھا، اور اس کے دس منٹ بعد جہاز کی سمت، جانب شمال

سے مشرق کی طرف کو زاویہ ع۱ بناتی تھی، اگر فرض کر لیا جائے کہ اس اثنا میں جہاز کی رفتار اور سمت حرکت میں کچھ فرق نہیں آتا تو ثابت کرو کہ اس کی سمت حرکت جانب شمال سے مشرق کی طرف کو زاویہ طہ بناتی ہے جہاں مس طہ = ۲ جب ع۱ جب ع۲ / جب (ع۱ − ع۲)

۱۰۱ــ سطح ہموار پر ایک پہاڑی ہے اور اُس کی بیرونی شکل قطعہ کرہ کی سی ہے، سطح ہموار پر پہاڑی کا ڈھال ع ہے اور پائیں پہاڑ سے ا فٹ کے فاصلے پر ایک مقام ہے جس سے پہاڑ کے سب سے اونچے نقطہ کا (جو دکھائی دیتا ہے) زاویہ ارتفاع ب مشاہدہ کیا گیا ہے ثابت کرو کہ پہاڑ کی بلندی میدان کوہ سے ا جب ب جب^۲ ع/۲ / جب^۲ (ع − ب)/۲ ہے

۱۰۲ــ اگر مثلث اب ج میں نقاط الزوایا ا، ب، ج سے مقابل کے اضلاع پر عمود لگائے جائیں اور ان کے پائین بالترتیب د، ع، ف ہوں اور مثلثات د ع ف، ا ع ف، ب ف د اور ج د ع کے اندرونی دائروں کے نصف قطر صہ، صہ۱، صہ۲، صہ۳ ہوں تو ثابت کرو کہ ر^۲ صہ = ۲ ر صہ۱ صہ۲ صہ۳

۱۰۳ــ ایک گول کھیت کا مرکز و ہے اور اس کے محیط پر کوئی نقطہ ا ہے، ایک رسی کے ذریعہ ایک گھوڑا

نقطہ ا سے مربوط ہے اور کھیت کے $\frac{1}{ن}$ حصہ پر گھاس چر سکتا ہے، اگر محیط کا بعید ترین نقطہ جس تک گھوڑا پہنچ سکتا ہے ب ہو اور ∠ ا و ب = طہ تو ثابت کرو

$$\text{جب طہ} + (\pi - \text{طہ}) \text{ جم طہ} = \left(1 - \frac{1}{ن}\right)\pi$$

۱۰۴— مساوات ذیل کو حل کرو

$$\text{طہ} = \text{مس}^{-1}(\tfrac{1}{2}\text{مس ۲ طہ}) - \tfrac{1}{2}\text{جب}^{-1}\frac{\text{۳ جب ۲ طہ}}{5 + \text{۴ جم ۲ طہ}}$$

۱۰۵— اگر $\text{جم}^2 \text{طہ} = \frac{م^2 - 1}{3}$ اور $\text{مس}^3 \frac{\text{طہ}}{2} = \text{مس عہ}$

تو ثابت کرو کہ $\text{جم}^{\frac{2}{3}}\text{عہ} + \text{جب}^{\frac{2}{3}}\text{عہ} = \left(\frac{2}{م}\right)^{\frac{2}{3}}$

۱۰۶— ایک شخص سطح اُفقی پر کسی خاص سمت میں فاصلہ ا چلتا ہے، اور اس کے بعد ایک اور سمت میں جو سمت سابقہ سے زاویہ عہ بناتی ہے فاصلہ ا جاتا ہے، ثابت کرو کہ ایک ہی رخ میں ن دفعہ ایسا کرنیکے بعد وہ اپنے نقطہ ابتدائی سے $\frac{\text{ا جب}\frac{ن\,\text{عہ}}{2}}{\text{جب}\frac{\text{عہ}}{2}}$ فاصلہ پر ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ جس خط سے یہ فاصلہ تعبیر ہوتا ہے وہ اس کی اصلی یا ابتدائی سمت سے زاویہ $(ن - 1)\frac{\text{عہ}}{2}$ بناتا ہے

۱۰۷— ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مس}(\text{جہ}-\text{لہ})}{\text{مس}(\text{عہ}-\text{بہ})} + \frac{\text{مس}(\text{لہ}-\text{بہ})}{\text{مس}(\text{عہ}-\text{جہ})} + \frac{\text{مس}(\text{بہ}-\text{جہ})}{\text{مس}(\text{عہ}-\text{لہ})} = \frac{\text{مس}(\text{بہ}-\text{جہ})\,\text{مس}(\text{جہ}-\text{لہ})\,\text{مس}(\text{لہ}-\text{بہ})}{\text{مس}(\text{عہ}-\text{بہ})\,\text{مس}(\text{عہ}-\text{جہ})\,\text{مس}(\text{عہ}-\text{لہ})}$$

۱۰۸ــ ایک شہاب ثاقب دو مقامات ا اور ب کے عین اوپر سے ایک خط مستقیم میں گزرتا ہے، مقامات سطح افقی میں ایک دوسرے سے ۱۰۰۰ فٹ کے فاصلہ پر واقع ہیں، جب وہ ا کے اوپر ہو تو نقطہ ب سے اس کا ارتفاع ۵۰° ہوتا ہے اور جب ب کے اوپر ہو تو نقطہ ا، سے اس کا ارتفاع ۴۰° ہوتا ہے نقطہ ا سے اُس مقام کا فاصلہ قریب ترین فٹ تک دریافت کرو جہاں وہ سطح افقی پر جاکے گریگا۔

۱۰۹ــ ایک پہاڑ کے رُخ کا میلان سطح افقی کے ساتھ ط ہے، پہاڑ کے پائیں پر دو نقاط ہیں جن سے دو سیدھے راستے دو عمودی سطحوں میں اوپر جاتے ہیں اور ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں، اگر دو شخص ان راستوں سے اوپر چڑھنا شروع کریں اور پائیں پہاڑ سے ا اور ب فٹ کے فاصلوں پر ایک دوسرے کو ملیں تو ثابت کرو کہ اُس وقت انکی عمودی بلندی (ف) سطح افقی سے، مساوات درجہ دوم

(۲ ــ جب^2 ط) ف^4 ــ (ا^2 + ب^2) ف^2 + ا^2 ب^2 جب^2 ط = ۰

کی چھوٹی قیمت کے برابر ہے ۔

۱۱۰ــ اگر مساوات مس (ط + $\frac{\pi}{4}$) = ۳ مس ۳ ط کی قیمتیں ھ، ب، جہ، لہ ہوں جن میں سے کسی دو کے مماس برابر نہوں تو ثابت کرو کہ

مس عہ + مس بہ + مس جہ + مس لہ = ۰

۱۱۱ـــ اگر مساوات جب (طہ + عہ) = ک جب ۲ طہ کی قیمتیں طہ، طہ، طہ، طہ ہوں جن میں سے کسی دو کا تفاوت π۲ یا π۲ کے کسی ضعف کے برابر نہ ہو تو ثابت کرو کہ

طہ + طہ + طہ + طہ = (۲ن + ۱) π

۱۱۲ـــ مسائل دفعہ ۲۴۹ کو تحلیلی عمل سے ثابت کرو

۱۱۳ـــ متماثلات ذیل کو ثابت کرو

(۱) جب عہ + جب بہ + جب جہ − جب (عہ + بہ + جہ)

$$= ۴ \text{ جب } \frac{بہ + جہ}{۲} \text{ جب } \frac{جہ + عہ}{۲} \text{ جب } \frac{عہ + بہ}{۲}$$

(۲) جم۲ عہ جب ۲ (بہ − جہ) + جم۲ بہ جب ۲ (جہ − عہ) + جم۲ جہ جب ۲ (عہ − بہ)

+ ۲ جب (بہ − جہ) جب (جہ − عہ) جب (عہ − بہ) = ۰

۱۱۴ـــ ثابت کرو کہ مساوات قط طہ + قم طہ = ج کی دو قیمتیں ۰ اور π۲ کے درمیان واقع ہیں اگر ج۲ < ۸ اور چار قیمتیں اگر ج۲ > ۸

۱۱۵ـــ اگر مثلث ا ب ج کے زاویوں کے خارجی منصفوں کے تقاطع سے مثلث ا۱ ب۱ ج۱ بنے اور مثلث ا۱ ب۱ ج۱ کے خارجی منصفوں کے تقاطع سے مثلث ا۲ ب۲ ج۲ بنے اور علیٰ ہذاالقیاس تو ثابت کرو کہ اس طرح سے جو ن واں مثلث حاصل ہوگا اس کے زاویہ ان کی قیمت $\frac{\pi}{۳} + (-\frac{۱}{۲})^{ن} (ا - \frac{\pi}{۳})$ کے برابر ہوگی، نیز ثابت

کروکہ مثلثوں کا میلان متساوی الاضلاع ہونیکی طرف ہے

۱۱۶ــ کسی مقام ا سے ایک پہاڑ کی چوٹی ف ٹھیک شمال کی طرف واقع ہے اور اس کا زاویہ ارتفاع مقام ا سے عہ ہے، نقطہ ا سے د فٹ بلند ایک پہاڑی کی چوٹی ب ہے اور اس چوٹی سے ف کا زاویہ ارتفاع بہ ہے، اگر ب پر کھڑے ہوکر دیکھیں تو ا کی سمت جانب جنوب کے مغرب کے طرف کو زاویہ لہ بناتی ہے اور ف کی سمت مقام ا کے شمال کی طرف کو زاویہ جہ بناتی ہے، ثابت کروکہ مقام ا سے چوٹی ف کی

بلندی $\frac{\text{د مس عہ جب جہ}}{\text{مس عہ جب جہ ـ مس بہ جب لہ}}$ ہے

۱۱۷ــ ایک شخص نے ایک پہاڑ کے پائیں پر کھڑے ہوکر ایک شئے کو جو آدھ میل کے فاصلہ پر تھی اسی سطح اُفقی میں مشاہدہ کیا جس میں کہ وہ خود تھا، اسکے بعد ۲۰۰ گز پہاڑ کے اوپر چڑھا اور اس نے دیکھا کہ اُس شئے کا زاویہ انخفاض ۲° ۳۰َ ہے اور اس کی سمت اس کے نقطہ ابتدائی کی سمت کے ساتھ زاویہ ۵۷° کا بناتی ہے، جس راستے سے وہ پہاڑ پر چڑھتا ہے اس کا میلان اُفق کے ساتھ قریب ترین منٹ تک دریافت کرو

۱۱۸ــ اگر کسی مثلث کے اُس جانبی دائرہ کے محاذی

جو ضلع ل کو مس کرتا ہے اندرونی دائرہ کے مرکز پر زاویہ ۲ فہ اور باقی دو جانبی دائروں کے مرکزوں پہ زاوے ۲ فہ اور ۲ فہ بنیں تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب فہ جب فہ جب فہ} = \frac{\text{ر}^2}{\text{۱۶ س}^2}$$

۱۱۹— ایک ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع کا ایک ضلع ایک ثابت مستقیم خط پر رکھا گیا ہے اور اس ضلع کے ایک سرے کے گرد شکل کو اتنا پھرایا گیا ہے کہ ساتھ کا ضلع خط مستقیم پہ منطبق ہوجاتا ہے اگر اسطرح کرنے سے شکل کو ایک پورا چکر دیا جائے تو ثابت کرو کہ کثیر الاضلاع کا کوئی راس زاویہ $\frac{\text{۴}\pi\,\text{ر}}{\text{ن}}$ جم $\frac{\pi}{\text{۲ن}}$ فاصلہ طے کرتا ہے جہاں ر اُس دائرہ کا نصف قطر ہے جو کثیر الاضلاع کے گرد بنایا جائے نیز ثابت کرو کہ دائروں کے جو قطاع کوئی راس زاویہ مرتسم کرتا ہے ان کے رقبوں کا مجموعہ ۲ π ر^2 ہے

۱۲۰— معادلات ذیل سے طہ اور فہ کو ساقط کرو

$$\frac{\text{لا}}{\text{ل}}\,\text{جم طہ} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب طہ} = \text{۱}$$

$$\frac{\text{لا}}{\text{ل}}\,\text{جم فہ} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب فہ} = \text{۱}$$

اور

$$\frac{\text{جم طہ جم فہ}}{\text{ل}^2} + \frac{\text{جب طہ جب فہ}}{\text{ب}^2} = \text{۰}$$

۱۲۱ــ دفعہ ۲۳۳ میں جس مفروضہ کو ہم نے بطور علم متعارفہ کے مان لیا ہے اس کو بطریق ذیل ثابت کرو۔ ع اور عَ کے درمیان بہت سے نقطے ق، ق، ق ...... لو اور ع ق، ق ق، ق ق ...... کو اتنا خارج کرو کہ وہ م عَ کو نقاط ر، ر، ر ...... پر ملیں اور اس کے بعد اس مسئلہ کو استعمال کرو کہ مثلث کے دو اضلاع کا مجموعہ تیسرے ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔

اگر دو محدب شکستہ خطوط ا ع ع ...... ع ب اور ا ق ق ...... ق ب ا

ایک ہی نقاط ا اور ب پر آکر ختم ہوں اور پہلا خط دوسرے کے بالکل باہر ہو تو ثابت کرو کہ پہلا خط دوسرے سے بڑا ہے

۱۲۲ــ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب}(\text{ط}-\text{جہ}-\text{عہ})\,\text{جب}(\text{ط}-\text{عہ}-\text{بہ})}{\text{جب}(\text{بہ}-\text{عہ})\,\text{جب}(\text{جہ}-\text{عہ})}+\frac{\text{جب}(\text{ط}-\text{عہ}-\text{بہ})\,\text{جب}(\text{ط}-\text{بہ}-\text{جہ})}{\text{جب}(\text{جہ}-\text{بہ})\,\text{جب}(\text{عہ}-\text{بہ})}$$

$$+\frac{\text{جب}(\text{ط}-\text{بہ}-\text{جہ})\,\text{جب}(\text{ط}-\text{جہ}-\text{عہ})}{\text{جب}(\text{عہ}-\text{جہ})\,\text{جب}(\text{بہ}-\text{جہ})}=1$$

۱۲۳ــ اگر $(\text{جب}^2\,\text{عہ}-\text{جب}^2\,\text{بہ})$ مم جہ + $(\text{جب}^2\,\text{بہ}-\text{جب}^2\,\text{جہ})$ مم عہ + $(\text{جب}^2\,\text{جہ}-\text{جب}^2\,\text{عہ})$ مم بہ = ۰ تو ثابت کرو کہ یا تو دو زاویوں کا فرق π کے کسی ضعف کے برابر ہے یا تینوں زاویوں کا مجموعہ اس ضعف کے برابر ہے۔

۱۲۴ — سطح افقی پر ایک پہاڑی ہے، اس کا قاعدہ گول
ہے اور اس کی بیرونی شکل قطعہ کرہ کی سی ہے، سطح افقی
ر کے دو مقامات سے جن کے فاصلے قاعدہ سے ا اور
ب فٹ ہیں پہاڑ کے اُس نقطہ کے ارتفاعی زاویے
طہ اور فہ مشاہدہ کئے گئے ہیں جو سب سے اونچا دکھائی
دیتا ہے، ثابت کرو کہ پہاڑی کی بلندی

$$\text{۲}\left[\frac{\left(\text{ب مم}\frac{\text{فہ}}{\text{۲}}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\text{ا مم}\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\text{مم}\frac{\text{فہ}}{\text{۲}}-\text{مم}\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}}\right]\text{ ہے -}$$

۱۲۵ — ایک برج کی چوٹی پر ایک نصف کروی گنبد ہے
اور گنبد کے سر پر صلیب ہے، کسی نقطہ پر صلیب کا
زاویہ ارتفاع عہ ہے اور گنبد کا بہ، گنبد کی سیدھ میں
فاصلہ ا جانے پر صلیب گنبد کے عین اوپر دکھائی دیتا
ہے اور اُس وقت گنبد کا زاویہ ارتفاع جہ ہے، ثابت
کرو کہ سطح زمین سے گنبد کے مرکز کی بلندی

$$\frac{\text{ا جب جہ}}{\text{جب}\,(\text{جہ}-\text{عہ})}\times\frac{\text{جم عہ جب بہ}-\text{جب عہ جم جہ}}{\text{جم بہ}-\text{جم جہ}}\text{ ہے}$$

۱۲۶ — اگر جب^{2} ا + جب^{2} ب + جب^{2} ج = ۱ تو ثابت
کرو کہ مثلث ا ب ج کا بیرونی دائرہ اس کے نونقطی
دائرہ کو قائم الزاویہ پر قطع کرتا ہے -

۱۲۷ — ایک دائرہ کا نصف قطر س ہے اور اسکے

محیط پر ایک ایسا نقطہ و ہے جس کو مرکز مانکر ایک اور دائرہ کھینچا گیا ہے اس دائرہ کا نصف قطر $\frac{3}{2}$ر ہے، ان دائروں کے درمیان جو ہلال کی شکل بنتی ہے اس کے اندر ایک اور دائرہ رکھدیا گیا ہے جس کا نصف قطر $\frac{1}{8}$ر ہے، ثابت کرو کہ اگر چھوٹا دائرہ اصلی دائرہ (نصف قطر ر) کے محیط پر حرکت کرے تو اس کا مرکز ایک انتہائی مقام سے دوسرے انتہائی مقام تک حرکت کرنے میں ایک ایسی قوس مرتسم کرے گا جس کا طول $\frac{7}{12}$ π ر ہوگا۔

۱۲۸۔ معادلات ذیل سے لا اور ما کو ساقط کرو

جب لا + جب ما = ا

جم لا + جم ما = ب

اور مس لا + مس ما = ج

۱۲۹۔ اگر ۲ جم ن طہ کو صن سے تعبیر کریں تو ثابت کرو

صن+۱ = ص۱ صن − صن-۱

اسلئے ثابت کرو کہ

۲ جم ۷ طہ = ص۱^۷ − ۷ ص۱^۵ + ۱۴ ص۱^۳ − ۷ ص۱

۱۳۰۔ عمل ترسیمی سے ثابت کرو کہ ۴٫۷ء مساوات جم لا = لا (جہاں لا کی پیمائش نیم قطری زاویوں میں کیگئی ہے) کا تقریبی حل ہے، نیز ثابت کرو کہ مساوات کی صرف یہی حقیقی قیمت ہے۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ

جب ۲ (لا - عہ) $\frac{\text{جب (لا - بہ) جب (لا - جہ)}}{\text{جب (عہ - بہ) جب (عہ - جہ)}}$ + دو متشابہ جملے = ۰

۱۳۱۔ اگر ا ب ج کوئی مثلث ہو تو ثابت کرو کہ

جب۳ ا جم (ب - ج) + جب۳ ب جم (ج - ا) + جب۳ ج جم (ا - ب)
= ۳ جب ا جب ب جب ج

۱۳۱۔ ایک شخص نے دو اشیا کو ٹھیک سمت مغرب
میں دیکھا، اس کے بعد وہ فاصلہ ج شمال کی طرف چلا
اور اس نے اشیا کے محاذی زاویہ عہ دیکھا، شمال کی
جانب میں اور فاصلہ ج جانے پر اُس نے اشیا کے
محاذی زاویہ بہ مشاہدہ کیا، ثابت کرو کہ اشیا کا
درمیانی فاصلہ $\frac{\text{۳ ج}}{\text{۲ تم بہ - تم عہ}}$ ہے۔

۱۳۲۔ ایک پہاڑی کا پہلو مسطح ہے اور افق سے
زاویہ عہ بناتا ہے، اُس پر سطح عمودی میں ایک سڑک
بنائی ہے جو اُس سطح عمودی سے جو خط میلان اعظم
میں سے گذرتی ہے زاویہ بہ بناتی ہے، ثابت کرو کہ سڑک
کا میلان اُفق سے مس-۱ (مس عہ جم بہ) ہے۔

۱۳۳۔ ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج کے اندرونی
اور بیرونی دائروں کے مرکزوں کو ملانے والا خط،
ضلع ب ج سے زاویہ مس-۱ $\left(\frac{\text{جم ب + جم ج - ۱}}{\text{جب ب - جب ج}}\right)$ بناتا ہے۔

۱۳۶ — معادلات ذیل سے طہ کو ساقط کرو

لا جب طہ — ما جم طہ = — جب ۴ طہ

اور لا جم طہ + ما جب طہ = $\frac{5}{4}$ — $\frac{3}{4}$ جم ۴ طہ

۱۳۷ — ایک منتظم کثیر الاضلاع دائرہ کے اندر بنائی گئی ہے اگر کسی نقطہ کو (جو ضروری نہیں کہ شکل کے سطح میں واقع ہو) کثیر الاضلاع کے کونوں سے ملایا جائے اور اِن خطوط کے مربعوں کا اوسط حسابی نکالا جائے تو ثابت کرو کہ یہ اوسط اُن دو خطوط کے مربعون کے اوسط حسابی کے مساوی ہوگا جو نقطہ مذکورہ اور محیط دائرہ کے قریب ترین اور بعید ترین نقاط کو ملائیں۔

۱۳۸ — تین نقطے ا، ب، ج ایک خط مستقیم پر واقع ہیں اور ا ب کو ب ج سے وہی نسبت ہے جو م کو ن سے ہے، نقاط ا، ب، ج میں سے متوازی اور مستقیم خط ا لا، ب ما، ج سے کھینچے گئے ہیں، نقطہ ط خط ا لا پر حرکت کرتا ہے اور نقطہ ر خط ج سے پر، اگر کسی وقت پر جو ت سے تعبیر ہوتا ہے ا ط = ا۱ + ا۲ جب (ن ت + عہ)

اور فاصلہ ج ر = ج۱ + ج۲ جب (ن ت + جہ)

اور اگر مستقیم خط ط ر، ب ما کو نقطہ ق پر قطع کرے تو فاصلہ ب ق کے لئے ایک متشابہ جملہ دریافت کرو۔

۱۳۹ — ثابت کرو کہ

جب (بہ — جہ) جب ۳ عہ + جب (جہ — عہ) جب ۳ بہ + جب (عہ — بہ) جب ۳ جہ

= ۴ جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ) جب (عہ + بہ + جہ)

۱۴۰— ثابت کرو کہ

جب (بہ - جہ) جم ۳ عہ + جب (جہ - عہ) جم ۳ بہ + جب (عہ - بہ) جم ۳ جہ

= ۴ جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ) جم (عہ + بہ + جہ)

۱۴۱— اگر جب (لا + ۳ عہ) جب (بہ - جہ) + جب (لا + ۳ بہ) جب (جہ - عہ)

+ جب (لا + ۳ جہ) جب (عہ - بہ) = ۴ جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

تو ثابت کرو کہ لا + عہ + بہ + جہ = (۲ ن + $\frac{1}{2}$) π

۱۴۲— اگر ا + ب + ج = ۲ π تو ثابت کرو کہ

جب^۳ ا + جب^۳ ب + جب^۳ ج = ۳ جب $\frac{ا}{۲}$ جب $\frac{ب}{۲}$ جب $\frac{ج}{۲}$

- جب $\frac{۳ ا}{۲}$ جب $\frac{۳ ب}{۲}$ جب $\frac{۳ ج}{۲}$

۱۴۳— ایک جھنڈا سمت راس سے کوئی زاویہ بناتا ہے اور اس کے پائیں کو مرکز مانکر ایک افقی دائرہ کھینچا گیا ہے، ایک شخص محیط دائرہ کے گرد چلکر مشاہدہ کرتا ہے کہ جھنڈے کے محاذی اس کی آنکھ پر بڑے سے بڑا زاویہ عہ اور چھوٹے سے چھوٹا زاویہ بہ بنتا ہے اور جب وہ ان مقامات کے عین وسط میں محیط دائرہ پر ہو تو یہ زاویہ طہ ہوتا ہے، اگر آنکھ کی اونچائی کو نظر انداز کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ

مس طہ = $\sqrt{\text{جب}^۲ (\text{عہ} - \text{بہ}) + ۴ \text{ جب}^۲ \text{عہ جب}^۲ \text{بہ}}$ / جب (عہ + بہ)

۱۴۴— دو خطوط ایک سطح مائل پر کھینچے گئے ہیں اور

ان کا درمیانی زاویہ جہ ہے، اگر ان کے میلان افق سے بالترتیب عہ اور بہ ہوں تو ثابت کرو کہ سطح مائل افق سے زاویہ

جب$^{-1}$ { قم جہ √ جب^2 عہ + جب^2 بہ − ۲ جب عہ جب بہ جم جہ } بناتی ہے

نیز ثابت کرو کہ سطح مائل کے خط میلان اعظم اور ایک خط مذکور کے درمیان زاویہ

$$\text{مس}^{-1} \left(\frac{\text{جب بہ − جب عہ جم جہ}}{\text{جب عہ جب جہ}} \right)$$ بنتا ہے۔

۱۴۵— اگر ایک مثلث اب ج کے مرکز عمودی کو ایک خط بیرونی دائرہ کے مرکز سے ملائے تو ثابت کرو کہ یہ خط ضلع ب ج سے زاویہ

$$\text{مس}^{-1} \left(\frac{\text{۳ − مس ب مس ج}}{\text{مس ب − مس ج}} \right)$$ بناتا ہے۔

۱۴۶— زاویہ طہ کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

$$\frac{\text{جم (عہ − ۳ طہ)}}{\text{جم}^3\ \text{طہ}} = \frac{\text{جب (عہ − ۳ طہ)}}{\text{جب}^3\ \text{طہ}} = \text{م}$$

۱۴۷— ایک ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع ا$_1$ ا$_2$ ا$_3$ ...... ا$_ن$ ایک دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے، دائرہ کا مرکز و اور نصف قطر ا ہے، ط کوئی نقطہ ہے جس کا فاصلہ و سے ج کے برابر ہے، اگر نقطہ ط سے کثیر الاضلاع

کے اضلاع پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کے
مربعوں کا مجموعہ $\text{ن}\left(\text{ا}^{2}+\frac{\text{ج}^{2}}{4}\right)$ ہے۔

۱۴۸۔ ایک دائرہ کی کسی قوس اب کے محاذی دائرہ کے مرکز پر زاویہ ۲ طہ بنتا ہے اور نقاط ا اور ب پر کے مماس نقطہ م پہ ملتے ہیں، عمل ترسیمی سے طہ کی قیمت قریب ترین درجہ تک اُسی صورت میں دریافت کرو
(۱) جبکہ دائرہ کا رقبہ اُس رقبہ کے مساوی ہو جو م ا، م ب اور قوس اب کے اندر گھرا ہوا ہے
(۲) جب م ا اور م ب کے طولوں کا مجموعہ قوس اب اور وتر اب کے مجموعہ کے برابر ہو۔

۱۴۹۔ ثابت کرو کہ مثلث کے زاوئے ارتباطات ذیل کو پورا کرتے ہیں

(۱) $\text{جب}^{3}\text{ا}+\text{جب}^{3}\text{ب}+\text{جب}^{3}\text{ج}$

$$=3\,\text{جم}\frac{\text{ا}}{2}\,\text{جم}\frac{\text{ب}}{2}\,\text{جم}\frac{\text{ج}}{2}+\text{جم}\frac{3\text{ا}}{2}\,\text{جم}\frac{3\text{ب}}{2}\,\text{جم}\frac{3\text{ج}}{2}$$

(۲) $\text{جب}^{2}\text{ا}+\text{جب}^{2}\text{ب}+\text{جب}^{2}\text{ج}$

$$=\frac{3}{2}+2\,\text{جم}\,\text{ا}\,\text{جم}\,\text{ب}\,\text{جم}\,\text{ج}+\frac{1}{2}\,\text{جم}\,2\text{ا}\,\text{جم}\,2\text{ب}\,\text{جم}\,2\text{ج}$$

۱۵۰۔ نقطہ و سے ایک شخص ایک پہاڑی پر سیدھے راستہ سے چڑھتا ہوا دکھائی دیا اور جب وہ دو مقامات ف اور ق پر سے گذرا تو اُس کے ظاہری قد کے ارتفاعی زاوئے مشاہدہ کرنے سے معلوم ہوا کہ $\frac{\text{وف}}{\text{وق}}=\text{ل}$ اگر زاویہ ف و ق = جہ، مقامات ف اور ق کے ارتفاع نقطہ

و سے عہ اور بہ دکھائی دے، اگر افق سے راستہ
فہ ہو تو ثابت کرو کہ فہ مساوات ذیل کی شرائط کو
کرتا ہے

جب۲ فہ = (ل جب عہ - جب بہ)۲ / (ل۲ - ۲ ل جم جہ + ۱)

۱۵۱— معادلات ذیل سے طہ کو ساقط کرو

لا + ا = ا (۲ جم طہ - جم ۲ طہ)

اور ما = ا (۲ جب طہ - جب ۲ طہ)

۱۵۲— سطح مستوی میں ایک منتظم کثیر الاضلاع ہے
سطح کے کسی نقطہ سے کثیر الاضلاع کے ضلعوں پر عمو
گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان عمودوں کے مربعوں کا
اُن خطوط کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہے
عمودوں کے پایوں کو کثیر الاضلاع کے مرکز کے
ملاتے ہیں —

۱۵۳— ایک مستطیلی کھیت کے اضلاع ا اور
ہیں اور اس کے مرکز پر ایک کھونٹی ہے جس
ساتھ ایک رسی کے ذریعہ ایک گھوڑا بندھا ہے،
گھوڑا ٹھیک آدھے کھیت میں بلا تکلف چر سکے
ثابت کرو کہ رسی کا طول تقریباً ۵۸۳ء۰ × ا ۔

۱۵۴— ثابت کرو کہ مساوات جب (طہ+لہ) = ا جب ۲
کی چار قیمتیں ہیں جن کا مجموعہ دو قائموں کے طاق

کے برابر ہے۔

۱۵۵۔ اگر طہ کوئی مثبت حادّہ زاویہ ہو تو ثابت کروکہ زاویہ طہ کے بڑھنے سے نسبت طہ/جب طہ ہمیشہ بڑھتی ہے اور طہ/مس طہ ہمیشہ گھٹتی ہے۔

۱۵۶۔ اگر جب لا = م جب ا جہاں م ایک سے بڑا ہے تو ثابت کروکہ جب زاویہ طہ صفر سے قائمہ تک بڑھتا ہے تو نسبت مس لا/مس ا متواتر بڑھتی ہے اور اس کی قیمتیں م اور ∞ کے برابر ہوتی ہیں جبکہ لا بالترتیب صفر اور ایک قائمہ کے برابر ہو۔

۱۵۷۔ ثابت کروکہ

جب^۳(بہ − جہ) جب^۳(عہ − لہ) + جب^۳(جہ − عہ) جب^۳(بہ − لہ) + جب^۳(عہ − بہ) جب^۳(جہ − لہ)

= ۳ جب(عہ − بہ) جب(بہ − جہ) جب(جہ − عہ) جب(عہ − لہ) جب(بہ − لہ) جب(جہ − لہ)

۱۵۸۔ ثابت کروکہ ح جم(۳ عہ − بہ − جہ − لہ)

= ۴ جم(عہ + بہ − جہ − لہ) جم(عہ + جہ − بہ − لہ) جم(عہ + لہ − بہ − جہ)

جہاں ح اُن سب رقموں کے حاصل جمع کو تعبیر کرتا ہے جن کا عام نمونہ وہ رقم ہے جس کے ماقبل یہ علامت لکھی گئی ہے۔

۱۵۹۔ ثابت کروکہ

جب(عہ + بہ + جہ) جم عہ جب بہ جب جہ + جم(عہ + بہ + جہ) جب عہ جب بہ جب جہ

− جب(عہ + بہ + جہ) جم عہ جم بہ جم جہ − جم(عہ + بہ + جہ) جب عہ جم بہ جم جہ

+ جب(عہ + بہ) جم(بہ + جہ) جم(جہ + عہ) + جم(عہ + بہ) جم(بہ + جہ) جب(جہ + عہ) = ·

۱۶۰۔ ثابت کروکہ

جب۲ عہ جب (بہ − جہ) جب (جہ − لہ) جب (لہ − بہ)
+ جب۲ بہ جب (جہ − لہ) جب (لہ − عہ) جب (عہ − جہ)
+ جب۲ جہ جب (لہ − عہ) جب (عہ − بہ) جب (بہ − لہ)
− جب۲ لہ جب (عہ − بہ) جب (بہ − جہ) جب (جہ − عہ) = ۰

۱۶۱ — جملہ ف ق − ر س کو مختصر کرو جہاں

ف = لا جم (عہ + بہ) + ما جب (عہ + بہ) − جم (عہ − بہ)
ق = لا جم (جہ + لہ) + ما جب (جہ + لہ) − جم (جہ − لہ)
ر = لا جم (عہ + جہ) + ما جب (عہ + جہ) − جم (عہ − جہ)
س = لا جم (بہ + لہ) + ما جب (بہ + لہ) − جم (بہ − لہ)

۱۶۲ — اگر ا۲ + ب۲ − ۲ اب جم عہ = ج۲ + د۲ − ۲ ج د جم جہ
ب۲ + ج۲ − ۲ ب ج جم بہ = ا۲ + د۲ − ۲ ا د جم لہ
اور اب جب عہ + ج د جب جہ = ب ج جب بہ + ا د جب لہ
تو ثابت کرو کہ جم (عہ + جہ) = جم (بہ + لہ)

۱۶۳ — ثابت کرو کہ مساوات

۱	جم طہ	۰	۰
جم طہ	۱	جم عہ	جم بہ
۰	جم عہ	۱	جم جہ
۰	جم بہ	جم جہ	۱

= ۰

کا حل طہ = ن π + (−۱)ن جب−۱ { √(جم۲ عہ + جم۲ بہ − ۲ جم عہ جم بہ جم جہ) / جب جہ } ہے

۱۶۴— ثابت کروکہ کسی مثلث اب ج میں

$$\text{جم م ا} + \text{جم م ب} + \text{جم م ج} - ۱ = \pm ۴ \text{ جب } \frac{\text{م ا}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{م ب}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{م ج}}{۲}$$

اگر م کی صورت بالترتیب ۴ن + ۱ ہو یا ۴ن + ۳

۱۶۵— ثابت کروکہ کسی مثلث اب ج میں

$$(۱)\quad \text{ا}^۲ \text{ جم ب جم ج} + \text{ب}^۲ \text{ جم ج جم ا} + \text{ج}^۲ \text{ جم ا جم ب}$$

$$= \text{اَ بَ جَ} \left(۱ - ۲ \text{ جم ا جم ب جم ج}\right)$$

$$\text{اور } (۲)\quad \text{جب ۲ م ا} + \text{جب ۲ م ب} + \text{جب ۲ م ج}$$

$$= (-۱)^{\text{م}+۱} \times ۴ \text{ جب م ا جب م ب جب م ج}$$

۱۶۶— اگر کسی مثلث کے زاوئے ا، ب، ج ہوں تو ثابت کروکہ

$$\text{مس}^{-۱}(\text{م ب م ج}) + \text{مس}^{-۱}(\text{م ج م ا}) + \text{مس}^{-۱}(\text{م ا م ب})$$

$$= \text{مس}^{-۱}\left\{۱ + \frac{۸ \text{ جم ا جم ب جم ج}}{\text{جب}^۲ ۲\text{ا} + \text{جب}^۲ ۲\text{ب} + \text{جب}^۲ ۲\text{ج}}\right\}$$

۱۶۷— کسی مثلث کے نقاط الزوایا ا، ب، ج میں سے ایسے مستقیم خط کھینچے گئے ہیں جو اضلاع اب، ب ج، ج ا میں سے ہر ایک سے زاویہ عہ بناتے ہیں، ثابت کروکہ جو مثلث اسطرح بنتا ہے اُس کے اضلاع کی نسبت مثلث اب ج کے اضلاع کے ساتھ

$$\text{جم عہ} - \text{جب عہ} \left(\text{م ا} + \text{م ب} + \text{م ج}\right) : ۱ \text{ ہے}$$

۱۶۸— سطح اُفقی پر اسطوانہ کی شکل کا ایک برج ہے اور برج کی چوٹی پر ایک مخروط ہے، سطح زمین کے

ایک مقام پر کھڑے ہوکر برج کی چوٹی کے قریب ترین نقطہ کا زاویہ ارتفاع عہ اور مخروط کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع بہ مشاہدہ کیا گیا ہے، برج کی سیدھ میں فاصلہ ا جانے پر یہی زاوئے بالترتیب جہ اور لہ ہو جاتے ہیں، ثابت کروکہ برج اور مخروط کی چوٹیوں کی بلندیاں سطح زمین سے

ا جب عہ جب جہ قم (جہ-عہ) اور ا جب بہ جب لہ قم (لہ - بہ) ہیں

نیز برج کا قطر

۲ ا جب بہ جم لہ قم (لہ - بہ) - ۲ ا جب عہ جم جہ قم (جہ - عہ) ہے

۱۶۹— سطح زمین کے نیچے ایک پتھر کی تہ ہے، اور اسکا میلان اُفق سے دریافت کرنے کے لئے ایک اُفقی مربع کے تین نقاط پر عمودی سوراخ کھودے گئے ہیں۔ ان نقاط پر تہ کی گہرائیاں بالترتیب ا، ب، ج ہیں

ثابت کروکہ تہ کا میلان اُفق سے مس$^{-1}$ $\frac{\sqrt{(ا-ب)^2+(ب-ج)^2}}{د}$ ہے

جہاں د مربع کے ضلع کو تعبیر کرتا ہے۔

۱۷۰— ایک پہاڑ کے مقابل کی جانبوں میں دو مقام ا اور ب ہیں، ا سے ب تک ایک سرنگ نکالنی منظور ہے، ا اور ب سے ایک دور کے مقام ج کے ارتفاعی زاوئے عہ اور بہ مشاہدہ کئے گئے ہیں اور زاویہ ا ج ب = جہ، نیز ا ج اور ب ج کے طول اَ اور بَ معلوم ہیں، ثابت کروکہ مقام ب کی بلندی (د) مقام ا سے

= ا جب عہ – ب جب بہ اور اب کا طول (ل) = √(ا² + ب² – ۲ اب جم جہ)
اور خط اب اُفق سے زاویہ جب⁻¹ د/ل اور خط اج سے
زاویہ جب⁻¹ (ب جب جہ)/ل بناتا ہے۔

۱۷۱ — ایک پہاڑی کا زاویہ ارتفاع فہ ہے، ایک شخص ایسی سمت میں اس کے اوپر چڑھنا شروع کرتا ہے جو خط میلان اعظم سے زاویہ لہ بناتی ہے، فاصلہ ف اوپر چڑھنے کے بعد وہ دیکھتا ہے کہ ایک ایسی شئے کا زاویہ انخفاض عہ ہے جو اُس کی سمت طریق میں سے گذرنے والی عمودی سطح اور پائیں کوہ میں سے گذرنے والی اُفقی سطح میں واقع ہے، اس کے بعد وہ فاصلہ ن اور اوپر چڑھکر دیکھتا ہے کہ اسی شئے کا زاویہ انخفاض بہ ہے، ثابت کروکہ زاویہ ارتفاع فہ مساوات ذیل کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

قط² لہ قم² فہ = ۱ + { مم بہ + م/ن (مم بہ – مم عہ) }²

۱۷۲ — ایک پہاڑ کی تین چوٹیاں ہیں، جن میں سے ا سب سے نیچی ہے اور چوٹی ا سے ب کی بلندی (د) معلوم ہے، چوٹی ا سے ب اور ج کے ارتفاعی زاوئے بہ اور جہ مشاہدہ کئے گئے ہیں، اگر اب اور اج میں سے گذرنے والی عمودی سطحوں کا درمیانی زاویہ طہ ہو اور نقطہ ب پر

ب ا اور ب ج میں سے گذرنے والی عمودی سطحوں کا
درمیانی زاویہ ف دکھائی دے تو ثابت کرو کہ چوٹی ا سے چوٹی
ج کی بلندی د م م بہ مس جہ جب ف قتم (ط + ف) ہے
۱۷۳ — ایک پہاڑ کے مسطح پہلو پر دو سیدھے راستے
ب ج اور ج ا ہیں، ان کے طول بالترتیب اَ اور بَ
ہیں اور دونوں کا چڑھاؤ اوپر کی طرف م میں ا ہے
(یعنی م افقی میں ا عمودی) اور نقطہ ب سے ایک
چڑھاؤ ن میں ا ہے، ثابت کرو کہ پہاڑ کے پہلو کا
میلان افق سے ع ہے جہاں

۴ اَبَ م² ع = (اَ + بَ)² ن² — (اَ ـ بَ)² م²

۱۷۴ — ثابت کرو کہ مثلث کے اندرونی اور نونقطی
دائروں کے مرکزوں کا باہمی فاصلہ $\frac{ر}{۲}$ — ر ہے،
اس سے فیوربک کا مسئلہ حاصل کرو یعنی
ثابت کرو کہ کسی مثلث کے اندرونی اور نونقطی دائرے
ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔

۱۷۵ — ا ب ج د ایک ذو اربعۃ الاضلاع ہے، اسمیں
ا ب = ۳، ب ج = ۴، ج د = ۵ اور د ا = ۶ فٹ
اور اس کا رقبہ = ۳ √۳ + ۹ مربع فٹ، ثابت کرو کہ
ان شرائط کو پورا کرنے والی دو اشکال ذو اربعۃ الاضلاع
ہیں جن میں بالترتیب زاویہ ب کی قیمتیں جم⁻¹ [(—۱—۲۴ √۳) / ۷۴]

یعنی تقریباً ۶۰° اور ۱۷۵° ۱۵′ ہیں

۱۷۶ — معادلات ذیل سے عہ، بہ، تہ کو ساقط کرو

ا جم عہ + ب جم بہ + ج جم تہ = ۰

ا جب عہ + ب جب بہ + ج جب تہ = ۰

ا قط عہ + ب قط بہ + ج قط تہ = ۰

۱۷۷ — معادلات ذیل سے طہ کو ساقط کرو

مس (طہ - عہ) + مس (طہ - بہ) = ا

مم (طہ - عہ) + مم (طہ - بہ) = ۱

۱۷۸ — معادلات ذیل سے فہ کو ساقط کرو

لا جم ۳ فہ + ۱ جب ۳ فہ = ب جم فہ

اور لا جب ۳ فہ + ۱ جم ۳ فہ = ب جم $\left(فہ + \frac{\pi}{۶}\right)$

۱۷۹ — ایک دائرہ کا نصف قطر ا ہے اور اس کے اندر م اور ن اضلاع کی دو منتظم اشکال کثیر الاضلاع بنائی گئی ہیں۔ ثابت کرو کہ ان تمام وتروں کے مربعوں کا مجموعہ جو ایک کثیر الاضلاع کے ایک کونے کو دوسری کثیر الاضلاع کے ایک کونے کے ساتھ ملانے سے حاصل ہوتے ہیں ۲ م ن ا^۲ ہے

۱۸۰ — ایک محیط دائرہ کے گرد ن پتھر برابر برابر فاصلوں پر ترتیب دئے گئے ہیں۔ ان سب کو دائرہ کے مرکز تک اٹھاکر لیجانے میں جتنی محنت درکار ہو اس کا مقابلہ اس محنت سے کرو جو ایک پتھر کے گرد ان سب کا انبار لگانے میں درکار ہو۔

نیز ثابت کرو کہ اگر پتھروں ، تعداد کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو یہ نسبت π : ۴ ہو جائے گی۔

۱۸۱— عمل ترسیمی سے یا کسی اور طرح سے مساوات لا + ۲ مس لا = $\frac{\pi}{۲}$ کی ان قیمتوں کی تعداد دریافت کرو جو ۰ اور ۲π کے درمیان واقع ہوں، اور سب سے بڑی قیمت کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

جدولوں سے اپنے نتیجہ کی تصدیق کرو۔

۱۸۲— لا کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمت دریافت کرو جو شرائط مساوات مس لا - لا = $\frac{۱}{۲}$ کو پورا کرے

۱۸۳— جملہ جب۲ لا کی ترسیم بناؤ اور ثابت کرو کہ اگر ا ایک چھوٹی مثبت مقدار ہو تو مساوات لا - ا = $\frac{\pi}{۲}$ جب۲ لا کی تین حقیقی قیمتیں ہونگی۔

۱۸۴— ثابت کرو کہ مساوات ا لا + ب = مس $\frac{\pi ج لا}{۲}$ کی ایسی حقیقی قیمتوں کے تقربات جو مقابلۃً بڑی ہوں

مساوات لا = $\frac{م}{ج}$ - $\frac{۲}{\pi (ا م + ب ج)}$ سے حاصل ہوتے ہیں

جہاں م کوئی بڑا طاق صحیح عدد ہے

۱۸۵— عمل ترسیمی سے مساوات لا جب π لا = ۱ کی تعداداً سب سے چھوٹی مثبت اور منفی قیمتوں کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو۔

نیز ثابت کرو کہ اس مساوات کی بڑی قیمتوں کی تقریبی

قیمتیں مساوات لا = ن + $\frac{(-۱)^{ن}}{\pi^{۲} ن}$ سے حاصل ہوتی ہیں، اس میں ن کوئی بڑی مقدار ہے۔

۱۸۶— ثابت کرو کہ مساوات مس لا = ۲ لا کی قیمت جو صفر اور $\frac{\pi}{۲}$ کے درمیان واقع ہے تقریباً ۱٫۱۶۵۴ ہے

معلوم ہے مس ۱٫۱۵۱۹ = ۲٫۲۴۶۰ اور مس ۱٫۱۶۹۴ = ۲٫۳۵۵۹

۱۸۷— اگر طہ کوئی حادہ زاویہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$مس\ طہ\ ہمیشہ\ طہ + \frac{طہ^{۳}}{۳} + \frac{طہ^{۵}}{۱۵} + \dots + \frac{طہ^{۲ن+۱}}{۴ن-۱} + \dots\dots$$

سے بڑا ہوگا

۱۸۸— اگر ا، ب، عہ، بہ مستقل مقداریں ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات

$$جم(۲طہ - عہ) + ا\ جم(طہ - بہ) + ب = ۰$$

کی قیمتوں کے چار مختلف مجموعے ہیں اور اگر ان مختلف مجموعوں کی کسی چار قیمتوں کو $طہ_{۱}$، $طہ_{۲}$، $طہ_{۳}$، $طہ_{۴}$ سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ $طہ_{۱} + طہ_{۲} + طہ_{۳} + طہ_{۴} - ۲عہ$، π کا جفت ضعف ہے۔

۱۸۹— اگر شرائط مساوات

$$یم(طہ + عہ) + یم(طہ + بہ) + یم(طہ + جہ)$$
$$= قم(طہ + عہ) + قم(طہ + بہ) + قم(طہ + جہ)$$

$طہ_{۱}$، $طہ_{۲}$، $طہ_{۳}$ سے پوری ہو سکیں جن میں سے کسی دو کا فرق ۴ قائموں کے ضعف کے برابر نہ ہو تو ثابت کرو

طہ۱ + طہ۲ + طہ۳ + عہ + بہ + جہ ، ۲π کے کسی ضعف کے برابر ہوگا

۱۹۰— ثابت کرو کہ بالعموم مساوات

ا جب³ لا + ب جم³ لا + ج = ۰

کی چھ مختلف قیمتیں ہیں جن میں سے کسی دو کا تفاوت ۲π کے برابر نہیں ہو سکتا، نیز ثابت کرو کہ اُن کے مجموعہ کا مماس − ا/ب ہے۔

۱۹۱— ثابت کرو کہ مساوات

مس (طہ − عہ) + قط (طہ − بہ) = مم جہ

کی چار قیمتیں ایسی ہیں (جن میں سے کسی دو کا فرق ۲π کے اضعاف کے برابر نہیں) جو ربط ذیل کو پورا کرتی ہیں

طہ۱ + طہ۲ + طہ۳ + طہ۴ = ۲ (ن π + عہ + بہ − جہ)

۱۹۲— اگر لا کی تین قیمتیں عہ، بہ، جہ مساوات

جب ۲ طہ (ا جب لا + ب جم لا) = جب ۲ لا (ا جب طہ + ب جم طہ)

کو پورا کریں اور ان میں سے کسی دو کا باہمی فرق یا اُن میں سے کسی ایک اور طہ کا فرق ۲π کے کسی ضعف سے تعبیر نہ ہو سکے تو ثابت کرو کہ

مس عہ/۲ مس بہ/۲ مس جہ/۲ مس طہ/۲ + ۱ = ۰

۱۹۳— اگر مساوات ا جم ۲ طہ + ب جب ۲ طہ + ج جم طہ + د = ۰

کی چار مختلف قیمتیں طہ۱، طہ۲، طہ۳، طہ۴ ہوں تو ثابت کرو کہ Σ جب (طہ۲ + طہ۳ + طہ۴ − طہ۱)/۲ = ۰

اس میں $\sum$ ان سب رقموں کے حاصل جمع کو تعبیر کرتا ہے جسکا عام نمونہ اوپر مندرج ہے۔

۱۹۴ — ارتباط ذیل کو ثابت کرو

$$\text{جم}^{-1}\text{لا} = \frac{\sqrt{1-\text{لا}^2}}{\text{لا}_1 \times \text{لا}_2 \times \text{لا}_3 \ldots\ldots \infty \text{ تک}}$$

جہاں متواتر مقداریں لا، لا_1، لا_2 ... $\text{لا}_ر$ ربط ذیل سے منسلک ہیں

$$\text{لا}_{ر+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\text{لا}_ر)}$$

۱۹۵ — اگر ا اور ب مثبت مقداریں ہوں اور اگر

$$\text{ا}_1 = \frac{\text{ا}+\text{ب}}{2}،\ \text{ب}_1 = \sqrt{\text{ا}\text{ب}}،\ \text{ا}_2 = \frac{\text{ا}_1+\text{ب}_1}{2}،$$

$\text{ب}_2 = \sqrt{\text{ا}_2\text{ب}_1}$ اور علیٰ ہذا القیاس

تو ثابت کرو کہ

$$\text{ا}_\infty = \text{ب}_\infty = \frac{\sqrt{\text{ب}^2-\text{ا}^2}}{\text{جم}^{-1}\frac{\text{ا}}{\text{ب}}}$$

اس سے ثابت کرو کہ π کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے

۱۹۶ — اگر مساوات

$$\text{ا}_1 + \text{ا}_2 \text{ جب لا} + \text{ا}_3 \text{ جم لا} + \text{ا}_4 \text{ جب ۲ لا} + \text{ا}_5 \text{ جم ۲ لا} = 0$$

لا کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ہو جہاں مستقل مقدار $ل_0$
$ل_1$، $ل_م$ ...... میں لا شامل نہیں ہے، تو ثابت کرو کہ
ان مستقل مقداروں میں سے ہر ایک صفر کے برابر ہوگی

جوابات

امثلہ ۱ (صفحہ ۱۱-۱۲)

۱- $\frac{۲}{۳}$ ۲- $\frac{۳۰۱}{۳۶۰}$ ۳- $\frac{۳۵۵۶۹}{۶۴۸۰۰}$

۴- $۱\frac{۹}{۲۰}$ ۵- $۲\frac{۳۶۶۱}{۱۰۸۰۰}$ ۶- $۲\frac{۳۸۸}{۳۳۷۵}$

۷- ۳۳ف ۳۳` ۳۳٫۳" ۸- ۹۰ف

۹- ۱۵۳ف ۸۸` ۸۸٫۸" ۱۰- ۳۹ف ۷۶` ۳۸٫۸"

۱۱- ۲۶۱ف ۳۴` ۴۴٫۴" ۱۲- ۵۲۸ف ۳` ۳۳٫۳"

۱۳- $۱\frac{۱}{۵}$ زاویہ قائمہ ، ۱۰۸°

۱۴- ٫۵۳۵۲۴ زاویہ قائمہ ، ۴۰° ۴۹′ ۱٫۷۷۶″

۱۵- ٫۳۹۴۵۳۶ زاویہ قائمہ ، ۳۵° ۳۰′ ۲۹٫۶۶۴″

۱۶- ۲٫۵۵۰۸۰۶ زاویے قائمے ، ۲۲۹° ۳۴′ ۲۲٫۱۱۴″

۱۷- ۷٫۵۹۰۰۰۵ زاویے قائمے ، ۶۸۳° ۶′ ۱٫۶۲″

۲۸- ۵° ۳۳′ ۲۰″، ۹۶° ۴۰′

۲۹- ۴۷ $\frac{۷}{۱۹}$° ، ۴۲ $\frac{۱۲}{۱۹}$°   ۳۱- ۳۳° ۲۰′ ، ۱۰° ۴۸′

امثلہ ۲ (صفحہ ۱۰-۱۸)

۱- ۲۵۱۳۲۲٫۷۴ میل تقریباً

۲- ۱۹٫۲۸ میل تقریباً فی گھنٹہ

۳- ۱۲٫۸۵ میل تقریباً

۴- ۳٫۱۴۱۵۹...... انچ ۵- ۵۸۱۱۹۴۶۴۰ میل تقریباً

۶- ۱۴٫۹۹۴ میل تقریباً

امثلہ ۳ (صفحہ ۲۲-۲۴)

۱- ۹۰°   ۲- ۲۴۰°   ۳- ۱۸۰۰°

۴- ۵۷° ۱۷′ ۴۴٫۸″   ۵- ۴۵۸° ۲۱′ ۵۸٫۴″

۶- ۱۶۰°   ۷- ۲۳۳° ۳۳′ ۳۳٫۳″

۸- ۲۰۰۰°   ۹- $\frac{\pi}{۴}$ ۱۰- $\frac{۲۲۱}{۳۶۰}\pi$

۱۱- $\frac{۷۰۳}{۷۲۰}\pi$ ۱۲- $\frac{۳۵۵۷}{۱۳۵۰۰}\pi$

۱۳- $\frac{۷۹}{۳۶}\pi$ ۱۴- $\frac{۳\pi}{۱۰}$

۱۵- $\frac{۱۱۰۳}{۲۰۰۰}\pi$ ۱۶- ۱٫۷۲۹۶۲۰۱۸ π

۱۷- ۸۱°، ۹°   ۱۸- ۲۴°، ۹۰°، ۹۶°

۱۹- ۱۳۲°، ۱۵°، $۶ء۱۲^\circ$ ۲۰- ۳۰°، ۹۰°، ۹۰°

۲۱- $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{\pi}{۲}$ ، $\frac{۲\pi}{۳}$ - $\frac{۱}{۲}$ نیم قطری زاویے

۲۲- (۱) $\frac{۳\pi}{۵}$، ۱۰۸° (۲) $\frac{۵\pi}{۷}$، $۱۲۸\frac{۴}{۷}^\circ$

(۳) $\frac{۳\pi}{۴}$، ۱۳۵° (۴) $\frac{۵\pi}{۶}$، ۱۵۰° (۵) $\frac{۱۵\pi}{۱۷}$، $۱۵۸\frac{۱۴}{۱۷}^\circ$

۲۳- ۸ اور ۴ ۲۴- ۱۰ اور ۸

۲۵- ۶ اور ۸ ۲۶- $\frac{\pi}{۳}$

۲۷- (۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ق $= ۷۵^\circ = ۸۳\frac{۱}{۳}$ ف

(۲) $\frac{۷\pi}{۱۸}$ ق $= ۷۰^\circ = ۷۷\frac{۷}{۹}$ ف

(۳) $\frac{۵\pi}{۸}$ ق $= ۱۱۲\frac{۱}{۲}^\circ = ۱۲۵$ ف

۲۸- (۱) ۴ بجکر $۷\frac{۷}{۱۱}$ اور ۳۶ منٹ پر

(۲) ۷ بجکر $۲۸\frac{۴}{۱۱}$ اور ۴۸ منٹ پر

امثلہ ۴ (صفحات ۲۸ - ۳۱)

[فرض کرو کہ $\pi = ۳٫۱۴۱۵۹.....$ اور $\frac{۱}{\pi} = ۰٫۳۱۸۳۱$]

۱- $۲۰ء۴۵۴^\circ$ تقریباً ۲- $\frac{۳}{۵}$ نیم قطری، $۳۴^\circ ۲۲' ۴۸ء۹''$

۳- ۶۸ء۷۵ انچ تقریباً ۴- ۰۰۵۲۳۶ء۰ انچ تقریباً

۵- ۲۴ء۵۵۵ انچ تقریباً ۶- $۱^\circ ۲۵' ۵۷''$ تقریباً

۷- ۳۹۵۹٫۸ میل تقریباً ۸- π فٹ = ۳٫۱۴۱۵۹ فٹ

۹- ۴:۵ ۱۰- ۳٫۱۴۱۶

۱۱- $\frac{۴\pi}{۳۵}$، $\frac{۹\pi}{۳۵}$، $\frac{۱۴\pi}{۳۵}$، $\frac{۱۹\pi}{۳۵}$، $\frac{۲۴\pi}{۳۵}$ نیم قطری

۱۲- °۶۵ ′۲۴ ″۳۰٫۴ ۱۳- ۲۰۶۲٫۶۵ فٹ تقریباً

۱۴- ۱٫۵۳۵۹ فٹ تقریباً ۱۵- ۲۶۲٫۶ فٹ تقریباً

۱۶- ۳۲۱۴۲٫۹ فٹ تقریباً ۱۷- ۳۸۱۹۷٫۲ فٹ تقریباً

۱۸- ۱۹٫۰۹۹ ۱۹- ۱۱۰۵٫۸ میل

۲۰- ۲۲۸۸۳۳ میل ۲۱- ۲:۱۶۰۰، ۶۸۷۵٫۵ تقریباً

۲۲- ۴۷۸×۱۰^{۱} میل

امثلہ ۶ (صفحہ ۴۶-۴۷)

۵- $\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$، $\frac{۱}{\sqrt{۱۵}}$، وغیرہ ۶- $\frac{۱۲}{۵}$، $\frac{۸}{۱۳}$

۷- $\frac{۱۱}{۶۰}$، $\frac{۶۰}{۶۱}$، $\frac{۶۱}{۶۰}$ ۸- $\frac{۳}{۵}$، $\frac{۴}{۳}$

۹- $\frac{۴۰}{۹}$، $\frac{۴۱}{۴۰}$ ۱۰- $\frac{۳}{۵}$، $\frac{۴}{۵}$، $\frac{۱}{۵}$، $\frac{۵}{۳}$

۱۱- $\frac{۳}{۴}$ ۱۲- $\frac{۱۵}{۱۷}$، $\frac{۱۷}{۸}$

۱۳- $\frac{۱}{۲}\sqrt{۵}$، $\frac{۳}{۵}\sqrt{۵}$ ۱۴- ۱ یا $\frac{۳}{۵}$

۱۵- $\frac{۳}{۵}$ یا $\frac{۵}{۱۳}$ ۱۶- $\frac{۵}{۱۳}$

۱۷- $\frac{۱۲}{۱۳}$ ۱۸- $\frac{۱}{۳۶}$ یا ۱

۱۹- $\frac{۱}{۲}$ ۲۰- $\frac{۱}{۳۶}$

۲۱- $۱+\sqrt{۲}$ ۲۲- $\frac{(۱+لا)لا۲}{۲لا^۲+۲لا+۱}$ ، $\frac{۲لا+۱}{۲لا^۲+۲لا+۱}$

امثلہ ۸ (صفحات ۶۴-۶۸)

۱- ...۳۴۶ء۳۴ فٹ ، ۲۰ فٹ ۲- ۱۶۰ فٹ

۳- ۲۲۵ فٹ ۴- ۶ء۱۳۶ فٹ

۵- ...۳ء۱۴۶ فٹ ۶- ...۹ء۳۶۷ گز ، ...۳ء۵۴۴ گز

۷- ...۶ء۸۶ فٹ ۸- ...۹ء۱۱۵۳۵ فٹ

۹- ...۴۶ء۸۷۸ فٹ

۱۰- ...۳ء۳۴ فٹ : ایک ستون سے ۷۵ فٹ کے فاصلہ پر

۱۱- ...۱ء۶۴ ۹۴ فٹ ، ...۱ء۶۴ ۵۴ فٹ

۱۲- ...۶۶۰ء۱۳ میل ۱۳- °۳۰

۱۵- ۱۳ء۸۵۶۴ میل فی گھنٹہ

۱۶- ...۸ء۲۵ فٹ ، ...۹۸ء۷۰ فٹ ، ...۹۸ء۸۵ فٹ

۱۷- $۳۲\sqrt{۵}$ = ...۵۵ء۷۱ فٹ

۱۹- ...۱۰ میل فی گھنٹہ ۲۰- ...۶ء۸۶ گز

۲۱- ۶۹۲ء۸...... گز

امثلہ ۹ (صفحات ۹۱-۹۳)

۱- $\frac{۲۲۵۰}{۹۲۸۹}$ ″ ، $\frac{۲۵۰۰}{۹۲۸۹}$ ″ اور $\frac{۸۱}{۳۳۱}$ ″ نیم قطری زاویے

۲- ۶۸° ۴۵′ ۸ء۱۷″

۴- $\frac{۲ لا ما}{لا^۲ + ما^۲}$ ، $\frac{۲ لا ما}{لا^۲ - ما^۲}$

۸- $\frac{۱}{مس^۲ ا}$ - مس^۲ ا ۹- ط = ۶۰°

۱۰- ۱½ منٹ میں

امثلہ ۱۰ (صفحات ۱۰۶-۱۰۷)

۴- - ۳۶۶ء ، ۲ء۳۰۹۴

۵- -۱ء۳۶۶...... ، -۲ء۳۰۹۴

۶- ۰، ۲ ۷- ۱ء۴۱۴۲...... ، -۲

۸- ۱ء۳۶۶...... ، ۲ء۳۰۹۴......

۹- ۴۵° اور ۱۳۵° ۱۰- ۱۲۰° اور ۲۴۰°

۱۱- ۱۳۵° اور ۳۱۵° ۱۲- ۱۵۰° اور ۳۳۰°

۱۳- ۱۵۰° اور ۲۱۰° ۱۴- ۲۱۰° اور ۳۳۰°

۱۵- -جم ۲۵° ۱۶- جب ۶°

۱۷- -مس ۳۴° ۱۸- جب ۱۲°

۱۹-	جب ۱۷°	۲۰-	-مم ۲۴°
۲۱-	جم ۳۳°	۲۲-	جم ۲۸°
۲۳-	جم ۲۵°	۲۴-	جم ۳۰°
۲۵-	مم ۲۶°	۲۶-	-قم ۲۳°
۲۷-	-قم ۳۶°	۲۸-	منفی
۲۹-	منفی	۳۰-	مثبت
۳۱-	صفر	۳۲-	مثبت
۳۳-	مثبت	۳۴-	مثبت
۳۵-	منفی		

۳۶- $\frac{۱}{۳\sqrt{۲}}$ اور $\frac{-۲\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}}$ ، $\frac{-۱}{۳\sqrt{۲}}$ اور $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}}$

امثلہ ۱۱ (صفحات ۱۱۷ - ۱۱۹)

۱-	$ن\pi + (-۱)^{ن}\frac{\pi}{۶}$	۲-	$ن\pi - (-۱)^{ن}\frac{\pi}{۳}$
۳-	$ن\pi + (-۱)^{ن}\frac{\pi}{۴}$	۴-	$۲ن\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$
۵-	$۲ن\pi \pm \frac{\pi}{۶}$	۶-	$۲ن\pi \pm \frac{۳\pi}{۴}$
۷-	$ن\pi + \frac{\pi}{۳}$	۸-	$ن\pi + \frac{۳\pi}{۴}$
۹-	$ن\pi + \frac{\pi}{۴}$	۱۰-	$۲ن\pi \pm \frac{\pi}{۳}$
۱۱-	$ن\pi + (-۱)^{ن}\frac{\pi}{۳}$	۱۲-	$ن\pi \pm \frac{\pi}{۲}$

۱۳- $ن\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

۱۴- $ن\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

۱۵- $ن\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

۱۶- $ن\pi \pm \frac{\pi}{۴}$

۱۷- $ن\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

۱۸- $(۲ن+۱)\pi + \frac{\pi}{۴}$

۱۹- $۲ن\pi - \frac{\pi}{۶}$

۲۰- ۱۰۵° اور ۴۵°، $\left(ن + \frac{م}{۲}\right)\pi \pm \frac{\pi}{۶} + (-۱)^م \frac{\pi}{۱۲}$

اور $\left(ن - \frac{م}{۲}\right)\pi \mp \frac{\pi}{۶} + (-۱)^م \frac{\pi}{۱۲}$ جہاں م اور ن کوئی صحیح عدد ہیں۔

۲۱- $۱۸۷\frac{۱}{۲}^\circ$ اور $۱۴۲\frac{۱}{۲}^\circ$

$\left(ن + \frac{م}{۲}\right)\pi + \frac{\pi}{۸} \pm \frac{\pi}{۱۲}$ اور $\left(ن - \frac{م}{۲}\right)\pi - \frac{\pi}{۸} \pm \frac{\pi}{۱۲}$

۲۲- (۱) ۹۰° اور ۱۲۰° (۲) ۱۲۰° اور ۲۴۰° (۳) ۳۰° اور ۲۱۰°

۲۳- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۱ (۴) ۱ (۵) ۱

امثلہ ۱۲ (صفحہ ۱۲۰-۱۲۲)

۱- $ن\pi + (-۱)^ن \frac{\pi}{۶}$

۲- $۲ن\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

۳- $ن\pi + (-۱)^ن \frac{\pi}{۳}$

۴- $جم\,ط = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}$

۵- $ن\pi + (-۱)^ن \frac{\pi}{۱۰}$ یا $ن\pi - (-۱)^ن \frac{۳\pi}{۱۰}$ (دفعہ ۱۳۶)

- ط = ۲ن π ± π/۳ ۷- ط = ن π + π/۴ یا ن π + π/۳

- ط = ن π + ۲π/۳ یا ن π + ۵π/۹

- مس ط = ۱/ا یا -۱/ب ۱۰- ط = ن π ± π/۴

- ط = ۲ن π یا ۲ن π + π/۲

- ن π ± π/۹ ۱۳- ن π یا ۲ن π ± π/۳

- ۲ن π ± π/۳ یا ۲ن π ± π/۹

- جب ط = ۱ یا -۱/۲

- ن π/۵ + (-۱)^ن π/۲۰ ۱۷- ن π/۴ یا π(۲ن + ۱)/۱۰

- ۲ن π یا π(۲ن + ۱)/۵ ۱۹- ۲ر π/(م - ن) یا ۲ر π/(م + ن)

- (۲ن + ۱/۲) π/۵ یا ۲ن π - π/۲

- ۲ن π یا ۲ن π/۹

- (۲ر + ۱/۲) π/(م + ن) یا (۲ر - ۱/۲) π/(م - ن)

- (ن + ۱/۲) π/۹ ۲۴- (م + ۱/۲) π/(ن + ۱)

- ن π/۴ ± √(۱ + ن۲ π۲/۱۶) ۲۶- ن π ± π/۹

۲۷- $(ن+\frac{۱}{۲})\frac{\pi}{۳} \pm \frac{ع}{۳}$ ۲۸- $(ن+\frac{۱}{۲})\frac{\pi}{۴}$

۲۹- $\frac{\pi ن}{۳} \pm \frac{ع}{۳}$ ۳۰- $\pi ن \pm \frac{\pi}{۶}$

۳۱- $(ر+\frac{۱}{۲})\frac{\pi}{م-ن}$

۳۲- $مس\,ط = \frac{۲ن+۱ \pm \sqrt{۴ن^{۲}+۴ن-۱۵}}{۴}$ جہاں $ن > ۱$ یا < -۲

۳۳- $ط = (م+\frac{ن}{۲})\pi \pm \frac{\pi}{۶} + (-۱)^{ن}\frac{\pi}{۱۲}$

$ع = (م-\frac{ن}{۲})\pi \pm \frac{\pi}{۶} - (-۱)^{ن}\frac{\pi}{۱۲}$

۳۴- $\frac{۱}{۵}\left[(۶م-۴ن)\pi \pm \frac{\pi}{۲} \mp \frac{۲\pi}{۳}\right]$ اور

$\frac{۱}{۵}\left[(۶ن-۴م)\pi \pm \pi \mp \frac{\pi}{۳}\right]$

۳۵- ۴۵° اور ۶۰° ۳۶- $\frac{۱}{۳}$ یا $\frac{۵}{۳}$

۳۷- $\pm \frac{۱}{۳}\sqrt{۵}$ ، $\pm \frac{۱}{۲}\sqrt{۵}$

امثلہ ۱۳ (صفحات ۱۲۷-۱۳۱)

۱- $-\frac{۱۳۳}{۲۰۵}$ ، $-\frac{۸۴}{۲۰۵}$ ۲- $\frac{۱۵۹۶}{۳۴۴۵}$ ، $\frac{۳۴۴۴}{۳۴۴۵}$

۳- $\frac{۲۲۰}{۲۲۱}$ ، $\frac{۱۷۱}{۲۲۱}$ ، $-\frac{۲۲۰}{۲۱}$

امثلہ ۱۴ (صفحات ۱۳۶ - ۱۳۹)

۳۰- ۲ جب (ط + ن فہ) جب $\frac{۳ فہ}{۲}$

۳۱- ۲ جب (ط + ن فہ) جم $\frac{فہ}{۲}$

امثلہ ۱۵ (صفحات ۱۴۰ - ۱۴۱)

۱- جم ۲ط - جم ۱۲ط　　۲- جب ۱۲ط - جب ۲ط

۳- جم ۱۴ط + جم ۸ط　　۴- جم ۱۲° - جم ۱۲۰°

امثلہ ۱۶ (صفحات ۱۴۵ - ۱۴۶)

۱- ۳، $\frac{۹}{۱۳}$　　۳- ۰۱

امثلہ ۱۷ (صفحات ۱۵۵ - ۱۵۸)

۱- (۱) $\pm\frac{۲۴}{۲۵}$ (۲) $\pm\frac{۱۲۰}{۱۶۹}$ (۳) $\frac{۲۰۱۶}{۴۲۲۵}$

۲- (۱) $\frac{۱۶۱}{۲۸۹}$ (۲) $-\frac{۷}{۲۵}$ (۳) $\frac{۱۱۹}{۱۶۹}$

۳- ۱

امثلہ ۱۸ (صفحات ۱۷۲ - ۱۷۶)

۱- $\frac{\pm ۲\sqrt{۲} \pm \sqrt{۳}}{۶}$، $\frac{\pm ۷\sqrt{۳} \pm ۴\sqrt{۲}}{۱۸}$

۲- $\pm\frac{۱۳}{۱۲}$، $\pm\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$ یا $\pm\frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$، $\frac{۱۶۹}{۱۲۰}$

۳- $\frac{۱۶}{۳۰۵}$ ، $\frac{۴۹}{۳۰۵}$ ۴- $\frac{۷}{۵\sqrt{۲}}$

۵- $\pm\frac{۱}{۳}$ ، $\pm\frac{۳}{۴}$ ۶- $\pm\frac{۳}{۴}$

۷- $\frac{\sqrt{۴}-\sqrt{۲}-\sqrt{۹}}{۲\sqrt{۲}}$ ، $\frac{\sqrt{۴}+\sqrt{۲}+\sqrt{۹}}{۲\sqrt{۲}}$ ، $\sqrt{۲}-۱$

$-(۱+\sqrt{۲})+\sqrt{۴+۲\sqrt{۲}}$

۸- $\sqrt{\frac{۴-ل^{۲}-ب^{۲}}{ل^{۲}+ب^{۲}}}$ ۲۳- + اور -

۲۴- - اور -   ۲۵- - اور -

۲۹- (۱) $۲ن\pi+\frac{\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi+\frac{۳\pi}{۴}$

(۲) $۲ن\pi+\frac{۳\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi+\frac{۵\pi}{۴}$

(۳) $۲ن\pi-\frac{\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi+\frac{\pi}{۴}$

(۴) $۲ن\pi+\frac{\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi+\frac{۳\pi}{۴}$

۳- (۱) $۲ن\pi-\frac{\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi+\frac{\pi}{۴}$

(۲) $۲ن\pi+\frac{۳\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi+\frac{۵\pi}{۴}$

(۳) $۲ن\pi+\frac{۵\pi}{۴}$ اور $۲ن\pi+\frac{۷\pi}{۴}$

مشقہ ۱۹ (صفحات ۱۸۰-۱۸۱)

۱۲- زاویہ کی جیب ۲ جیب ۱۸° کے برابر ہے

۱۳- $\frac{\text{ن}\pi}{۸}$ یا $(۲\text{ن} \pm \frac{۱}{۳})\frac{\pi}{۸}$

مشقہ ۲۱ (صفحات ۱۹۸-۲۰۰)

۱- $\frac{\text{ن}\pi}{۴}$ یا $\frac{۱}{۳}(۲\text{ن}\pi \pm \frac{\pi}{۳})$

۲- $(\text{ن} + \frac{۱}{۲})\frac{\pi}{۴}$ یا $(۲\text{ن} \pm \frac{۱}{۳})\frac{\pi}{۳}$

۳- $(\text{ن} + \frac{۱}{۲})\frac{\pi}{۲}$ یا $۲\text{ن}\pi$

۴- $(\text{ن} + \frac{۱}{۲})\frac{\pi}{۳}$ یا $\text{ن}\pi + (-۱)^{\text{ن}}\frac{\pi}{۶}$

۵- $\frac{۲\text{ن}\pi}{۳}$ یا $(\text{ن} + \frac{۱}{۴})\pi$ یا $(۲\text{ن} - \frac{۱}{۲})\pi$

۶- $\frac{\text{ن}\pi}{۳}$ یا $(۲\text{ن} \pm \frac{۱}{۳})\frac{\pi}{۴}$

۷- $(\text{ن} + \frac{۱}{۲})\frac{\pi}{۲}$ یا $۲\text{ن}\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

۸- $\frac{\text{ن}\pi}{۴}$ یا $(\text{ن} \pm \frac{۱}{۳})\pi$

۹- $۲\text{ن}\pi$ یا $(\frac{۲\text{ن}}{۳} + \frac{۱}{۲})\pi$

۱۰- $\text{ن}\pi + (-۱)^{\text{ن}}\frac{\pi}{۶}$ یا $\text{ن}\pi + (-۱)^{\text{ن}}\frac{\pi}{۱۰}$ یا $\text{ن}\pi - (-۱)^{\text{ن}}\frac{۳\pi}{۱۰}$

۱۱۔ $(\text{ن}+\frac{1}{2})\frac{\pi}{8}$ یا $(\text{ن}+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$

۱۲۔ $\text{م}\pi$ یا $\frac{1}{\text{ن}-1}\left[\text{م}\pi-(-1)^{\text{م}}\frac{\pi}{4}\right]$

۱۳۔ $2\text{م}\pi$ یا $\frac{2\text{م}\pi}{\text{ن}\pm1}$ ۱۴۔ $\frac{\sqrt{2}\,\pi}{\text{م}+\text{ن}}$ یا $(\sqrt{2}+1)\frac{\pi}{\text{م}-\text{ن}}$

۱۵۔ $(\sqrt{2}+1)\frac{\pi}{\text{م}\pm\text{ن}}$

۱۶۔ $\text{م}\pi$ یا $\frac{\text{م}\pi}{\text{ن}-1}$ یا $(\text{م}+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\text{ن}}$

۱۷۔ $2\text{ن}\pi-\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{1}{5}(2\text{ن}\pi-\frac{\pi}{2})$

۱۸۔ $\text{ن}\pi+(-1)^{\text{ن}}\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}$ ۱۹۔ $2\text{ن}\pi+\frac{\pi}{4}$

۲۰۔ $\text{ن}\pi+\frac{\pi}{6}+(-1)^{\text{ن}}\frac{\pi}{4}$ ۲۱۔ $2\text{ن}\pi+\frac{\pi}{4}\pm\text{د}$

۲۲۔ $21^\circ\,48'+\text{ن}\times180^\circ+(-1)^{\text{ن}}\left[98^\circ\,12'\right]$

۲۳۔ $2\text{ن}\times180^\circ+78^\circ\,58'$ ، $2\text{ن}\times180^\circ+27^\circ\,18'$

۲۴۔ $\text{ن}\times180^\circ+45^\circ$ ، $\text{ن}\times180^\circ+26^\circ\,34'$

۲۵۔ $2\text{ن}\pi+\frac{2\pi}{3}$ ۲۶۔ $2\text{ن}\pi$ یا $2\text{ن}\pi+\frac{\pi}{2}$

۲۷۔ $2\text{ن}\pi+\frac{\pi}{2}$ یا $2\text{ن}\pi-\frac{\pi}{3}$ ۲۸۔ $2\text{ن}\pi+\frac{\pi}{6}$

۲۹۔ $\text{ن}\pi$ ۳۰۔ $\text{جب ط}=\frac{\pm\sqrt{17}-1}{8}$

۳۱- جم ط = (√۱۷ - ۳)/۴ ۳۲- ن π ± π/۳ یا ن π + π/۲

۳۳- ۲ن π ± π/۳، ۲ن π ± π/۴ ۳۴- (ن + ۱/۴) π/۲

۳۵- ن π ± π/۴ ۳۶- ن π + π/۴

۳۷- ط = ن π/۲ یا ن π ± π/۳ نیز ط = ن π ± ع/۲ جہاں جم ع = ۱/۴

۳۸- (ن + ۱/۲) π/۳ ۳۹- ن π ± π/۳

امثلہ ۲۳ (صفحات ۲۲۳-۲۲۴)

۱- ۱̄ء۹۰۳۰۹، ۳̄ء۴۷۷۱۲۱۳، ۲̄ء۰۳۳۴۲۳۹، ۱̄ء۴۶۵۰۳۸۹

۲- ء۱۵۵۳۳۶۱، ۲ء۱۲۴۱۷۸۱، ء۵۳۸۸۳۴۰،
۱̄ء۰۷۵۹۶۲۳

۳- ۲، ۲̄، ۰، ۴̄، ۳̄، ۰، ۳ ۴- ء۳۱۲۹۳۶

۵- ۱ء۳۲۰۵۷، ۵ء۸۸۴۵۳، ء۴۶۱۷۹۱

۶- (۱) ۲۱ (۲) ۱۳ (۳) ۳۰ (۴) ساتواں (۵) ۲۱واں
(۶) ۳۲واں

۷- (۱) ۴ب / (ج - ب - ا) (۲) (ا + ۲ب) / (۴ج - ۳ب - ۲ا)

(۳) (۴ا + ۷ب) / (ا + ۳ب - ۲ج) (۴) ۲ب(۲ا - ب) / (۵اب + ۳اج - ۲ب۲ - بج)

اور ۲اب / (۵اب + ۳اج - ۲ب² - بج)

جہاں ا = لوک ۲ ، ب = لوک ۳ اور ج = لوک ۷

۸- ٫۲۲۲۱   ۹- ۸٫۶۴۱۵   ۱۰- ٫۶۱۹۲

۱۱- ۱٫۶۳۸۹   ۱۲- ۴٫۷۱۶۲   ۱۳- ۱۴۳۱

امثلہ ۲۴ (۲۳۸ - ۲۴۱)

۱- ۴٫۵۵۲۷۳۷۵ ، ۱٫۵۵۲۷۳۹۴

۲- ۴٫۷۶۸۹۵۲۹ ، ۳̅٫۷۶۸۹۵۰۲

۳- ۴۷۸٫۴۷۵ ، ٫۰۰۴۷۸۴۷۷۷

۴- ۲٫۵۸۳۶۷۴ ، ٫۰۲۵۸۳۶۲

۵- (۱) ۴٫۷۲۰۴۸۱۵ (۲) ۲٫۷۲۲۰۴۶۲

(۳) ۴̅٫۷۲۴۰۰۷۹ (۴) ۵۲۷۳٫۶۳

(۵) ٫۰۵۲۹۶۷۲۶ (۶) ۵٫۲۶۰۶۴

۶- ٫۶۸۷۰۴۱۷   ۷- ۴۳° ۲۳′ ۴۵٫″

۸- ٫۸۴۵۵۱۰۴ ، ٫۸۴۵۴۵۰۹

۹- ۳۲° ۱۶′ ۳۵″ ، ۳۲° ۱۶′ ۲۱″

۱۰- ۴٫۱۲۰۳۰۶۰ ، ۴٫۱۲۱۸۷۴۸

۱۱- ۴٫۳۹۹۳۲۶۳ ، ۴٫۳۹۷۶۸۲۳

۱۲- ۱۳° ۸′ ۴۷″   ۱۳- ۹٫۹۱۴۷۳۳۴

۱۴— ۳۴° ۴۴′ ۴۷″

۱۵— ۹٫۵۲۵۴۴۹۷ ، ۷۱° ۲۷′ ۴۳″

۱۶— ۱۰٫۰۲۲۹۴۱۴   ۱۷— ۱۸° ۲۷′ ۱۷″

۱۸— ۳۶° ۵۲′ ۱۲″

امثلہ ۲۵ (صفحات ۲۴۹-۲۵۱)

۱— ۱۳° ۲۷′ ۳۱″   ۲— ۲۲° ۱′ ۲۸″

۳— ۱٫۰۹۹۷۳۴۰ ، ۶۵° ۲۴′ ۱۲٫۵″

۴— ۹٫۶۱۱۹۸۵۰۹ ، ۲۲° ۳۶′ ۴۸″

۵— ۱۰° ۱۵′ ۳۴″   ۶— ۴۴° ۵۵′ ۵۵″

۷— (۱) ۹٫۷۲۷۹۰۴۳ (۲) ۹٫۹۲۷۰۸۵۷
(۳) ۱۰٫۱۹۵۸۹۱۷ (۴) ۱۰٫۰۷۵۷۹۰۷
(۵) ۱۰٫۲۰۰۱۳۳۷ (۶) ۱۰٫۰۷۲۵۰۲۷
(۷) ۹٫۷۲۴۵۱۶۲

۸— (۱) ۵۷° ۳۰′ ۲۴″ (۲) ۵۷° ۳۱′ ۵۸″
(۳) ۳۲° ۳۱′ ۱۵″ (۴) ۵۷° ۶′ ۳۹″

۹— ٫۵۳۷۳۶۰۲

۱۰— (۱) جم (لا-ما) قط لا قط ما (۲) جم (لا+ما) قط لا قط ما
(۳) جم (لا-ما) قم لا قط ما
(۴) جم (لا+ما) قم لا قط ما
(۵) مس^۲ لا (۶) مس لا مس ما

امثلہ ۲۶ (۲۶۰ تا ۲۶۱)

۱- $\frac{۱}{۵}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۹}{۷}$

۲- $\frac{۴}{۴۱\sqrt{۴۱}}$ ، $\frac{۳}{۵}$ اور $\frac{۸}{۴۱\sqrt{۵}}$ ، $\frac{۴۰}{۴۱}$ ، $\frac{۲۴}{۲۵}$ اور $\frac{۴۹۶}{۱۰۲۵}$

۳- $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۴}{۵}$ ، ۱ ۴- $\frac{۵}{۱۲}$ ، $\frac{۱۲}{۵}$ اور ∞

۵- $\frac{۴}{۵}$ ، $\frac{۵۶}{۶۵}$ اور $\frac{۱۲}{۱۳}$

۶- $\frac{۷}{۴۱}$ اور $\frac{۲۸۷}{۸۱۶}$ ۔ ۷- ۶۰° ، ۴۵° ، ۷۵°

امثلہ ۲۷ (صفحات ۲۶۸ تا ۲۷۲)

۲۳- $۱۶\frac{۴}{۵}$ فٹ ۲۵- $\frac{۲}{۵}$ ۲۸- $\frac{۳۱۳}{۳۳۸}$

امثلہ ۲۸ (صفحات ۲۷۵-۲۷۶)

۱- ۶۰ء۱۸۶ اور ۱۸ء۱۹۳

۲- ۲۶° ۳۳′ ۵۴″ ، ۶۳° ۲۶′ ۶″ ، $۱۰\sqrt{۵}$ فٹ

۳- ۴۸° ۳۵′ ۲۵″ ، ۳۶° ۵۲′ ۱۲″ ، ۹۴° ۳۲′ ۲۳″

۴- ۷۵° اور ۱۵°

امثلہ ۲۹ (۲۷۹ تا ۲۸۰)

۱- ۹۰° ۲- ۳۰° ۳- ۱۲۰°

۵- ۴۵° ، ۱۲۰° ، ۱۵°   ۶- ۳۵° ، ۹۰° ، ۵۵°

۷- ۸۵° ۵۹′ ۳۳″   ۸- ۷۷° ۱۹′ ۱۱″

۹- ۷۶° ۳۹′ ۵″   ۱۰- ۱۰۴° ۲۸′ ۳۹″

۱۱- ۵۶° ۱۵′ ۴″ ، ۵۹° ۵۱′ ۱۰″ ، ۹۳° ۵۳′ ۴۶″

۱۲- ۳۸° ۵۶′ ۳۳″ ، ۴۷° ۴۱′ ۷″ ، ۹۳° ۲۲′ ۲۰″

۱۳- ۱۳۰° ۴۲′ ۲۰٫۵″ ، ۳۳° ۲۷′ ۸٫۵″ اور
۲۵° ۵۰′ ۳۱″

امثلہ ۳۰ (صفحات ۲۸۶ تا ۲۹۰)

۱- ۹۳° ۱۳′ ۲″ ، ۴۳° ۵۸′ ۲۸″

۲- ۱۱۷° ۳۸′ ۴۵″ ، ۲۷° ۳۸′ ۴۵″

۳- ۸½ فٹ ، ۷۹° ۶′ ۲۴″ ، ۹۰° ، ۴۰° ۵۳′ ۳۶″

۴- ۸۷° ۲۷′ ۲۵٫۵″ ، ۳۲° ۳۲′ ۳۴٫۵″

۵- ۴۰° ۵۳′ ۳۶″ ، ۱۹° ۶′ ۲۴″ ، √۳ : ۲

۶- ۷۱° ۴۴′ ۳۰″ : ۴۸° ۱۵′ ۳۰″

۷- ۷۸° ۱۷′ ۴۰″ ، ۴۹° ۳۶′ ۲۰″

۸- ۱۰۸° ۱۲′ ۲۶″ ، ۴۹° ۲۷′ ۳۴″

۹- ا = ۴۵° ، ب = ۷۵° ، ج = ۶۰°

۱۰- ۶۰° ، ۱۵° ، ۱۰۵°

۱۱- ٫۸۹۶۵   ۱۴- ۳۰ گز ، ۱۲۰° ، ۳۰°

۱۵- ۷٫۵۸۹۴۶۷ ، ۱۰۸° ۲۶′ ۶″ ، ۱۸° ۲۶′ ۶″ ، ۵۳° ۷′ ۴۸″

۱۶- ۲٫۵۲۹۸۲۳

۱۷- ۲۲۶٫۸۶ ، ۷۳° ۳۴′ ۵۰″ ، ۳۹° ۴۵′ ۱۰″

۱۸- ا = ۸۳° ۷′ ۳۹″ ، ب = ۴۲° ۱۶′ ۲۱″ ،
ج = ۱۹۹٫۰۹۹

۱۹- ب = ۱۱۰° ۴۸′ ۱۵″ ، ج = ۲۶° ۵۶′ ۱۵″ اور
اَ = ۹۳٫۵۱۹۲

۲۰- ۷۳° ۱′ ۵۱″ اور ۴۸° ۴۱′ ۹″

۲۱- ۸۸° ۳۰′ ۱″ اور ۳۳° ۳۰′ ۵۹″

امثلہ ۳۱ (صفحات ۲۹۸ تا ۳۰۰)

۱- مثلث نہیں بن سکتا۔

۲- ب۱ = ۳۰° ، ج۱ = ۱۰۵° ، بَ۱ = √۲ اور ب۲ = ۹۰°
ج۲ = ۷۵° اور بَ۲ = √۶

۳- ب۱ = ۱۵° ، ج۱ = ۱۳۵° ، بَ۱ = ۵۰ (√۶ − √۲)
اور ب۲ = ۱۰۵° ، ج۲ = ۴۵° ، بَ۲ = ۵۰ (√۶ + √۲)

۵- ۴√۳ ± ۲√۵

۶- ۱۰۰√۳ ، مثلث قائم الزاویہ ہے

۸- ۳۴° ۲۹′ ۳۰″ اور ۱۰۱° ۳۰′ ۳۰″

۹۔ ۱ء۱۷ یا ۶۸ء۳

۱۰۔ (۱) مثلث قائم الزاویہ ہے اور ب = °۹۰

(۲) ب۱ = ۳۸۹۳ء۶۰، ب۱ = °۸ ′۴۱ اور ج۱ = °۱۳۱ ′۱۹

ب۲ = °۱۱۱ ′۱۹ اور ج۲ = °۳۸ ′۴۱

۱۱۔ °۹۵ ′۵۹ اور °۴۱ ′۵۶ ″۱۲

۱۲۔ ۵ء۹۸۸......... اور ......۲ء۹۶۷۱۸ میل فی گھنٹہ

۱۳۔ °۶۳ ′۲ ″۱۲ یا °۱۱۶ ′۵۷ ″۴۸

۱۴۔ °۶۲ ′۳۱ ″۲۳ اور °۱۰۲ ′۱۷ ″۳۷

یا °۱۱۷ ′۲۸ ″۳۷ اور °۴۷ ′۲۰ ″۲۳

۱۵۔ ۶۱ء۲۶۹۵

امثلہ ۳۲ (صفحات ۳۰۱۔۳۰۳)

۱۔ ۷ : ۹ : ۱۱ ۴۔ ۶۳ء۷۹۵

۵۔ ۱ میل، ۱ء۲۱۹۷۱۴ میل ۷۔......۲۰ء۹۷۶۱۶ فٹ

۸۔.......۹ء۸۵۶۷۳ اور......۵ء۴۳۷۸۴۶۸ فٹ

۹۔ ۴۳۵۲ء۴۰۴ فٹ

۱۰۔ ۲۳۳ء۲۸۸۳ گز ۱۱۔ ۲۲۲۹ گز

امثلہ ۳۳ (صفحات ۳۱۰۔۳۱۶)

۱۔ ۱۰۰ فٹ اونچا اور ۵۰ فٹ چوڑا، ۲۵ فٹ

۲۔ ۲۵ء۷۸۳۴ گز ۳۔......۳۳ء۰۷ فٹ، $\frac{1}{2}$۱۷ فٹ

۴— ۱۸ء۳ فٹ　　　۵— ۱۲۰ فٹ

۶— ح مس عہ مم بہ　　　۷— ۱۹۳۹ء۲ فٹ

۸— ۱۰۰ فٹ　　　۹— ۶۱ء۲۲۴ فٹ

۱۰— $۱۰۰\ ۲\sqrt{۲}$ فٹ

۱۵— ف ق = ب ف = ب ق = ۱۰۰۰ فٹ،

اف = $۵۰۰\ (\sqrt{۶} - \sqrt{۲})$ فٹ

اق = $۱۰۰۰\sqrt{۲}$ فٹ

۱۶— ء۳۲۱۱۹ میل

۱۷— ء۱۷۳۶۴۸۲ میل، ء۹۸۴۸۰۷۸ میل

۱۸— ۱۱۹ء۲۸۶۲ فٹ　　　۱۹— ۱۳۲ء۲۶۶ فٹ

۲۰— ۲۳۵ء۸۰۳۴ گز　　　۲۱— ۱ء۴۲۷۷۱ میل

۲۲— ۱۲۵ء۳۱۶۷ فٹ

امثلہ ۳۴ (صفحات ۳۲۱-۳۳۲)

۳— ۲۰ فٹ، ۴۰ فٹ

۴— ل قم جہ جہاں جہ سورج کا ارتفاع ہے،
جب جہ = $\frac{۱}{۲}$

۵— ۳ء۷۳۲ میل، رفتار ۱۲ء۳۴۲ میل فی گھنٹہ مشرق سے جنوب کی جانب میں ایک ایسا زاویہ بناتی ہے جس کا مماس $۱ + \sqrt{۳}$ ہے۔

۶۔۔۔۔ ۱۰٫۲۴۲۶ میل فی گھنٹہ

۷۔۔۔۔ ۱۶٫۳۹۲۳ میل ؛۔۔۔۔ ۱۴٫۶۹۷ میل

۸۔ ۲٫۳۹ میل، ۱٫۳۶۶ میل

۹۔ زاویہ مطلوبہ کا ماس $\frac{۲}{۳}$ ہے، $\frac{۹}{۵۲}$ گھنٹہ

۱۳۔ ج جب بہ قم (عہ + بہ)، ج جب عہ جب بہ قم (عہ + بہ)

۱۴۔ ۹ گز، ۲ گز ۱۶۔ $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱۲}{۳}$

۲۰۔ ٹیلے سے $\frac{۳۷۵}{۷}$ فٹ کے فاصلہ پر

۲۱۔ ج(۱- جب عہ) قطاعہ ۲۲۔ ۱۱۴٫۴۱۲۳ فٹ

۲۴۔ ۱۰۶۹٫۷۴۵۶۴۵ فٹ ۲۶۔ ایک ایسا زاویہ جس کا ماس ½ ہے

۲۹۔ °۴۵ ۳۲۔ °۱۸ ′۲۶ ″۶

۳۴۔ مس عہ قطبہ : ۱ ۳۷۔ ۹۱٫۸۹۶ فٹ

۳۸۔ ۱۹۶۰٫۹۵ گز ۳۹۔ ۲٫۴۷۵۸۳۲ میل

۴۰۔ ۳۳۳٫۴۹۳۲ فٹ

امثلہ ۳۵ (صفحات ۳۳۴ تا ۳۳۶)

۱۔ ۸۴ ۲۔ ۲۱۶ ۳۔ ۹۳۰

۴۔ ۳۷۲۰ ۵۔ ۲۷۰ ۶۔ ۱۱۷۰۹۶

۷۔ ۱۴۷۰ ۸۔۔۔۔ ۱٫۱۸۳

۱۲۔ ۳۵ گز اور ۲۶ گز ۱۳۔۔۔۔ ۱۴٫۹۴۱ انچ

۱۴- ۵، ۷ ۸ فٹ ۱۵- ۱۲۰°
۱۷- ۴۵° اور ۱۰۵° ، ۱۳۵° اور ۱۵°
۱۸-......۱۷۱۰۶۴ء ۱۷ مربع انچ

امثلہ ۳۶ (صفحات ۳۴۵ تا ۳۴۷)

۳- $\frac{1}{8}$۸ ، $\frac{1}{2}$۱ ، ۸ ، ۲ ، ۲۴ بالترتیب

امثلہ ۳۷ (۳۵۹ - ۳۶۴)

۳۵- ہر ایک دائرہ کے نصف قطر کا......۱۵۴۷ء ۲ یا ۱۵۴۷ گنا
۳۹- ا = $\frac{\pi}{4}$ + (-۱)ن × ۲ن × (ا - $\frac{\pi}{3}$)......

امثلہ ۳۸ — (صفحات ۳۷۱ تا ۳۷۳)

۱- (۱) ۳$\sqrt{105}$ مربع فٹ (۲) ۱۰ $\frac{1}{7}$ مربع فٹ
۳ $\frac{5}{7}$۱ اور $\frac{1}{2}$۲ فٹ

امثلہ ۳۹ (صفحات ۳۷۷ تا ۳۸۰)

۱- ۹۸ء ۷۷ مربع انچ ۲- ۵۳۵۹ء
۳- (۱)......۱۷۲۰ء ۱ مربع فٹ (۲)...... ۵۹۸ء ۲ مربع فٹ
(۳)......۸۲۸۴ء ۴ مربع فٹ (۴)...... ......۶۹۴ء ۷ مربع فٹ
(۵)......۱۹۶ء ۱۱ مربع فٹ

۴—۱ء۸۸۹۶ مربع فٹ ۵— ۳ء۳۱۳۶ مربع فٹ

۶— ۲ + √۲ : ۴ ، √(۲ + √۲) : ۲

۱۲— ۳ ۱۳— ۶

۱۵— ۹ ۱۶— ۲۰ اور ۱۰

۱۷— ۶ اور ۵ ، ۱۲ اور ۸ ، ۱۸ اور ۱۰

۲۲ اور ۱۱ ، ۲۷ اور ۱۳ ، ۴۲ اور ۱۴

۵۴ اور ۱۵ ، ۷۲ اور ۱۶ ، ۱۰۲ اور ۱۷

۱۶۲ اور ۱۸ ، ۳۴۲ اور ۱۹ اضلاع بالترتیب

۱۹— $\frac{۲}{۳}$√۳ ، √۶

امثلہ ۴۰ (صفحات ۳۸۶-۳۸۸)

۱— ء۰۰۲۰۴ ۲— ء۰۰۰۰۷

۳— ء۰۰۰۹ ۴— ء۹۹۹۹۹

۵— ۲۵۷۸۳ء۱۰۰۷۷ ۶— ۱ء۰۰۰۰۰۱۱

۷— ۳۴′ ۲۳″ ۸— ۹۸ ۴۰′ ۳۷″

۹— ۳۹′ ۴۲″ ۱۰— ۹ ۳۳′ ۴۴″

۱۱— ۱۱۴ء۵۹ انچ

امثلہ ۴۱ (صفحات ۳۸۹-۳۹۱)

۱— ۴۳۵ء۷۷ مربع فٹ ۲— ۴ء۹۰۸۷ مربع فٹ

۳— ۱۲۷° ۱۹′ ۲۶″ ۴— ۶ مربع فٹ

۵- ۱۱ء۰۰۰۴ انچ   ۶- ۴۴۶۲۵ء۰۰۰ انچ

۷- ۱۲ ۲/۳ ر

امثلہ ۴۲ (صفحات ۳۹۳-۳۹۵)

۱- ۱° ۸′ ۴۵″   ۲- ۱۷ء۲۳ میل

۳- ۱۶۱ء میل، ۱° ۴۸′ تقریباً

۸- تقریباً ۶۱۸۰۰ میٹر = تقریباً ۳۸ ½ میل

۹- ۳۹۶۰ میل

امثلہ ۴۳ (صفحات ۴۰۲-۴۰۶)

۲۸- ± √(جب ۲ بہ)   ۲۹- ۱/۶

۳۰- ± ۱/√۲   ۳۱- ۴√(۳/۷)

۳۲- ۱/۴   ۳۳- ن π یا ن π + π/۴

۳۴- √۳   ۳۵- √۵/۳

۳۶- √۳ یا -(۲ + √۳)

۳۷- √۳ یا ۲ - √۳

۳۸- ن یا ن² - ن + ۱   ۳۹- ½ √(۳/۷)

۴۰- ۱۳

۴۱- لا مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

لا^۲ - لا^۲(اب + اج + اد + ب ج + ب د + ج د) + اب ج د = ۰

۴۲ - لا = اب

۴۳ - اب + [۲√(ا^۲ - ۱) + ۲√(ب^۲ - ۱)]

۴۴ - (ا - ب) / (۱ + اب)

امثلہ ۴۴ (صفحات ۴۱۳ - ۴۱۶)

۱ - ½ جب ۲ ن طہ قم طہ

۲ - جم (۳ن - ۱)/۴ ا جب ۳ن/۴ ا قم ۳/۴ ا

۳ - ½

۷ - جب [عہ + (ن - ½) بہ] جب ن بہ قط بہ/۲

۸ - جب ن طہ/(ن - ۲)

۹ - جب ۲ن لا (جم ۲ن لا + جب ۲ن لا)(جم لا + جب لا) قم ۲ لا

۱۰ - ¼ [(ن + ۱) جب ۲ عہ - جب (۲ن + ۲) عہ] قم عہ

۱۱ - ½ جب (۲ن + ۲) عہ × جب ۲ن عہ قم عہ

۱۲ - ن/۲ جم ۲ عہ - ½ جم (ن + ۳) عہ جب ن عہ قم عہ

۱۳- [جم (۲ن عہ − عہ) جم (ن+۱) بہ − جم (۲ن عہ + عہ) جم ن بہ + جم عہ (۱ − جم ...)] / [۲ (جم بہ − جم ۲عہ)]

۱۴- ۱/۴ [(۲ن + ۱) جب عہ − جب (۲ن + ۱) عہ] قم عہ

۱۵- ن/۲ − ۱/۲ جم [۲ط + (ن − ۱) عہ] جب ن عہ قم عہ

۱۶- ۳/۴ جب (ن+۱)/۲ عہ جب ن عہ/۲ قم عہ/۲

− ۱/۴ جب ۳ (ن+۱)/۲ عہ × جب ۳ن عہ/۲ قم ۳عہ/۲

۱۷- ۱/۸ [۳ن − ۴ جم (ن + ۱) عہ جب ن عہ قم عہ

+ جم (۲ن + ۲) عہ جب ۲ن عہ قم ۲عہ]

۱۸- ۱/۸ [۳ن + ۴ جم (ن + ۱) عہ جب ن عہ قم عہ

+ جم (۲ن + ۲) عہ جب ۲ن عہ قم ۲عہ]

۱۹- ۱/۴ جب ن ط/۲ [جم (ن−۱)/۲ ط + جم (ن+۳)/۲ ط + جم (ن+۷)/۲ ط] قم ط/۲

+ ۱/۴ جب ۳ن ط/۲ جم (۳ن+۹)/۲ ط قم ۳ط/۲

۲۰- − ۱/۲ جب (۲عہ + ۲ن بہ) جب ۲ن بہ قط بہ

امثلہ ۴۵ (صفحات ۴۲۲−۴۲۳)

۱- ا² + ب² = ج² + د²

۲- ل²/ا² + م²/ب² − ۲لم/اب جم(ع − ب) = جب²(ع − ب)

۳- ا (۲ج² − د²) = ب د ج

۴- ا جب ھ + ب جم ع = √۲ب(ا + ب)

۵- ل²/ا² + م²/ب² = ۱

۶- ل²/ا² + م²/ب = ا + ب

۷- (ف² + ۱)² + ۲ق(ف² + ۱)(ف + ق) = ۴(ف + ق)²

۸- (ل² + م² − ب²)² = ا²[(ل + ب)² + م²]

۱۱- ا² + ب² = ۲ + ۲ جم ع

۱۲- ل م = (م − ل) مس ع

۱۳- ا²(ا − ج)(ا − د) = ب²(ب − ج)(ب − د)

۱۴- ۸ ب ج = ا{۴ ب² + (ب² − ج²)²}

۱۵- ل (ج² − ا² − ب²)

= م √((ا + ب + ج)(−ا + ب + ج)(ا − ب + ج)(ا + ب − ج))

۱۶- ب²[ل(ب² − ا²) + ا(۲ا + ب²)] = ۴ج³[ب² ل² + ا² م²]

متفرق مثالیں (صفحات ۴۳۲-۴۸۰)

۴- ۱۴۲ فٹ تقریباً ' ۴° ۳۰' تقریباً

۵- ۱۳' ، ۵۰' ۲۱' فٹ

۷- جب (بہ-عہ) = ± ۱√۱-ب ۱√۱-۱^۲ ∓ ۱ √۱ب

۹- ن π + ۳۸° ۷' ۲۷"

۱۰- (ن + ۱/۴) π/۳ ۱۴- ۷-۳√۵ : ۲

۲۱- (۱) طہ = ن π + (-۱)^ن (عہ + بہ)/۲

یا مس طہ = (۱- قم عہ قم بہ) مس (عہ + بہ)/۲

(۲) طہ = ن π یا (ن ± ۱/۳) π/۳

۲۲- ۵۱° ۱۹' ، ۲۸' ۷۸° ' ۰۸' ۱۳'

۲۳- ۱۲۹۸ فٹ تقریباً ' ۱۳° ۳۱' جنوب سے مشرق کی طرف کو۔

۲۸- ۸۰ فٹ ۲۹- ۱/۲ مس^۲ لا ' (لا + ما)/(۱ - لا ما)

۳۱- (ل^۲ + م^۲)(۱ - ن) = ۲م(۱ + ن)

۳۲- دو قیمتیں

۳۵- (م ± ۱/۱۲) π ' (ن ± ۱/۶) π

۴۷- (لہ² - ۱)³ = ۲۷ لہ² جم² عہ جب² عہ

۴۸- ۱٫۳۹ نیمقطری = ۷۹° ۳۰′ تقریباً

۴۹- جب² (بہ - جہ) قط² (عہ - بہ) قط² (عہ - جہ)

۵۲- ۱۱° ۱۲′ مشرق سے شمال کی طرف کو

۵۴- چھ قیمتیں ۵۸- ⅓ [ن ۲۲ + ۲۲/۲ - عہ - بہ - جہ]

۵۹- ۷۷٫۲۷ فٹ

۶۲- ج √(۲ا - ب) = ا √(۲ا) - (ا - ب) √ب

۶۳- ۱۱۸½° ۶۴- ۱° ۱۹′ + ۲۸½′ + ۵۰½′ تقریباً

۶۹- ا جب عہ جب بہ / √(جب (بہ - عہ) جب (بہ + عہ))

۷۳- جم (عہ + بہ + جہ + لہ) + جم (عہ + بہ - جہ - لہ)
+ جم (عہ - بہ + جہ - لہ) + جم (عہ - بہ - جہ + لہ) = جم (عہ + بہ + جہ + لہ)
- جم (عہ - بہ + جہ + لہ) - جم (عہ + بہ - جہ + لہ) - جم (عہ + بہ + جہ - لہ)

۷۶- ۹۶° ۱۹½′ تقریباً ۸۰- لا = - ۲٫۴۵۳۱

۸۲- مس طہ = ۲ ± √۱۱ یا ۲ ± √۳

مس فہ = ۲ ∓ √۱۱ یا ۲ ∓ √۳

۸۴- ۱۶٫۴۷ میل

۸۷- ۲۷م² = لا² (۹ - ۸ لا²)²

۹۴- ۲ا³ + ج = ۳ا (۱ + ب)

۹۵- جب (ن ط/۲) جب ((ن+۳) ط/۲) [۱ + ۲جم ۲ط] قم (ط/۲)

- جب ((۳ن+۹)/۲) ط جب (۳ن ط/۲) قم (۳ط/۲)

۹۶- ۲٫۵۵ نیمقطری = ۱۴۶° ۶' تقریباً

۱۰۴- مس ط = ۰، ۱، -۱، -۲

۱۰۸- ۲۳۷۹ فٹ   ۱۱۷- ۱۱° ۲۷'

۱۲۰- لا² + م² = ا² + ب²

۱۲۸- (ا² + ب²)² - ۴ا² = ۸ا ب / ج

۱۳۶- (لا + م)^(۲/۵) + (لا - م)^(۲/۵) = ۲

۱۳۸-

[م ج₁ + ن ا₂ + √(م² ج₁² + ن² ا₂² + ۲م ن ا₂ ج₁ جم(ع - جہ)) جب(ن ت + ہ)] / (م + ن)

جہاں مس ہ = (م ج₁ جب جہ + ن ا₂ جب ع) ÷ (م ج₁ جم جہ + ن ا₂ جم ع)

۱۴۶- م² + م جم ع = ۲   ۱۴۸- ۷۷ ۱/۳ %، ۶۳ ۱/۲°

۱۵۱- (لا² + م² + ۲ا لا)² = ۴ا² (لا² + م²)

۱۷۱ـ (۱ ـ لا^{2} ـ ما^{2}) جب (ع ـ ل) جب (ب ـ ج).

۱۷۶ـ ا^{3} + ب^{3} + ج^{3} ـ ۲ ب^{2}ج^{2} ـ ۲ ج^{2}ا^{2} ـ ۲ ا^{2}ب^{2} = ۰

۱۷۷ـ لا^{2} ما^{2} ـ ۴ لا ما = (لا + ما)^{2} مس^{2} (ب ـ ع)

۱۷۸ـ ب^{2} (۲$\sqrt{3}$ لا ـ ما)^{2} {۶ (لا^{2} ـ ما^{2}) ـ ب^{2}}

= ۸ (لا^{2} ـ ما^{2})^{3} + ۴ ب^{2} (لا^{2} ـ ما^{2})

۱۸۱ـ تین قیمتیں، ۲۹۹ تقریباً

۱۸۲ـ ۹۸ء نیمقطری = ۵۶ ۹ʹ تقریباً

۱۸۵ـ ۲ء۰۷ اور ـ ۱ء۲۳

عددوں کے لوگارتھم

طبعی جیوب، طبعی مماس

لوگارتمی جیوب اور لوگارتمی مماس وغیرہ

جدول اوّل

عددوں کے لوگارتم

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	فرق ۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱۰	۰۰۰۰۰	۰۰۴۳۲	۰۰۸۶۰	۰۱۲۸۴	۰۱۷۰۳	۰۲۱۱۹	۰۲۵۳۱	۰۲۹۳۸	۰۳۳۴۲	۰۳۷۴۳	۴۲	۸۳	۱۲۵	۱۶۶	۲۰۸	۲۴۸	۲۹۰	۳۳۱	۳۷۳
۱۱	۰۴۱۳۹	۰۴۵۳۲	۰۴۹۲۲	۰۵۳۰۸	۰۵۶۹۰	۰۶۰۷۰	۰۶۴۴۶	۰۶۸۱۹	۰۷۱۸۸	۰۷۵۵۵	۳۸	۷۶	۱۱۳	۱۵۲	۱۹۰	۲۲۷	۲۶۵	۳۰۲	۳۴۰
۱۲	۰۷۹۱۸	۰۸۲۷۹	۰۸۶۳۶	۰۸۹۹۱	۰۹۳۴۲	۰۹۶۹۱	۱۰۰۳۷	۱۰۳۸۰	۱۰۷۲۱	۱۱۰۵۹	۳۵	۷۰	۱۰۵	۱۴۰	۱۷۵	۲۰۹	۲۴۳	۲۷۸	۳۱۳
۱۳	۱۱۳۹۴	۱۱۷۲۷	۱۲۰۵۷	۱۲۳۸۵	۱۲۷۱۰	۱۳۰۳۳	۱۳۳۵۴	۱۳۶۷۲	۱۳۹۸۸	۱۴۳۰۱	۳۲	۶۵	۹۷	۱۲۹	۱۶۲	۱۹۳	۲۲۵	۲۵۸	۲۹۰
۱۴	۱۴۶۱۳	۱۴۹۲۲	۱۵۲۲۹	۱۵۵۳۴	۱۵۸۳۶	۱۶۱۳۷	۱۶۴۳۵	۱۶۷۳۲	۱۷۰۲۶	۱۷۳۱۹	۳۰	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۵۰	۱۸۰	۲۱۰	۲۴۰	۲۷۰
۱۵	۱۷۶۰۹	۱۷۸۹۸	۱۸۱۸۴	۱۸۴۶۹	۱۸۷۵۲	۱۹۰۳۳	۱۹۳۱۲	۱۹۵۹۰	۱۹۸۶۶	۲۰۱۴۰	۲۸	۵۶	۸۴	۱۱۲	۱۴۰	۱۶۸	۱۹۶	۲۲۴	۲۵۲
۱۶	۲۰۴۱۲	۲۰۶۸۳	۲۰۹۵۲	۲۱۲۱۹	۲۱۴۸۴	۲۱۷۴۸	۲۲۰۱۱	۲۲۲۷۲	۲۲۵۳۱	۲۲۷۸۹	۲۶	۵۳	۷۹	۱۰۵	۱۳۲	۱۵۸	۱۸۴	۲۱۰	۲۳۶
۱۷	۲۳۰۴۵	۲۳۳۰۰	۲۳۵۵۳	۲۳۸۰۵	۲۴۰۵۵	۲۴۳۰۴	۲۴۵۵۱	۲۴۷۹۷	۲۵۰۴۲	۲۵۲۸۵	۲۵	۵۰	۷۴	۹۹	۱۲۴	۱۴۹	۱۷۴	۱۹۹	۲۲۳
۱۸	۲۵۵۲۷	۲۵۷۶۸	۲۶۰۰۷	۲۶۲۴۵	۲۶۴۸۲	۲۶۷۱۷	۲۶۹۵۱	۲۷۱۸۴	۲۷۴۱۶	۲۷۶۴۶	۲۳	۴۶	۷۰	۹۳	۱۱۶	۱۳۹	۱۶۳	۱۸۸	۲۱۱
۱۹	۲۷۸۷۵	۲۸۱۰۳	۲۸۳۳۰	۲۸۵۵۶	۲۸۷۸۰	۲۹۰۰۳	۲۹۲۲۶	۲۹۴۴۷	۲۹۶۶۷	۲۹۸۸۵	۲۲	۴۵	۶۷	۸۹	۱۱۱	۱۳۳	۱۵۶	۱۰۸	۲۰۱

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	فرق ۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۲۰	۳۰۱۰۳	۳۰۳۲۰	۳۰۵۳۵	۳۰۷۵۰	۳۰۹۶۳	۳۱۱۷۵	۳۱۳۸۷	۳۱۵۹۷	۳۱۸۰۶	۳۲۰۱۵	۲۱	۴۲	۶۴	۸۵	۱۰۶	۱۲۷	۱۴۸	۱۷۰	۱۹۱
۲۱	۳۲۲۲۲	۳۲۴۲۸	۳۲۶۳۴	۳۲۸۳۸	۳۳۰۴۱	۳۳۲۴۴	۳۳۴۴۵	۳۳۶۴۶	۳۳۸۴۶	۳۴۰۴۴	۲۰	۴۰	۶۱	۸۱	۱۰۱	۱۲۱	۱۴۱	۱۶۲	۱۸۲
۲۲	۳۴۲۴۲	۳۴۴۳۹	۳۴۶۳۵	۳۴۸۳۰	۳۵۰۲۵	۳۵۲۱۸	۳۵۴۱۱	۳۵۶۰۳	۳۵۷۹۳	۳۵۹۸۴	۱۹	۳۹	۵۸	۷۷	۹۶	۱۱۶	۱۳۵	۱۵۴	۱۷۴
۲۳	۳۶۱۷۳	۳۶۳۶۱	۳۶۵۴۹	۳۶۷۳۶	۳۶۹۲۲	۳۷۱۰۷	۳۷۲۹۱	۳۷۴۷۵	۳۷۶۵۸	۳۷۸۴۰	۱۹	۳۷	۵۶	۷۴	۹۳	۱۱۱	۱۳۰	۱۴۸	۱۶۷
۲۴	۳۸۰۲۱	۳۸۲۰۲	۳۸۳۸۲	۳۸۵۶۱	۳۸۷۳۹	۳۸۹۱۷	۳۹۰۹۴	۳۹۲۷۰	۳۹۴۴۵	۳۹۶۲۰	۱۸	۳۶	۵۳	۷۱	۸۹	۱۰۶	۱۲۳	۱۴۲	۱۶۰
۲۵	۳۹۷۹۴	۳۹۹۶۷	۴۰۱۴۰	۴۰۳۱۲	۴۰۴۸۳	۴۰۶۵۴	۴۰۸۲۴	۴۰۹۹۳	۴۱۱۶۲	۴۱۳۳۰	۱۷	۳۴	۵۱	۶۸	۸۵	۱۰۲	۱۱۹	۱۳۶	۱۵۳
۲۶	۴۱۴۹۷	۴۱۶۶۴	۴۱۸۳۰	۴۱۹۹۶	۴۲۱۶۰	۴۲۳۲۵	۴۲۴۸۸	۴۲۶۵۱	۴۲۸۱۳	۴۲۹۷۵	۱۶	۳۳	۴۹	۶۶	۸۲	۹۸	۱۱۵	۱۳۱	۱۴۸
۲۷	۴۳۱۳۶	۴۳۲۹۷	۴۳۴۵۷	۴۳۶۱۶	۴۳۷۷۵	۴۳۹۳۳	۴۴۰۹۱	۴۴۲۴۸	۴۴۴۰۴	۴۴۵۶۰	۱۶	۳۲	۴۷	۶۳	۷۹	۹۵	۱۱۱	۱۲۶	۱۴۲
۲۸	۴۴۷۱۶	۴۴۸۷۱	۴۵۰۲۵	۴۵۱۷۹	۴۵۳۳۲	۴۵۴۸۴	۴۵۶۳۷	۴۵۷۸۸	۴۵۹۳۹	۴۶۰۹۰	۱۵	۳۰	۴۶	۶۱	۷۶	۹۱	۱۰۶	۱۲۲	۱۳۷
۲۹	۴۶۲۴۰	۴۶۳۸۹	۴۶۵۳۸	۴۶۶۸۷	۴۶۸۳۵	۴۶۹۸۲	۴۷۱۲۹	۴۷۲۷۶	۴۷۴۲۲	۴۷۵۶۷	۱۵	۲۹	۴۴	۵۹	۷۳	۸۸	۱۰۳	۱۱۸	۱۳۲

	عددوں کے لوگارتم										فرق								
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۳۰	۴۷۷۱۲	۴۷۸۵۷	۴۸۰۰۱	۴۸۱۴۴	۴۸۲۸۷	۴۸۴۳۰	۴۸۵۷۲	۴۸۷۱۴	۴۸۸۵۵	۴۸۹۹۶	۱۴	۲۹	۴۳	۵۷	۷۲	۸۶	۱۰۰	۱۱۴	۱۲۹
۳۱	۴۹۱۳۶	۴۹۲۷۶	۴۹۴۱۵	۴۹۵۵۴	۴۹۶۹۳	۴۹۸۳۱	۴۹۹۶۹	۵۰۱۰۶	۵۰۲۴۳	۵۰۳۷۹	۱۴	۲۸	۴۲	۵۵	۶۹	۸۳	۹۷	۱۱۰	۱۲۵
۳۲	۵۰۵۱۵	۵۰۶۵۱	۵۰۷۸۶	۵۰۹۲۰	۵۱۰۵۵	۵۱۱۸۸	۵۱۳۲۲	۵۱۴۵۵	۵۱۵۸۷	۵۱۷۲۰	۱۳	۲۷	۴۰	۵۳	۶۷	۸۰	۹۳	۱۰۷	۱۲۱
۳۳	۵۱۸۵۱	۵۱۹۸۳	۵۲۱۱۴	۵۲۲۴۴	۵۲۳۷۵	۵۲۵۰۴	۵۲۶۳۴	۵۲۷۶۳	۵۲۸۹۲	۵۳۰۲۰	۱۳	۲۶	۳۹	۵۲	۶۵	۷۸	۹۱	۱۰۴	۱۱۷
۳۴	۵۳۱۴۸	۵۳۲۷۵	۵۳۴۰۳	۵۳۵۲۹	۵۳۶۵۶	۵۳۷۸۲	۵۳۹۰۸	۵۴۰۳۳	۵۴۱۵۸	۵۴۲۸۳	۱۳	۲۵	۳۸	۵۰	۶۳	۷۶	۸۸	۱۰۱	۱۱۳
۳۵	۵۴۴۰۷	۵۴۵۳۱	۵۴۶۵۴	۵۴۷۷۷	۵۴۹۰۰	۵۵۰۲۳	۵۵۱۴۵	۵۵۲۶۷	۵۵۳۸۸	۵۵۵۰۹	۱۲	۲۴	۳۷	۴۹	۶۱	۷۳	۸۵	۹۸	۱۱۰
۳۶	۵۵۶۳۰	۵۵۷۵۱	۵۵۸۷۱	۵۵۹۹۱	۵۶۱۱۰	۵۶۲۲۹	۵۶۳۴۸	۵۶۴۶۷	۵۶۵۸۵	۵۶۷۰۳	۱۲	۲۴	۳۶	۴۸	۶۰	۷۱	۸۳	۹۵	۱۰۷
۳۷	۵۶۸۲۰	۵۶۹۳۷	۵۷۰۵۴	۵۷۱۷۱	۵۷۲۸۷	۵۷۴۰۳	۵۷۵۱۹	۵۷۶۳۴	۵۷۷۴۹	۵۷۸۶۴	۱۲	۲۳	۳۵	۴۶	۵۸	۷۰	۸۱	۹۳	۱۰۴
۳۸	۵۷۹۷۸	۵۸۰۹۲	۵۸۲۰۶	۵۸۳۲۰	۵۸۴۳۳	۵۸۵۴۶	۵۸۶۵۹	۵۸۷۷۱	۵۸۸۸۳	۵۸۹۹۵	۱۱	۲۳	۳۴	۴۵	۵۷	۶۸	۷۹	۹۰	۱۰۲
۳۹	۵۹۱۰۶	۵۹۲۱۸	۵۹۳۲۹	۵۹۴۳۹	۵۹۵۵۰	۵۹۶۶۰	۵۹۷۷۰	۵۹۸۷۹	۵۹۹۸۸	۶۰۰۹۷	۱۱	۲۲	۳۳	۴۴	۵۵	۶۶	۷۷	۸۸	۹۹

ق

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴۰	۶۰۲۰۶	۶۰۳۱۴	۶۰۴۲۲	۶۰۵۳۱	۶۰۶۳۸	۶۰۷۴۶	۶۰۸۵۳	۶۰۹۵۹	۶۱۰۶۶	۶۱۱۷۲	۱۱	۲۱	۳۲	۴۳	۵۴	۶۴	۷۵	۸۶	۹۶
۴۱	۶۱۲۷۸	۶۱۳۸۴	۶۱۴۹۰	۶۱۵۹۵	۶۱۷۰۰	۶۱۸۰۵	۶۱۹۰۹	۶۲۰۱۴	۶۲۱۱۸	۶۲۲۲۱	۱۰	۲۱	۳۱	۴۲	۵۲	۶۳	۷۳	۸۴	۹۴
۴۲	۶۲۳۲۵	۶۲۴۲۸	۶۲۵۳۱	۶۲۶۳۴	۶۲۷۳۷	۶۲۸۳۹	۶۲۹۴۱	۶۳۰۴۳	۶۳۱۴۴	۶۳۲۴۶	۱۰	۲۰	۳۱	۴۱	۵۱	۶۱	۷۲	۸۲	۹۲
۴۳	۶۳۳۴۷	۶۳۴۴۸	۶۳۵۴۸	۶۳۶۴۹	۶۳۷۴۹	۶۳۸۴۹	۶۳۹۴۹	۶۴۰۴۸	۶۴۱۴۷	۶۴۲۴۶	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰
۴۴	۶۴۳۴۵	۶۴۴۴۴	۶۴۵۴۲	۶۴۶۴۰	۶۴۷۳۸	۶۴۸۳۶	۶۴۹۳۳	۶۵۰۳۱	۶۵۱۲۸	۶۵۲۲۵	۱۰	۲۰	۲۹	۳۹	۴۹	۵۹	۶۸	۷۸	۸۸
۴۵	۶۵۳۲۱	۶۵۴۱۸	۶۵۵۱۴	۶۵۶۱۰	۶۵۷۰۶	۶۵۸۰۱	۶۵۸۹۶	۶۵۹۹۲	۶۶۰۸۷	۶۶۱۸۱	۱۰	۱۹	۲۹	۳۸	۴۸	۵۷	۶۷	۷۶	۸۶
۴۶	۶۶۲۷۶	۶۶۳۷۰	۶۶۴۶۴	۶۶۵۵۸	۶۶۶۵۲	۶۶۷۴۵	۶۶۸۳۹	۶۶۹۳۲	۶۷۰۲۵	۶۷۱۱۷	۹	۱۹	۲۸	۳۷	۴۶	۵۶	۶۵	۷۴	۸۴
۴۷	۶۷۲۱۰	۶۷۳۰۲	۶۷۳۹۴	۶۷۴۸۶	۶۷۵۷۸	۶۷۶۶۹	۶۷۷۶۱	۶۷۸۵۲	۶۷۹۴۳	۶۸۰۳۴	۹	۱۸	۲۷	۳۶	۴۶	۵۵	۶۴	۷۳	۸۲
۴۸	۶۸۱۲۴	۶۸۲۱۵	۶۸۳۰۵	۶۸۳۹۵	۶۸۴۸۵	۶۸۵۷۴	۶۸۶۶۴	۶۸۷۵۳	۶۸۸۴۲	۶۸۹۳۱	۹	۱۸	۲۷	۳۶	۴۵	۵۳	۶۲	۷۱	۸۰
۴۹	۶۹۰۲۰	۶۹۱۰۸	۶۹۱۹۷	۶۹۲۸۵	۶۹۳۷۳	۶۹۴۶۱	۶۹۵۴۸	۶۹۶۳۶	۶۹۷۲۳	۶۹۸۱۰	۹	۱۸	۲۶	۳۵	۴۴	۵۳	۶۱	۷۰	۷۹

	عددوں کے لوگارثم										فرق								
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۵۰	۶۹۸۹۷	۶۹۹۸۴	۷۰۰۷۰	۷۰۱۵۷	۷۰۲۴۳	۷۰۳۲۹	۷۰۴۱۵	۷۰۵۰۱	۷۰۵۸۶	۷۰۶۷۲	۹	۱۷	۲۶	۳۴	۴۳	۵۲	۶۰	۶۹	۷۷
۵۱	۷۰۷۵۷	۷۰۸۴۲	۷۰۹۲۷	۷۱۰۱۲	۷۱۰۹۶	۷۱۱۸۱	۷۱۲۶۵	۷۱۳۴۹	۷۱۴۳۳	۷۱۵۱۷	۸	۱۷	۲۵	۳۴	۴۲	۵۱	۵۹	۶۸	۷۶
۵۲	۷۱۶۰۰	۷۱۶۸۴	۷۱۷۶۷	۷۱۸۵۰	۷۱۹۳۳	۷۲۰۱۶	۷۲۰۹۹	۷۲۱۸۱	۷۲۲۶۳	۷۲۳۴۶	۸	۱۷	۲۵	۳۳	۴۲	۵۰	۵۸	۶۶	۷۵
۵۳	۷۲۴۲۸	۷۲۵۰۹	۷۲۵۹۱	۷۲۶۷۳	۷۲۷۵۴	۷۲۸۳۵	۷۲۹۱۶	۷۲۹۹۷	۷۳۰۷۸	۷۳۱۵۹	۸	۱۶	۲۴	۳۲	۴۱	۴۹	۵۷	۶۵	۷۳
۵۴	۷۳۲۳۹	۷۳۳۲۰	۷۳۴۰۰	۷۳۴۸۰	۷۳۵۶۰	۷۳۶۴۰	۷۳۷۱۹	۷۳۷۹۹	۷۳۸۷۸	۷۳۹۵۷	۸	۱۶	۲۴	۳۲	۴۰	۴۸	۵۶	۶۴	۷۲
۵۵	۷۴۰۳۶	۷۴۱۱۵	۷۴۱۹۴	۷۴۲۷۳	۷۴۳۵۱	۷۴۴۲۹	۷۴۵۰۷	۷۴۵۸۶	۷۴۶۶۳	۷۴۷۴۱	۸	۱۶	۲۳	۳۱	۳۹	۴۷	۵۵	۶۲	۷۰
۵۶	۷۴۸۱۹	۷۴۸۹۶	۷۴۹۷۴	۷۵۰۵۱	۷۵۱۲۸	۷۵۲۰۵	۷۵۲۸۲	۷۵۳۵۸	۷۵۴۳۵	۷۵۵۱۱	۸	۱۵	۲۳	۳۱	۳۹	۴۶	۵۴	۶۲	۶۹
۵۷	۷۵۵۸۷	۷۵۶۶۴	۷۵۷۴۰	۷۵۸۱۵	۷۵۸۹۱	۷۵۹۶۷	۷۶۰۴۲	۷۶۱۱۸	۷۶۱۹۳	۷۶۲۶۸	۸	۱۵	۲۳	۳۰	۳۸	۴۵	۵۳	۶۰	۶۸
۵۸	۷۶۳۴۳	۷۶۴۱۸	۷۶۴۹۲	۷۶۵۶۷	۷۶۶۴۱	۷۶۷۱۶	۷۶۷۹۰	۷۶۸۶۴	۷۶۹۳۸	۷۷۰۱۲	۷	۱۵	۲۲	۳۰	۳۷	۴۵	۵۲	۵۹	۶۷
۵۹	۷۷۰۸۵	۷۷۱۵۹	۷۷۲۳۲	۷۷۳۰۵	۷۷۳۷۹	۷۷۴۵۲	۷۷۵۲۵	۷۷۵۹۷	۷۷۶۷۰	۷۷۷۴۳	۷	۱۵	۲۲	۲۹	۳۷	۴۴	۵۱	۵۸	۶۶

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	فرق ۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۶۰	۷۷۸۱۵	۷۷۸۸۷	۷۷۹۶۰	۷۸۰۳۲	۷۸۱۰۴	۷۸۱۷۶	۷۸۲۴۷	۷۸۳۱۹	۷۸۳۹۰	۷۸۴۶۲	۷	۱۴	۲۲	۲۹	۳۶	۴۳	۵۰	۵۷	۶۵
۶۱	۷۸۵۳۳	۷۸۶۰۴	۷۸۶۷۵	۷۸۷۴۶	۷۸۸۱۷	۷۸۸۸۸	۷۸۹۵۸	۷۹۰۲۹	۷۹۰۹۹	۷۹۱۶۹	۷	۱۴	۲۱	۲۸	۳۵	۴۲	۴۹	۵۶	۶۴
۶۲	۷۹۲۳۹	۷۹۳۰۹	۷۹۳۷۹	۷۹۴۴۹	۷۹۵۱۸	۷۹۵۸۸	۷۹۶۵۷	۷۹۷۲۷	۷۹۷۹۶	۷۹۸۶۵	۷	۱۴	۲۱	۲۸	۳۵	۴۲	۴۹	۵۶	۶۳
۶۳	۷۹۹۳۴	۸۰۰۰۳	۸۰۰۷۲	۸۰۱۴۰	۸۰۲۰۹	۸۰۲۷۷	۸۰۳۴۶	۸۰۴۱۴	۸۰۴۸۲	۸۰۵۵۰	۷	۱۴	۲۱	۲۷	۳۴	۴۱	۴۸	۵۵	۶۲
۶۴	۸۰۶۱۸	۸۰۶۸۶	۸۰۷۵۴	۸۰۸۲۱	۸۰۸۸۹	۸۰۹۵۶	۸۱۰۲۳	۸۱۰۹۰	۸۱۱۵۸	۸۱۲۲۴	۷	۱۳	۲۰	۲۷	۳۴	۴۰	۴۷	۵۴	۶۰
۶۵	۸۱۲۹۱	۸۱۳۵۸	۸۱۴۲۵	۸۱۴۹۱	۸۱۵۵۸	۸۱۶۲۴	۸۱۶۹۰	۸۱۷۵۷	۸۱۸۲۳	۸۱۸۸۹	۷	۱۳	۲۰	۲۶	۳۳	۴۰	۴۶	۵۳	۵۹
۶۶	۸۱۹۵۴	۸۲۰۲۰	۸۲۰۸۶	۸۲۱۵۱	۸۲۲۱۷	۸۲۲۸۲	۸۲۳۴۷	۸۲۴۱۳	۸۲۴۷۸	۸۲۵۴۳	۷	۱۳	۲۰	۲۶	۳۳	۳۹	۴۶	۵۲	۵۹
۶۷	۸۲۶۰۷	۸۲۶۷۲	۸۲۷۳۷	۸۲۸۰۲	۸۲۸۶۶	۸۲۹۳۰	۸۲۹۹۵	۸۳۰۵۹	۸۳۱۲۳	۸۳۱۸۷	۶	۱۳	۱۹	۲۶	۳۲	۳۹	۴۵	۵۲	۵۸
۶۸	۸۳۲۵۱	۸۳۳۱۵	۸۳۳۷۸	۸۳۴۴۲	۸۳۵۰۶	۸۳۵۶۹	۸۳۶۳۲	۸۳۶۹۶	۸۳۷۵۹	۸۳۸۲۲	۶	۱۳	۱۹	۲۵	۳۲	۳۸	۴۴	۵۰	۵۷
۶۹	۸۳۸۸۵	۸۳۹۴۸	۸۴۰۱۱	۸۴۰۷۳	۸۴۱۳۶	۸۴۱۹۸	۸۴۲۶۱	۸۴۳۲۳	۸۴۳۸۶	۸۴۴۴۰	۶	۱۳	۱۹	۲۵	۳۱	۳۷	۴۴	۵۰	۵۶

عددوں کے لوگارثم											فرق								
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۷۰	۸۴۵۱۰	۸۴۵۷۲	۸۴۶۳۴	۸۴۶۹۶	۸۴۷۵۷	۸۴۸۱۹	۸۴۸۸۰	۸۴۹۴۲	۸۵۰۰۳	۸۵۰۶۵	۶	۱۲	۱۸	۲۵	۳۱	۳۷	۴۳	۴۹	۵۵
۷۱	۸۵۱۲۶	۸۵۱۸۷	۸۵۲۴۸	۸۵۳۰۹	۸۵۳۷۰	۸۵۴۳۱	۸۵۴۹۱	۸۵۵۵۲	۸۵۶۱۲	۸۵۶۷۳	۶	۱۲	۱۸	۲۴	۳۰	۳۶	۴۲	۴۹	۵۵
۷۲	۸۵۷۳۳	۸۵۷۹۴	۸۵۸۵۴	۸۵۹۱۴	۸۵۹۷۴	۸۶۰۳۴	۸۶۰۹۴	۸۶۱۵۳	۸۶۲۱۳	۸۶۲۷۳	۶	۱۲	۱۸	۲۴	۳۰	۳۶	۴۲	۴۸	۵۴
۷۳	۸۶۳۳۲	۸۶۳۹۲	۸۶۴۵۱	۸۶۵۱۰	۸۶۵۷۰	۸۶۶۲۹	۸۶۶۸۸	۸۶۷۴۷	۸۶۸۰۶	۸۶۸۶۴	۶	۱۲	۱۸	۲۴	۳۰	۳۵	۴۱	۴۷	۵۳
۷۴	۸۶۹۲۳	۸۶۹۸۲	۸۷۰۴۰	۸۷۰۹۹	۸۷۱۵۷	۸۷۲۱۶	۸۷۲۷۴	۸۷۳۳۲	۸۷۳۹۰	۸۷۴۴۸	۶	۱۲	۱۸	۲۳	۲۹	۳۵	۴۱	۴۷	۵۲
۷۵	۸۷۵۰۶	۸۷۵۶۴	۸۷۶۲۲	۸۷۶۷۹	۸۷۷۳۷	۸۷۷۹۵	۸۷۸۵۲	۸۷۹۱۰	۸۷۹۶۷	۸۸۰۲۴	۶	۱۲	۱۷	۲۳	۲۹	۳۵	۴۰	۴۶	۵۲
۷۶	۸۸۰۸۱	۸۸۱۳۸	۸۸۱۹۵	۸۸۲۵۲	۸۸۳۰۹	۸۸۳۶۶	۸۸۴۲۳	۸۸۴۸۰	۸۸۵۳۶	۸۸۵۹۳	۶	۱۱	۱۷	۲۳	۲۹	۳۴	۴۰	۴۶	۵۱
۷۷	۸۸۶۴۹	۸۸۷۰۵	۸۸۷۶۲	۸۸۸۱۸	۸۸۸۷۴	۸۸۹۳۰	۸۸۹۸۶	۸۹۰۴۲	۸۹۰۹۸	۸۹۱۵۴	۶	۱۱	۱۷	۲۲	۲۸	۳۴	۳۹	۴۵	۵۰
۷۸	۸۹۲۰۹	۸۹۲۶۵	۸۹۳۲۱	۸۹۳۷۶	۸۹۴۳۲	۸۹۴۸۷	۸۹۵۴۲	۸۹۵۹۷	۸۹۶۵۳	۸۹۷۰۸	۶	۱۱	۱۷	۲۲	۲۸	۳۳	۳۹	۴۴	۵۰
۷۹	۸۹۷۶۳	۸۹۸۱۸	۸۹۸۷۳	۸۹۹۲۷	۸۹۹۸۲	۹۰۰۳۷	۹۰۰۹۱	۹۰۱۴۶	۹۰۲۰۰	۹۰۲۵۵	۵	۱۱	۱۶	۲۲	۲۷	۳۳	۳۸	۴۴	۴۹

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۸۰	۹۰۳۰۹	۹۰۳۶۳	۹۰۴۱۷	۹۰۴۷۲	۹۰۵۲۶	۹۰۵۸۰	۹۰۶۳۴	۹۰۶۸۷	۹۰۷۴۱	۹۰۷۹۵	۵	۱۱	۱۶	۲۲	۲۷	۳۲	۳۸	۴۳	۴۹
۸۱	۹۰۸۴۹	۹۰۹۰۲	۹۰۹۵۶	۹۱۰۰۹	۹۱۰۶۲	۹۱۱۱۶	۹۱۱۶۹	۹۱۲۲۲	۹۱۲۷۵	۹۱۳۲۸	۵	۱۱	۱۶	۲۱	۲۷	۳۲	۳۷	۴۲	۴۸
۸۲	۹۱۳۸۱	۹۱۴۳۴	۹۱۴۸۷	۹۱۵۴۰	۹۱۵۹۳	۹۱۶۴۵	۹۱۶۹۸	۹۱۷۵۱	۹۱۸۰۳	۹۱۸۵۵	۵	۱۱	۱۶	۲۱	۲۶	۳۲	۳۷	۴۲	۴۷
۸۳	۹۱۹۰۸	۹۱۹۶۰	۹۲۰۱۲	۹۲۰۶۵	۹۲۱۱۷	۹۲۱۶۹	۹۲۲۲۱	۹۲۲۷۳	۹۲۳۲۴	۹۲۳۷۶	۵	۱۰	۱۶	۲۱	۲۶	۳۱	۳۶	۴۲	۴۷
۸۴	۹۲۴۲۸	۹۲۴۸۰	۹۲۵۳۱	۹۲۵۸۳	۹۲۶۳۴	۹۲۶۸۶	۹۲۷۳۷	۹۲۷۸۸	۹۲۸۴۰	۹۲۸۹۱	۵	۱۰	۱۵	۲۱	۲۶	۳۱	۳۶	۴۱	۴۶
۸۵	۹۲۹۴۲	۹۲۹۹۳	۹۳۰۴۴	۹۳۰۹۵	۹۳۱۴۶	۹۳۱۹۷	۹۳۲۴۷	۹۳۲۹۸	۹۳۳۴۹	۹۳۳۹۹	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۶	۴۱	۴۶
۸۶	۹۳۴۵۰	۹۳۵۰۰	۹۳۵۵۱	۹۳۶۰۱	۹۳۶۵۱	۹۳۷۰۲	۹۳۷۵۲	۹۳۸۰۲	۹۳۸۵۲	۹۳۹۰۲	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵
۸۷	۹۳۹۵۲	۹۴۰۰۲	۹۴۰۵۲	۹۴۱۰۱	۹۴۱۵۱	۹۴۲۰۱	۹۴۲۵۰	۹۴۳۰۰	۹۴۳۴۹	۹۴۳۹۹	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵
۸۸	۹۴۴۴۸	۹۴۴۹۸	۹۴۵۴۷	۹۴۵۹۶	۹۴۶۴۵	۹۴۶۹۴	۹۴۷۴۳	۹۴۷۹۲	۹۴۸۴۱	۹۴۸۹۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۲۹	۳۴	۳۹	۴۴
۸۹	۹۴۹۳۹	۹۴۹۸۸	۹۵۰۳۶	۹۵۰۸۵	۹۵۱۳۴	۹۵۱۸۲	۹۵۲۳۱	۹۵۲۷۹	۹۵۳۲۸	۹۵۳۷۶	۵	۱۰	۱۵	۱۹	۲۴	۲۹	۳۴	۳۹	۴۴

عددوں کے لوگارتم											فرق								
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۹۰	۹۵۴۲۴	۹۵۴۷۲	۹۵۵۲۱	۹۵۵۶۹	۹۵۶۱۷	۹۵۶۶۵	۹۵۷۱۳	۹۵۷۶۱	۹۵۸۰۹	۹۵۸۵۶	۵	۱۰	۱۴	۱۹	۲۴	۲۹	۳۴	۳۸	۴۳
۹۱	۹۵۹۰۴	۹۵۹۵۲	۹۵۹۹۹	۹۶۰۴۷	۹۶۰۹۵	۹۶۱۴۲	۹۶۱۹۰	۹۶۲۳۷	۹۶۲۸۴	۹۶۳۳۲	۵	۹	۱۴	۱۹	۲۴	۲۹	۳۳	۳۸	۴۳
۹۲	۹۶۳۷۹	۹۶۴۲۶	۹۶۴۷۳	۹۶۵۲۰	۹۶۵۶۷	۹۶۶۱۴	۹۶۶۶۱	۹۶۷۰۸	۹۶۷۵۵	۹۶۸۰۲	۵	۹	۱۴	۱۹	۲۳	۲۸	۳۳	۳۸	۴۲
۹۳	۹۶۸۴۸	۹۶۸۹۵	۹۶۹۴۲	۹۶۹۸۸	۹۷۰۳۵	۹۷۰۸۱	۹۷۱۲۸	۹۷۱۷۴	۹۷۲۲۰	۹۷۲۶۷	۵	۹	۱۴	۱۹	۲۳	۲۸	۳۳	۳۷	۴۲
	۹۷۳۱۳	۹۷۳۵۹	۹۷۴۰۵	۹۷۴۵۱	۹۷۴۹۷	۹۷۵۴۳	۹۷۵۸۹	۹۷۶۳۵	۹۷۶۸۱	۹۷۷۲۷	۵	۹	۱۴	۱۸	۲۳	۲۸	۳۲	۳۷	۴۱
۹۵	۹۷۷۷۲	۹۷۸۱۸	۹۷۸۶۴	۹۷۹۰۹	۹۷۹۵۵	۹۸۰۰۰	۹۸۰۴۶	۹۸۰۹۱	۹۸۱۳۷	۹۸۱۸۲	۵	۹	۱۴	۱۸	۲۳	۲۷	۳۲	۳۶	۴۱
۹۶	۹۸۲۲۷	۹۸۲۷۲	۹۸۳۱۸	۹۸۳۶۳	۹۸۴۰۸	۹۸۴۵۳	۹۸۴۹۸	۹۸۵۴۳	۹۸۵۸۸	۹۸۶۳۲	۵	۹	۱۳	۱۸	۲۳	۲۷	۳۲	۳۶	۴۱
۹۷	۹۸۶۷۷	۹۸۷۲۲	۹۸۷۶۷	۹۸۸۱۱	۹۸۸۵۶	۹۸۹۰۰	۹۸۹۴۵	۹۸۹۸۹	۹۹۰۳۴	۹۹۰۷۸	۴	۹	۱۳	۱۸	۲۲	۲۷	۳۱	۳۶	۴۰
۹۸	۹۹۱۲۳	۹۹۱۶۷	۹۹۲۱۱	۹۹۲۵۵	۹۹۳۰۰	۹۹۳۴۴	۹۹۳۸۸	۹۹۴۳۲	۹۹۴۷۶	۹۹۵۲۰	۴	۹	۱۳	۱۸	۲۲	۲۶	۳۱	۳۵	۴۰
۹۹	۹۹۵۶۴	۹۹۶۰۷	۹۹۶۵۱	۹۹۶۹۵	۹۹۷۳۹	۹۹۷۸۲	۹۹۸۲۶	۹۸۷۰	۹۹۹۱۳	۹۹۹۵۷	۴	۹	۱۳	۱۷	۲۲	۲۶	۳۰	۳۵	۳۹
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

طبعی جیوب

درجه	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
								فرق								
۰°	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۲۹۱	۰٫۰۰۵۸۲	۰٫۰۰۸۷۳	۰٫۰۱۱۶۴	۰٫۰۱۴۵۴	۸۹°	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۵	۱۷۵	۲۰۴	۲۳۳	۲۶۲
۱°	۰٫۰۱۷۴	۰٫۰۲۰۳۶	۰٫۰۲۳۲۷	۰٫۰۲۶۱۸	۰٫۰۲۹۰۸	۰٫۰۳۱۹۹	۸۸°	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۵	۱۷۵	۲۰۴	۲۳۳	۲۶۲
۲°	۰٫۰۳۴۹۰	۰٫۰۳۷۸۱	۰٫۰۴۰۷۱	۰٫۰۴۳۶۲	۰٫۰۴۶۵۳	۰٫۰۴۹۴۳	۸۷°	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۵	۱۷۵	۲۰۴	۲۳۳	۲۶۲
۳°	۰٫۰۵۲۳۴	۰٫۰۵۵۲۴	۰٫۰۵۸۱۴	۰٫۰۶۱۰۵	۰٫۰۶۳۹۵	۰٫۰۶۶۸۵	۸۶°	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۵	۱۷۴	۲۰۳	۲۳۲	۲۶۱
۴°	۰٫۰۶۹۷۶	۰٫۰۷۲۶۶	۰٫۰۷۵۵۶	۰٫۰۷۸۴۶	۰٫۰۸۱۳۶	۰٫۰۸۴۲۶	۸۵°	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۵	۱۷۴	۲۰۳	۲۳۲	۲۶۱
۵°	۰٫۰۸۷۱۶	۰٫۰۹۰۰۵	۰٫۰۹۲۹۵	۰٫۰۹۵۸۵	۰٫۰۹۸۷۴	۰٫۱۰۱۶۴	۸۴°	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۵	۱۷۴	۲۰۳	۲۳۲	۲۶۱
۶°	۰٫۱۰۴۵۳	۰٫۱۰۷۴۲	۰٫۱۱۰۳۱	۰٫۱۱۳۲۰	۰٫۱۱۶۰۹	۰٫۱۱۸۹۸	۸۳°	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۵	۱۷۴	۲۰۳	۲۳۲	۲۶۱
۷°	.۱۲۱۸۵	۰٫۱۲۴۷۴	۰٫۱۲۷۶۴	۰٫۱۳۰۵۳	۰٫۱۳۳۴۱	۰٫۱۳۶۲۹	۸۲°	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۵	۱۷۴	۲۰۲	۲۳۱	۲۶۰
۸°	۰٫۱۳۹۱۷	۰٫۱۴۲۰۵	۰٫۱۴۴۹۳	۰٫۱۴۷۸۱	۰٫۱۵۰۶۹	۰٫۱۵۳۵۶	۸۱°	۲۹	۵۸	۸۶	۱۱۵	۱۴۴	۱۷۳	۲۰۲	۲۳۰	۲۵۹
۹°	۰٫۱۵۶۴۳	۰٫۱۵۹۳۱	۰٫۱۶۲۱۸	۰٫۱۶۵۰۵	۰٫۱۶۷۹۲	۰٫۱۷۰۷۸	۸۰°	۲۹	۵۷	۸۶	۱۱۵	۱۴۴	۱۷۲	۲۰۱	۲۳۰	۲۵۸
	۶۰′	۵۰′	۴۰′	۳۰′	۲۰′	۱۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′

طبعی جیوب التمام

	٦٠	٥٠	٤٠	٣٠	٢٠	١٠		فرق ١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٣٠°	٠،٣٣٣٢٠٢	٠،٣٣٣٤٦٥	٠،٣٣٤٧٣٨	٠،٣٣٥٠٢١	٠،٣٣٥٢٩٣	٠،٣٣٥٥٦٥	٥٩°	٢٦	٥٥	٨٢	١٠٩	١٣٦	١٦٣	١٩١	٢١٨	٢٤٦
٣١°	،٣٥٨٣٦	،٣٦١٠٨	،٣٦٣٧٩	،٣٦٦٥٠	،٣٦٩٢١	،٣٧١٩١	٥٨°	٢٦	٥٣	٨١	١٠٨	١٣٦	١٦٣	١٩٠	٢١٧	٢٤٤
٣٢°	،٣٧٤٦١	،٣٧٧٣٠	،٣٧٩٩٩	،٣٨٢٦٨	،٣٨٥٣٧	،٣٨٨٠٥	٥٧°	٢٦	٥٤	٨١	١٠٨	١٣٥	١٦١	١٨٨	٢١٥	٢٤٢
٣٣°	،٣٩٠٧٣	،٣٩٣٤١	،٣٩٦٠٨	،٣٩٨٧٥	،٤٠١٤٢	،٤٠٤٠٨	٥٦°	٢٦	٥٣	٨٠	١٠٦	١٣٣	١٦٠	١٨٦	٢١٣	٢٤٠
٣٤°	،٤٠٦٧٤	،٤٠٩٣٩	،٤١٢٠٤	،٤١٤٦٩	،٤١٧٣٣	،٤١٩٩٨	٥٥°	٢٦	٥٣	٨٠	١٠٦	١٣٣	١٥٩	١٨٦	٢١٢	٢٣٨
٣٥°	٠،٤٢٢٦٢	٠،٤٢٥٢٥	٠،٤٢٧٨٨	٠،٤٣٠٥١	٠،٤٣٣١٣	٠،٤٣٥٧٥	٥٤°	٢٦	٥٢	٧٩	١٠٥	١٣١	١٥٧	١٨٤	٢١٠	٢٣٦
٣٦°	،٤٣٨٣٧	،٤٤٠٩٨	،٤٤٣٥٩	،٤٤٦٢٠	،٤٤٨٨٠	،٤٥١٤٠	٥٣°	٢٦	٥٢	٧٨	١٠٤	١٣٠	١٥٦	١٨٢	٢٠٨	٢٣٤
٣٧°	،٤٥٣٩٩	،٤٥٦٥٨	،٤٥٩١٧	،٤٦١٧٥	،٤٦٤٣٣	،٤٦٦٩٠	٥٢°	٢٦	٥٢	٧٧	١٠٣	١٢٩	١٥٥	١٨١	٢٠٦	٢٣٢
٣٨°	،٤٦٩٤٧	،٤٧٢٠٤	٤٧٤٦٠	،٤٧٧١٦	،٤٧٩٧١	،٤٨٢٢٦	٥١°	٢٦	٥١	٧٧	١٠٢	١٢٨	١٥٣	١٧٩	٢٠٤	٢٣٠
٣٩°	،٤٨٤٨١	،٤٨٧٣٥	،٤٨٩٨٩	،٤٩٢٤٢	،٤٩٤٩٥	،٤٩٧٤٨	٥٠°	٢٥	٥١	٧٦	١٠١	١٢٧	١٥٢	١٧٧	٢٠٣	٢٢٨

طبعی جیوب التمام

	طبعی جیوب							فرق								
	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۳۰°	۰٫۵۰۰۰۰	۰٫۵۰۲۵۲	۰٫۵۰۵۰۳	۰٫۵۰۷۵۴	۰٫۵۱۰۰۴	۰٫۵۱۲۵۴	۵۹°	۲۵	۵۰	۷۵	۱۰۰	۱۲۵	۱۵۰	۱۷۵	۲۰۰	۲۲۵
۳۱°	٫۵۱۵۰۴	٫۵۱۷۵۳	٫۵۲۰۰۲	٫۵۲۲۵۰	٫۵۲۴۹۸	٫۵۲۷۴۵	۵۸°	۲۵	۵۰	۷۴	۹۹	۱۲۴	۱۴۹	۱۷۴	۱۹۸	۲۲۳
۳۲°	٫۵۲۹۹۲	٫۵۳۲۳۸	٫۵۳۴۸۴	٫۵۳۷۳۰	٫۵۳۹۷۵	٫۵۴۲۲۰	۵۷°	۲۵	۴۹	۷۴	۹۸	۱۲۳	۱۴۷	۱۷۲	۱۹۶	۲۲۱
۳۳°	٫۵۴۴۶۴	٫۵۴۷۰۸	٫۵۴۹۵۱	٫۵۵۱۹۴	٫۵۵۴۳۶	٫۵۵۶۷۸	۵۶°	۲۴	۴۹	۷۳	۹۷	۱۲۲	۱۴۶	۱۷۰	۱۹۴	۲۱۹
۳۴°	٫۵۵۹۱۹	٫۵۶۱۶۰	٫۵۶۴۰۱	٫۵۶۶۴۱	٫۵۶۸۸۰	٫۵۷۱۱۹	۵۵°	۲۴	۴۸	۷۲	۹۶	۱۲۰	۱۴۴	۱۶۸	۱۹۲	۲۱۶
۳۵°	۰٫۵۷۳۵۸	۰٫۵۷۵۹۶	۰٫۵۷۸۳۳	۰٫۵۸۰۷۰	۰٫۵۸۳۰۶	۰٫۵۸۵۴۳	۵۴°	۲۴	۴۷	۷۱	۹۵	۱۱۹	۱۴۲	۱۶۶	۱۹۰	۲۱۳
۳۶°	٫۵۸۷۷۹	٫۵۹۰۱۴	٫۵۹۲۴۸	٫۵۹۴۸۲	٫۵۹۷۱۶	٫۵۹۹۴۹	۵۳°	۲۳	۴۷	۷۰	۹۳	۱۱۷	۱۴۰	۱۶۳	۱۸۷	۲۱۱
۳۷°	٫۶۰۱۸۲	٫۶۰۴۱۴	٫۶۰۶۴۵	٫۶۰۸۷۶	٫۶۱۱۰۶	٫۶۱۳۳۷	۵۲°	۲۳	۴۶	۷۰	۹۲	۱۱۶	۱۳۹	۱۶۲	۱۸۵	۲۰۸
۳۸°	٫۶۱۵۶۶	٫۶۱۷۹۵	٫۶۲۰۲۳	٫۶۲۲۵۱	٫۶۲۴۷۹	٫۶۲۷۰۶	۵۱°	۲۳	۴۶	۶۸	۹۱	۱۱۳	۱۳۶	۱۵۹	۱۸۲	۲۰۵
۳۹°	٫۶۲۹۳۲	٫۶۳۱۵۸	٫۶۳۳۸۳	٫۶۳۶۰۸	٫۶۳۸۳۲	٫۶۴۰۵۶	۵۰°	۲۲	۴۵	۶۷	۹۰	۱۱۲	۱۳۵	۱۵۷	۱۷۹	۲۰۲

طبعی جیوب

	۰'	۱۰'	۲۰'	۳۰'	۴۰'	۵۰'		فرق ۱'	۲'	۳'	۴'	۵'	۶'	۷'	۸'	۹'
۵۰°	۰٫۷۶۶۰۴	۰٫۷۶۷۹۱	۰٫۷۶۹۷۷	۰٫۷۷۱۶۲	۰٫۷۷۳۴۷	۰٫۷۷۵۳۱	۳۹°	۱۹	۳۷	۵۶	۷۴	۹۳	۱۱۱	۱۳۰	۱۴۸	۱۶۷
۵۱°	۷۷۷۱۵	۷۷۸۹۷	۷۸۰۷۹	۷۸۲۶۱	۷۸۴۴۲	۷۸۶۲۲	۳۸°	۱۸	۳۶	۵۴	۷۲	۹۱	۱۰۹	۱۲۷	۱۴۵	۱۶۳
۵۲°	۷۸۸۰۱	۷۸۹۸۰	۷۹۱۵۸	۷۹۳۳۵	۷۹۵۱۲	۷۹۶۸۸	۳۷°	۱۸	۳۵	۵۳	۷۱	۸۹	۱۰۶	۱۲۴	۱۴۲	۱۵۹
۵۳°	۷۹۸۶۴	۸۰۰۳۸	۸۰۲۱۲	۸۰۳۸۶	۸۰۵۵۸	۸۰۷۳۰	۳۶°	۱۷	۳۵	۵۲	۶۹	۸۷	۱۰۴	۱۲۱	۱۳۸	۱۵۶
۵۴°	۸۰۹۰۲	۸۱۰۷۲	۸۱۲۴۲	۸۱۴۱۲	۸۱۵۸۰	۸۱۷۴۸	۳۵°	۱۷	۳۴	۵۱	۶۸	۸۵	۱۰۱	۱۱۸	۱۳۵	۱۵۲
۵۵°	۰٫۸۱۹۱۵	۰٫۸۲۰۸۲	۰٫۸۲۲۴۸	۰٫۸۲۴۱۳	۸۲۵۷۷	۰٫۸۲۷۴۱	۳۴°	۱۶	۳۳	۴۹	۶۶	۸۲	۹۹	۱۱۵	۱۳۲	۱۴۸
۵۶°	۸۲۹۰۴	۸۳۰۶۶	۸۳۲۲۸	۸۳۳۸۹	۸۳۵۴۹	۸۳۷۰۸	۳۳°	۱۶	۳۲	۴۸	۶۴	۸۰	۹۷	۱۱۲	۱۲۸	۱۴۴
۵۷°	۸۳۸۶۷	۸۴۰۲۵	۸۴۱۸۲	۸۴۳۳۹	۸۴۴۹۵	۸۴۶۵۰	۳۲°	۱۶	۳۱	۴۷	۶۳	۷۸	۹۴	۱۱۰	۱۲۵	۱۴۱
۵۸°	۸۴۸۰۵	۸۴۹۵۹	۸۵۱۱۲	۸۵۲۶۴	۸۵۴۱۶	۸۵۵۶۷	۳۱°	۱۵	۳۰	۴۶	۶۱	۷۶	۹۱	۱۰۷	۱۲۲	۱۳۷
۵۹°	۸۵۷۱۷	۸۵۸۶۶	۸۶۰۱۵	۸۶۱۶۳	۸۶۳۱۰	۸۶۴۵۷	۳۰°	۱۵	۲۹	۴۴	۵۹	۷۴	۸۹	۱۰۳	۱۱۸	۱۳۳

	٦٠'	٥٠'	٤٠'	٣٠'	٢٠'	١٠'		١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٨٠°	۰٫۹۸۴۸۱	۰٫۹۸۵۳۱	۰٫۹۸۵۸۰	۰٫۹۸۶۲۹	۰٫۹۸۶۷۶	۰٫۹۸۷۲۳	٩°	۵	۱۰	۱۴	۱۹	۲۴	۲۹	۳۳	۳۸	۴۳
٨١°	۰٫۹۸۷۶۹	۰٫۹۸۸۱۴	۰٫۹۸۸۵۸	۰٫۹۸۹۰۲	۰٫۹۸۹۴۴	۰٫۹۸۹۸۶	٨°	۴	۹	۱۳	۱۶	۲۲	۲۹	۳۰	۳۴	۳۹
٨٢°	۰٫۹۹۰۲۶	۰٫۹۹۰۶۶	۰٫۹۹۱۰۶	۰٫۹۹۱۴۴	۰٫۹۹۱۸۲	۰٫۹۹۲۱۹	٧°	۴	۸	۱۱	۱۵	۱۹	۲۳	۲۶	۳۰	۳۴
٨٣°	۰٫۹۹۲۵۵	۰٫۹۹۲۹۰	۰٫۹۹۳۲۴	۰٫۹۹۳۵۶	۰٫۹۹۳۹۰	۰٫۹۹۴۲۱	٦°	۳	۶	۱۰	۱۳	۱۶	۲۰	۲۳	۲۶	۳۰
٨٤°	۰٫۹۹۴۵۲	۰٫۹۹۴۸۲	۰٫۹۹۵۱۱	۰٫۹۹۵۴۰	۰٫۹۹۵۶۷	۰٫۹۹۵۹۳	٥°	۳	۶	۸	۱۱	۱۳	۱۶	۲۰	۲۲	۲۵
٨٥°	۰٫۹۹۶۱۹	۰٫۹۹۶۴۳	۰٫۹۹۶۶۸	۰٫۹۹۶۹۲	۰٫۹۹۷۱۳	۰٫۹۹۷۳۴	٤°	۲	۵	۷	۹	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۱
٨٦°	۰٫۹۹۷۵۶	۰٫۹۹۷۷۴	۰٫۹۹۷۹۵	۰٫۹۹۸۱۳	۰٫۹۹۸۳۱	۰٫۹۹۸۴۶	٣°	۲	۴	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۴	۱۶
٨٧°	۰٫۹۹۸۶۳	۰٫۹۹۸۷۸	۰٫۹۹۸۹۲	۰٫۹۹۹۰۵	۰٫۹۹۹۱۷	۰٫۹۹۹۲۹	٢°	۱	۳	۴	۵	۷	۸	۹	۱۰	۱۲
٨٨°	۰٫۹۹۹۳۹	۰٫۹۹۹۴۹	۰٫۹۹۹۵۸	۰٫۹۹۹۶۶	۰٫۹۹۹۷۳	۰٫۹۹۹۷۹	١°									
٨٩°	۰٫۹۹۹۸۵	۰٫۹۹۹۸۹	۰٫۹۹۹۹۳	۰٫۹۹۹۹۶	۰٫۹۹۹۹۸	۱٫۰۰۰۰۰	٠									
٩٠°	۱٫۰۰۰۰															

طبعی جیوب التمام

طبعی مماس

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
												فرق				
۰°	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۲۹۱	۰٫۰۰۵۸۲	۰٫۰۰۸۷۳	۰٫۰۱۱۶۴	۰٫۰۱۴۵۵	۸۹°	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۶	۱۷۵	۲۰۴	۲۳۳	۲۶۲
۱°	٫۰۱۷۴۶	٫۰۲۰۳۶	٫۰۲۳۲۸	٫۰۲۶۱۹	٫۰۲۹۱۰	٫۰۳۲۰۱	۸۸°	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۶	۱۷۵	۲۰۴	۲۳۳	۲۶۲
۲°	٫۰۳۴۹۲	٫۰۳۷۸۳	٫۰۴۰۷۵	٫۰۴۳۶۶	٫۰۴۶۵۸	٫۰۴۹۴۹	۸۷°	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۶	۱۷۵	۲۰۴	۲۳۳	۲۶۲
۳°	٫۰۵۲۴۱	٫۰۵۵۳۳	٫۰۵۸۲۴	٫۰۶۱۱۶	٫۰۶۴۰۸	٫۰۶۷۰۰	۸۶°	۲۹	۵۸	۸۸	۱۱۷	۱۴۶	۱۷۵	۲۰۴	۲۳۴	۲۶۳
۴°	٫۰۶۹۹۳	٫۰۷۲۸۵	٫۰۷۵۷۸	٫۰۷۸۷۰	٫۰۸۱۶۳	٫۰۸۴۵۶	۸۵°	۲۹	۵۸	۸۸	۱۱۷	۱۴۶	۱۷۵	۲۰۴	۲۳۴	۲۶۳
۵°	۰٫۰۸۷۴۹	۰٫۰۹۰۴۲	۰٫۰۹۳۳۵	۰٫۰۹۶۲۹	۰٫۰۹۹۲۳	۰٫۱۰۲۱۶	۸۴°	۲۹	۵۹	۸۸	۱۱۸	۱۴۷	۱۷۶	۲۰۶	۲۳۵	۲۶۵
۶°	٫۱۰۵۱۰	٫۱۰۸۰۵	٫۱۱۰۹۹	٫۱۱۳۹۴	٫۱۱۶۸۸	٫۱۱۹۸۳	۸۳°	۲۹	۵۹	۸۸	۱۱۸	۱۴۷	۱۷۶	۲۰۶	۲۳۵	۲۶۵
۷°	٫۱۲۲۷۸	٫۱۲۵۷۴	٫۱۲۸۶۹	٫۱۳۱۶۵	٫۱۳۴۶۱	٫۱۳۷۵۸	۸۲°	۳۰	۵۹	۸۹	۱۱۸	۱۴۸	۱۷۸	۲۰۷	۲۳۷	۲۶۶
۸°	٫۱۴۰۵۴	٫۱۴۳۵۱	٫۱۴۶۴۸	٫۱۴۹۴۵	٫۱۵۲۴۳	٫۱۵۵۴۰	۸۱°	۳۰	۵۹	۸۹	۱۱۹	۱۴۹	۱۷۸	۲۰۸	۲۳۸	۲۶۷
۹°	٫۱۵۸۳۸	٫۱۶۱۳۷	٫۱۶۴۳۵	٫۱۶۷۳۴	٫۱۷۰۳۳	٫۱۷۳۳۳	۸۰°	۳۰	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۵۰	۱۷۹	۲۰۹	۲۳۹	۲۶۹

								فرق								
١٠°	٠ء١٧٦٣٣	٠ء١٧٩٣٣	٠ء١٨٢٣٣	٠ء١٨٥٣٤	٠ء١٨٨٣٥	٠ء١٩١٣٦	٤٩°	٣٠	٦٠	٩٠	١٢٠	١٥١	١٨١	٢١١	٢٤١	٢٧١
١١°	ء١٩٤٣٨	ء١٩٧٤٠	ء٢٠٠٤٢	ء٢٠٣٤٥	ء٢٠٦٤٨	ء٢٠٩٥٢	٤٨°	٣٠	٦١	٩١	١٢١	١٥٢	١٨٢	٢١٢	٢٤٢	٢٧٣
١٢°	ء٢١٢٥٦	ء٢١٥٦٠	ء٢١٨٦٤	ء٢٢١٦٩	ء٢٢٤٧٥	ء٢٢٧٨١	٤٧°	٣١	٦١	٩٢	١٢٢	١٥٣	١٨٣	٢١٤	٢٤٤	٢٧٥
١٣°	ء٢٣٠٨٧	ء٢٣٣٩٣	ء٢٣٧٠٠	ء٢٤٠٠٨	ء٢٤٣١٦	ء٢٤٦٢٤	٤٦°	٣١	٦٢	٩٢	١٢٣	١٥٤	١٨٥	٢١٦	٢٤٦	٢٧٧
١٤°	ء٢٤٩٣٣	ء٢٥٢٤٢	ء٢٥٥٥٢	ء٢٥٨٦٢	ء٢٦١٧٢	ء٢٦٤٨٣	٤٥°	٣١	٦٢	٩٣	١٢٤	١٥٥	١٨٦	٢١٧	٢٤٨	٢٧٩
١٥°	٠ء٢٦٧٩٥	٠ء٢٧١٠٧	٠ء٢٧٤١٩	٠ء٢٧٧٣٢	٠ء٢٨٠٤٦	٠ء٢٨٣٦٠	٤٤°	٣١	٦٣	٩٤	١٢٥	١٥٧	١٨٨	٢١٩	٢٥٠	٢٨٢
١٦°	ء٢٨٦٧٥	ء٢٨٩٩٠	ء٢٩٣٠٥	ء٢٩٦٢١	ء٢٩٩٣٨	ء٣٠٢٥٥	٤٣°	٣٢	٦٣	٩٥	١٢٦	١٥٨	١٩٠	٢٢١	٢٥٣	٢٨٥
١٧°	ء٣٠٥٧٣	ء٣٠٨٩١	ء٣١٢١٠	ء٣١٥٣٠	ء٣١٨٥٠	ء٣٢١٧١	٤٢°	٣٢	٦٤	٩٦	١٢٨	١٦٠	١٩٢	٢٢٤	٢٥٦	٢٨٨
١٨°	ء٣٢٤٩٢	ء٣٢٨١٤	ء٣٣١٣٦	ء٣٣٤٦٠	ء٣٣٧٨٣	ء٣٤١٠٨	٤١°	٣٢	٦٥	٩٧	١٢٩	١٦٢	١٩٤	٢٢٦	٢٥٩	٢٩١
١٩°	ء٣٤٤٣٣	ء٣٤٧٥٨	ء٣٥٠٨٥	ء٣٥٤١٢	ء٣٥٧٤٠	ء٣٦٠٦٨	٤٠°	٣٣	٦٥	٩٨	١٣١	١٦٤	١٩٧	٢٢٩	٢٦٢	٢٩٥
	٦٠	٥٠	٤٠	٣٠	٢٠	١٠		١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

طبعی مماس التمام

طبعی مماس

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۲۰°	٠٫٣٦٣٩٧٠	٠٫٣٦٧٢٦٨	٠٫٣٧٠٥٧٣	٠٫٣٧٣٨٨٥	٠٫٣٧٧٢٠٤	٠٫٣٨٠٥٣٠	۶۹°	۳۳	۶۶	۱۰۰	۱۳۳	۱۶۶	۱۹۹	۲۳۲	۲۶۵	۲۹۸
۲۱°	٫٣٨٣٨٦٤	٫٣٨٧٢٠٥	٫٣٩٠٥٥٤	٫٣٩٣٩١١	٫٣٩٧٢٧٥	٫٤٠٠٦٤٦	۶۸°	۳۳	۶۷	۱۰۱	۱۳۴	۱۶۸	۲۰۲	۲۳۶	۲۶۹	۳۰۲
۲۲°	٫٤٠٤٠٢٦	٫٤٠٧٤١٤	٫٤١٠٨٠٩	٫٤١٤٢١٤	٫٤١٧٦٢٥	٫٤٢١٠٤٦	۶۷°	۳۳	۶۸	۱۰۲	۱۳۶	۱۷۰	۲۰۵	۲۳۹	۲۷۳	۳۰۷
۲۳°	٫٤٢٤٤٧٥	٫٤٢٧٩١٢	٫٤٣١٣٥٨	٫٤٣٤٨١٢	٫٤٣٨٢٧٦	٫٤٤١٧٤٨	۶۶°	۳۵	۶۹	۱۰۳	۱۳۸	۱۷۳	۲۰۸	۲۴۲	۲۷۷	۳۱۱
۲۴°	٫٤٤٥٢٢٩	٫٤٤٨٧١٩	٫٤٥٢٢١٨	٫٤٥٥٧٢٦	٫٤٥٩٢٤٤	٫٤٦٢٧٧٢	۶۵°	۳۵	۷۰	۱۰۵	۱۴۰	۱۷۶	۲۱۱	۲۴۶	۲۸۱	۳۱۶
۲۵°	٠٫٤٦٦٣٠٨	٠٫٤٦٩٨٥٤	٠٫٤٧٣٤١٠	٠٫٤٧٦٩٧٦	٠٫٤٨٠٥٥١	٠٫٤٨٤١٣٧	۶۴°	۳۶	۷۱	۱۰۷	۱۴۳	۱۷۹	۲۱۴	۲۵۰	۲۸۶	۳۲۱
۲۶°	٫٤٨٧٧٣٣	٫٤٩١٣٣٩	٫٤٩٤٩٥٥	٫٤٩٨٥٨٢	٫٥٠٢٢١٩	٫٥٠٥٨٦٧	۶۳°	۳۶	۷۳	۱۰۹	۱۴۵	۱۸۲	۲۱۸	۲۵۴	۲۹۱	۳۲۷
۲۷°	٫٥٠٩٥٢٥	٫٥١٣١٩٥	٫٥١٦٨٧٥	٫٥٢٠٥٦٧	٫٥٢٤٢٧٠	٫٥٢٧٩٨٤	۶۲°	۳۷	۷۴	۱۱۱	۱۴۸	۱۸۵	۲۲۲	۲۵۹	۲۹۶	۳۳۳
۲۸°	٫٥٣١٧٠٩	٫٥٣٥٤٤٦	٫٥٣٩١٩٥	٫٥٤٢٩٥٥	٫٥٤٦٧٢٨	٫٥٥٠٥١٢	۶۱°	۳۸	۷۵	۱۱۳	۱۵۱	۱۸۹	۲۲۶	۲۶۴	۳۰۲	۳۳۹
۲۹°	٫٥٥٤٣٠٩	٫٥٥٨١١٨	٫٥٦١٩٣٩	٫٥٦٥٧٧٣	٫٥٦٩٦١٩	٫٥٧٣٤٧٨	۶۰°	۳۸	۷۷	۱۱۵	۱۵۴	۱۹۲	۲۳۰	۲۶۹	۳۰۷	۳۴۶

	۶۰	۵۰	۴۰	۳۰	۲۰	۱۰		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
								فرق								
۳۰	۰۹۵۷۷۳۵	۰۹۵۸۱۲۴	۹۵۸۵۱۳	۹۵۸۹۰۵	۰۹۷۹۲۹۷	۰۹۵۹۶۹۱	۵۹	۳۹	۷۸	۱۱۸	۱۵۷	۱۹۶	۲۳۵	۲۷۴	۳۱۳	۳۵۳
۳۱	۹۶۰۰۸۶	۹۶۰۴۸۳	۹۶۰۸۸۱	۹۶۱۲۸۰	۹۶۱۶۸۱	۹۶۲۰۸۳	۵۸	۴۰	۸۰	۱۲۰	۱۶۰	۲۰۰	۲۴۰	۲۸۰	۳۲۰	۳۶۰
۳۲	۹۶۲۴۸۷	۹۶۲۸۹۲	۹۶۳۲۹۹	۹۶۳۷۰۷	۹۶۴۱۱۷	۹۶۴۵۲۰	۵۷	۴۱	۸۲	۱۲۳	۱۶۴	۲۰۵	۲۴۵	۲۸۶	۳۲۷	۳۶۸
۳۳	۹۶۴۹۴۱	۹۶۵۳۵۵	۹۶۵۷۷۱	۹۶۶۱۸۹	۹۶۶۶۰۸	۹۶۷۰۲۸	۵۶	۴۲	۸۴	۱۲۶	۱۶۷	۲۰۹	۲۵۱	۲۹۳	۳۳۴	۳۷۶
۳۴	۹۶۷۴۵۱	۹۶۷۸۷۵	۹۶۸۳۰۱	۹۶۸۷۲۸	۹۶۹۱۵۷	۹۶۹۵۸۸	۵۵	۴۳	۸۶	۱۲۸	۱۷۱	۲۱۴	۲۵۷	۳۰۰	۳۴۲	۳۸۵
۳۵	۰۹۷۰۰۲۱	۰۹۷۰۴۵۵	۹۷۰۸۹۱	۰۹۷۱۳۲۹	۰۹۷۱۷۶۹	۰۹۷۲۲۱۱	۵۴	۴۴	۸۸	۱۳۱	۱۷۶	۲۲۰	۲۶۳	۳۰۷	۳۵۱	۳۹۵
۳۶	۹۷۲۶۵۴	۹۷۳۱۰۰	۹۷۳۵۴۶	۹۷۳۹۹۶	۹۷۴۴۴۷	۹۷۴۹۰۰	۵۳	۴۵	۹۰	۱۳۵	۱۸۰	۲۲۵	۲۷۰	۳۱۵	۳۶۰	۴۰۵
۳۷	۹۷۵۳۵۵	۹۷۵۸۱۲	۹۷۶۲۷۲	۹۷۶۷۳۳	۹۷۷۱۹۶	۹۷۷۶۶۱	۵۲	۴۶	۹۲	۱۳۹	۱۸۵	۲۳۱	۲۷۷	۳۲۴	۳۷۰	۴۱۶
۳۸	۹۷۸۱۲۹	۹۷۸۵۹۸	۹۷۹۰۷۰	۹۷۹۵۴۴	۹۸۰۰۲۰	۹۸۰۴۹۸	۵۱	۴۸	۹۵	۱۴۳	۱۹۰	۲۳۸	۲۸۵	۳۳۳	۳۸۰	۴۲۸
۳۹	۹۸۰۹۷۸	۹۸۱۴۶۱	۹۸۱۹۴۶	۹۸۲۴۳۴	۹۸۲۹۲۳	۹۸۳۴۱۵	۵۰	۴۹	۹۸	۱۴۶	۱۹۴	۲۴۵	۲۹۳	۳۴۲	۳۹۱	۴۴۰

طبعی مماس التمام

طبعی ماس

درجہ	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
											فرق					
۴۰°	۰٫۸۳۹۱۰	۰٫۸۴۴۰۶	۰٫۸۴۹۰۷	۰٫۸۵۴۰۸	۰٫۸۵۹۱۲	۰٫۸۶۴۱۹	۴۹°	۵۰	۱۰۱	۱۵۱	۲۰۱	۲۵۲	۳۰۲	۳۵۲	۴۰۲	۴۵۳
۴۱	۰٫۸۶۹۲۹	۰٫۸۷۴۴۱	۰٫۸۷۹۵۵	۰٫۸۸۴۷۳	۰٫۸۸۹۹۲	۰٫۸۹۵۱۵	۴۸	۵۲	۱۰۳	۱۵۵	۲۰۸	۲۶۰	۳۱۱	۳۶۳	۴۱۵	۴۶۷
۴۲	۰٫۹۰۰۴۰	۰٫۹۰۵۶۹	۰٫۹۱۰۹۹	۰٫۹۱۶۳۳	۰٫۹۲۱۷۰	۰٫۹۲۷۰۹	۴۷	۵۳	۱۰۶	۱۶۱	۲۱۴	۲۶۸	۳۲۱	۳۷۵	۴۲۹	۴۸۲
۴۳	۰٫۹۳۲۵۲	۰٫۹۳۷۹۶	۰٫۹۴۳۴۵	۰٫۹۴۸۹۴	۰٫۹۵۴۵۱	۰٫۹۶۰۰۸	۴۶	۵۵	۱۱۱	۱۶۶	۲۲۱	۲۷۷	۳۳۲	۳۸۷	۴۴۲	۴۹۸
۴۴	۰٫۹۶۵۶۹	۰٫۹۷۱۳۳	۰٫۹۷۷۰۰	۰٫۹۸۲۷۰	۰٫۹۸۸۴۳	۰٫۹۹۴۲۰	۴۵	۵۶	۱۱۳	۱۶۷	۲۲۹	۲۸۶	۳۴۳	۴۰۰	۴۵۷	۵۱۵
۴۵	۱٫۰۰۰۰۰	۱٫۰۰۵۸۳	۱٫۰۱۱۶۰	۱٫۰۱۶۴۱	۱٫۰۲۳۵۵	۱٫۰۲۹۵۲	۴۴	۵۹	۱۱۸	۱۶۸	۲۳۶	۲۹۶	۳۵۵	۴۱۳	۴۷۲	۵۳۳
۴۶	۱٫۰۳۵۵۳	۱٫۰۴۱۵۸	۱٫۰۴۷۶۶	۱٫۰۵۳۷۸	۱٫۰۵۹۹۴	۱٫۰۶۶۱۳	۴۳	۶۱	۱۲۳	۱۸۴	۲۴۴	۳۰۷	۳۶۸	۴۳۰	۴۹۱	۵۵۳
۴۷	۱٫۰۷۲۳۶	۱٫۰۷۸۶۴	۱٫۰۸۴۹۴	۱٫۰۹۱۳۱	۱٫۰۹۷۷۰	۱٫۱۰۴۱۳	۴۲	۶۳	۱۲۶	۱۹۱	۲۵۵	۳۱۹	۳۸۲	۴۴۴	۵۱۰	۵۷۴
۴۸	۱٫۱۱۰۶۱	۱٫۱۱۷۱۳	۱٫۱۲۳۶۹	۱٫۱۳۰۲۹	۱٫۱۳۶۹۳	۱٫۱۴۳۶۳	۴۱	۶۶	۱۳۲	۱۹۹	۲۶۵	۳۳۲	۳۹۷	۴۶۳	۵۳۰	۵۹۶
۴۹	۱٫۱۵۰۳۷	۱٫۱۵۷۱۵	۱٫۱۶۳۹۸	۱٫۱۷۰۸۵	۱٫۱۷۷۷۷	۱٫۱۸۴۷۴	۴۰	۶۹	۱۳۸	۲۰۷	۲۷۶	۳۴۵	۴۱۴	۴۸۳	۵۵۲	۶۲۰

	۶۰	۵۰	۴۰	۳۰	۲۰	۱۰		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۵۰	۱۵۱۹۱۶۵	۱۵۱۹۸۸۲	۱۵۲۰۵۹۳	۱۵۲۱۳۱۰	۱۵۲۲۰۳۱	۱۵۲۲۷۵۸	۳۹	۷۲	۱۴۴	۲۱۶	۲۸۸	۳۶۰	۴۳۱	۵۰۳	۵۷۵	۶۴۷
۵۱	۵۲۳۴۹۰	۵۲۴۲۲۶	۵۲۴۹۶۶	۵۲۵۷۱۶	۵۲۶۴۷۱	۵۲۷۲۳۰	۳۸	۷۵	۱۵۰	۲۲۵	۳۰۰	۳۷۶	۴۵۱	۵۲۶	۶۰۱	۶۷۶
۵۲	۵۲۷۹۹۴	۵۲۸۷۶۴	۵۲۹۵۴۱	۵۳۰۳۲۳	۵۳۱۱۱۰	۵۳۱۹۰۴	۳۷	۷۸	۱۵۷	۲۳۵	۳۱۴	۳۹۲	۴۷۱	۵۴۹	۶۲۸	۷۰۶
۵۳	۵۳۲۷۰۴	۵۳۳۵۱۱	۵۳۴۳۲۳	۵۳۵۱۴۲	۵۳۵۹۶۸	۵۳۶۸۰۰	۳۶	۸۲	۱۶۴	۲۴۷	۳۲۹	۴۱۱	۴۹۳	۵۷۶	۶۵۸	۷۴۰
۵۴	۵۳۷۶۳۸	۵۳۸۴۸۴	۵۳۹۳۳۶	۵۴۰۱۹۵	۵۴۱۰۶۱	۵۴۱۹۳۴	۳۵	۸۶	۱۷۲	۲۵۹	۳۴۵	۴۳۱	۵۱۷	۶۰۳	۶۹۰	۷۷۶
۵۵	۱۵۴۲۸۱۵	۱۵۴۳۷۰۳	۱۵۴۴۵۹۸	۱۵۴۵۵۰۱	۱۵۴۶۴۱۱	۱۵۴۷۳۳۰	۳۴	۹۱	۱۸۱	۲۷۲	۳۶۳	۴۵۳	۵۴۴	۶۳۴	۷۲۵	۸۱۶
۵۶	۵۴۸۲۵۶	۵۴۹۱۹۰	۵۵۰۱۳۳	۵۵۱۰۸۴	۵۵۲۰۴۳	۵۵۳۰۱۰	۳۳	۹۶	۱۹۱	۲۸۶	۳۸۲	۴۷۸	۵۷۳	۶۶۹	۷۶۴	۸۶۰
۵۷	۵۵۳۹۸۶	۵۵۴۹۷۲	۵۵۵۹۶۶	۵۵۶۹۶۹	۵۵۷۹۸۱	۵۵۹۰۰۲	۳۲	۱۰۱	۲۰۱	۳۰۲	۴۰۳	۵۰۳	۶۰۴	۷۰۵	۸۰۶	۹۰۶
۵۸	۵۶۰۰۳۳	۵۶۱۰۷۴	۵۶۲۱۲۵	۵۶۳۱۸۵	۵۶۴۲۵۶	۵۶۵۳۳۶	۳۱	۱۰۷	۲۱۳	۳۲۰	۴۲۶	۵۳۳	۶۳۹	۷۴۶	۸۵۲	۹۵۹
۵۹	۵۶۶۴۲۸	۵۶۷۵۳۰	۵۶۸۶۴۳	۵۶۹۷۶۶	۵۷۰۹۰۱	۵۷۲۰۴۶	۳۰	۱۱۳	۲۲۴	۳۳۹	۴۵۱	۵۶۵	۶۷۷	۷۹۰	۹۰۳	۱۰۱۶

طبعی مماس تمام

طبعی مماس

	٠′	١٠′	٢٠′	٣٠′	٤٠′	٥٠′		١′	٢′	٣′	٤′	٥′	٦′	٧′	٨′	٩′
								فرق								
٦٠°	١٫٧٣٢١	١٫٧٤٣٧	١٫٧٥٥٦	١٫٧٦٧٥	١٫٧٧٩٦	١٫٧٩١٧	٢٩°	١٢	٢٣	٣٦	٤٨	٦٠	٧٢	٨٣	٩٦	١٠٨
٦١°	١٫٨٠٤٠	١٫٨١٦٥	١٫٨٢٩١	١٫٨٤١٨	١٫٨٥٤٦	١٫٨٦٧٦	٢٨°	١٣	٢٥	٣٨	٥١	٦٣	٧٧	٨٩	١٠٢	١١٥
٦٢°	١٫٨٨٠٧	١٫٨٩٤٠	١٫٩٠٧٤	١٫٩٢١٠	١٫٩٣٤٧	١٫٩٤٨٦	٢٧°	١٣	٢٧	٤١	٥٤	٦٨	٨٢	٩٥	١٠٩	١٢٢
٦٣°	١٫٩٦٢٦	١٫٩٧٦٨	١٫٩٩١٢	٢٫٠٠٥٧	٢٫٠٢٠٤	٢٫٠٣٥٣	٢٦°	١٥	٢٩	٤٣	٥٨	٧٣	٨٨	١٠٢	١١٧	١٣١
٦٤°	٢٫٠٥٠٣	٢٫٠٦٥٥	٢٫٠٨٠٩	٢٫٠٩٦٥	٢٫١١٢٣	٢٫١٢٨٣	٢٥°	١٦	٣١	٤٧	٦٣	٧٩	٩٤	١١٠	١٢٦	١٤١
٦٥°	٢٫١٤٤٥	٢٫١٦٠٩	٢٫١٧٧٥	٢٫١٩٤٣	٢٫٢١١٣	٢٫٢٢٨٦	٢٤°	١٧	٣٤	٥١	٦٨	٨٥	١٠١	١١٨	١٣٥	١٥٢
٦٦°	٢٫٢٤٦٠	٢٫٢٦٣٧	٢٫٢٨١٧	٢٫٢٩٩٨	٢٫٣١٨٣	٢٫٣٣٦٩	٢٣°	١٨	٣٧	٥٥	٧٣	٩٢	١١٠	١٢٨	١٤٧	١٦٥
٦٧°	٢٫٣٥٥٩	٢٫٣٧٥٠	٢٫٣٩٤٥	٢٫٤١٤٢	٢٫٤٣٤٢	٢٫٤٥٤٥	٢٢°	٢٠	٤٠	٦٠	٨٠	١٠٠	١١٩	١٣٩	١٥٩	١٧٩
٦٨°	٢٫٤٧٥١	٢٫٤٩٦٠	٢٫٥١٧٢	٢٫٥٣٨٦	٢٫٥٦٠٥	٢٫٥٨٢٦	٢١°	٢٢	٤٣	٦٥	٨٧	١٠٩	١٣٠	١٥٢	١٧٣	١٩٥
٦٩°	٢٫٦٠٥١	٢٫٦٢٧٩	٢٫٦٥١١	٢٫٦٧٤٦	٢٫٦٩٨٥	٢٫٧٢٢٨	٢٠°	٢٣	٤٧	٧١	٩٥	١١٩	١٤٢	١٦٦	١٩٠	٢١٣

	۶۰'	۵۰'	۴۰'	۳۰'	۲۰'	۱۰'		۱'	۲'	۳'	۴'	۵'	۶'	۷'	۸'	۹'
۷۰°	۲٫۷۴۷۵	۲٫۷۷۲۵	۲٫۷۹۸۰	۲٫۸۲۳۹	۲٫۸۵۰۲	۲٫۸۷۷۰	۱۹°	۲۶	۵۲	۷۸	۱۰۴	۱۳۱	۱۵۷	۱۸۳	۲۰۹	۲۳۵
۷۱°	۲٫۹۰۴۲	۲٫۹۳۱۹	۲٫۹۶۰۰	۲٫۹۸۸۷	۳٫۰۱۷۸	۳٫۰۴۷۵	۱۸°	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۶	۱۴۵	۱۷۴	۲۰۲	۲۳۱	۲۶۰
۷۲°	۳٫۰۷۷۷	۳٫۱۰۸۴	۳٫۱۳۹۷	۳٫۱۷۱۶	۳٫۲۰۴۱	۳٫۲۳۷۱	۱۷°	۳۲	۶۴	۹۷	۱۲۹	۱۶۱	۱۹۳	۲۲۵	۲۵۸	۲۹۰
۷۳°	۳٫۲۷۰۹	۳٫۳۰۵۲	۳٫۳۴۰۲	۳٫۳۷۵۹	۳٫۴۱۲۴	۳٫۴۴۹۵	۱۶°	۳۶	۷۲	۱۰۸	۱۴۳	۱۸۱	۲۱۹	۲۵۳	۲۸۹	۳۲۵
۷۴°	۳٫۴۸۷۴	۳٫۵۲۶۱	۳٫۵۶۵۶	۳٫۶۰۵۹	۳٫۶۴۷۰	۳٫۶۸۹۱	۱۵°	۴۱	۸۱	۱۲۲	۱۶۳	۲۰۴	۲۴۴	۲۸۵	۳۲۶	۳۶۶
۷۵°	۳٫۷۳۲۱	۳٫۷۷۶۰	۳٫۸۲۰۸	۳٫۸۶۶۷	۳٫۹۱۳۶	۳٫۹۶۱۷	۱۴°	۴۶	۹۳	۱۳۹	۱۸۵	۲۳۲	۲۷۸	۳۲۵	۳۷۱	۴۱۸
۷۶°	۴٫۰۱۰۸	۴٫۰۶۱۱	۴٫۱۱۲۶	۴٫۱۶۵۳	۴٫۲۱۹۳	۴٫۲۷۴۷	۱۳°	۵۳	۱۰۷	۱۶۰	۲۱۳	۲۶۷	۳۲۰	۳۷۳	۴۲۷	۴۸۱
۷۷°	۴٫۳۳۱۵	۴٫۳۸۹۷	۴٫۴۴۹۴	۴٫۵۱۰۷	۴٫۵۷۳۶	۴٫۶۳۸۲	۱۲°	۶۲	۱۲۳	۱۸۶	۲۴۸	۳۱۱	۳۷۳	۴۳۵	۴۹۷	۵۵۹
۷۸°	۴٫۷۰۴۶	۴٫۷۷۲۹	۴٫۸۴۳۰	۴٫۹۱۵۲	۴٫۹۸۹۴	۵٫۰۶۵۸	۱۱°	۷۳	۱۴۶	۲۲۰	۲۹۳	۳۶۶	۴۳۹	۵۱۲	۵۸۶	۶۵۹
۷۹°	۵٫۱۴۴۶	۵٫۲۲۵۷	۵٫۳۰۹۳	۵٫۳۹۵۵	۵٫۴۸۴۵	۵٫۵۷۶۴	۱۰°	۸۸	۱۷۵	۲۶۳	۳۵۰	۴۳۸	۵۲۶	۶۱۳	۷۰۱	۷۸۸

طبعی مماس التمام

طبعی ماس

	۰'	۱۰'	۲۰'	۳۰'	۴۰'	۵۰'		۱'	۲'	۳'	۴'	۵'	۶'	۷'	۸'	۹'
۸۰°	۵٫۶۷۱۳	۵٫۷۶۹۴	۵٫۸۷۰۸	۵٫۹۷۵۸	۶٫۰۸۴۴	۶٫۱۹۷۰	۹	فرق بیان اس قدر جلدی بدلتے ہیں کہ درج نہیں کئے جا سکتے								
۸۱°	۶٫۳۱۳۸	۶٫۴۳۴۸	۶٫۵۶۰۶	۶٫۶۹۱۲	۶٫۸۲۶۹	۶٫۹۶۸۲	۸									
۸۲°	۷٫۱۱۵۴	۷٫۲۶۸۷	۷٫۴۲۸۷	۷٫۵۹۵۸	۷٫۷۷۰۴	۷٫۹۵۳۰	۷									
۸۳°	۸٫۱۴۴۳	۸٫۳۴۵۰	۸٫۵۵۵۵	۸٫۷۷۶۹	۹٫۰۰۹۸	۹٫۲۵۵۳	۶									
۸۴°	۹٫۵۱۴۴	۹٫۷۸۸۲	۱۰٫۰۷۸	۱۰٫۳۸۵	۱۰٫۷۱۲	۱۱٫۰۸۹	۵									
۸۵°	۱۱٫۴۳۰	۱۱٫۸۲۶	۱۲٫۲۵۱	۱۲٫۷۰۶	۱۳٫۱۹۷	۱۳٫۷۲۷	۴									
۸۶°	۱۴٫۳۰۱	۱۴٫۹۲۴	۱۵٫۶۰۵	۱۶٫۳۵۰	۱۷٫۱۶۹	۱۸٫۰۷۵	۳	صغیر زاویہ ن کا ماس التمام یا								
۸۷°	۱۹٫۰۸۱	۲۰٫۲۰۶	۲۱٫۴۷۰	۲۲٫۹۰۴	۲۴٫۵۴۲	۲۶٫۴۳۲	۲									
۸۸°	۲۸٫۶۳۶	۳۱٫۲۴۲	۳۴٫۳۶۸	۳۸٫۱۸۸	۴۲٫۹۶۴	۴۹٫۱۰۴	۱	۹۰ - ن کا ماس = $\frac{۳۴۳۷٫۷۷}{ن}$ تقریباً								
۸۹°	۵۷٫۲۹۰	۶۸٫۷۵۰	۸۵٫۹۴۰	۱۱۴٫۵۹	۱۷۱٫۸۹	۳۴۳٫۷۷	۰									
۹۰°	∞															
	۶۰'	۵۰'	۴۰'	۳۰'	۲۰'	۱۰'		۱'	۲'	۳'	۴'	۵'	۶'	۷'	۸'	۹'

طبعی ماس التمام

لوکارتھمی جیوب

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۰°	∞ −	۷٫۴۶۳۷۲۶	۷٫۷۶۴۷۵۶	۷٫۹۴۰۸۴۲	۸٫۰۶۵۷۷۶	۸٫۱۶۲۶۸۱	۸۹°	فرق یہاں اس قدر جلدی بدلتے ہیں کہ انکا درج کرنا								
۱°	۸٫۲۴۱۸۵۵	۸٫۳۰۸۷۹۴	۸٫۳۶۶۷۷۷	۸٫۴۱۷۹۱۹	۸٫۴۶۳۶۶۵	۸٫۵۰۵۰۴۵	۸۸°									
۲°	۸٫۵۴۲۸۱۹	۸٫۵۷۷۵۶۶	۸٫۶۰۹۷۳۴	۸٫۶۳۹۶۸۰	۸٫۶۶۷۶۸۹	۸٫۶۹۴۰۰۰	۸۷°	ناممکن ہے۔ صغیر زاویہ نَ کے لئے لوک جب نَ								
۳°	۸٫۷۱۸۸۰۰	۸٫۷۴۲۲۵۹	۸٫۷۶۴۵۱۱	۸٫۷۸۵۶۷۵	۸٫۸۰۵۸۵۲	۸٫۸۲۵۱۳۰	۸۶°									
۴°	۸٫۸۴۳۵۸۵	۸٫۸۶۱۲۸۳	۸٫۸۷۸۲۸۵	۸٫۸۹۴۶۴۳	۸٫۹۱۰۴۰۴	۸٫۹۲۵۶۱۱	۸۵°	یا لوک جم (۹۰َ − نَ) = لوک ن + ۶٫۴۶۳۷۲۶ تم								
۵°	۸٫۹۴۰۲۹۶	۸٫۹۵۴۴۹۹	۸٫۹۶۸۲۴۹	۸٫۹۸۱۵۷۳	۸٫۹۹۴۴۹۷	۹٫۰۰۷۰۴۴	۸۴°									
۶°	۹٫۰۱۹۲۳۵	۹٫۰۳۱۰۸۹	۹٫۰۴۲۶۲۵	۹٫۰۵۳۸۵۹	۹٫۰۶۴۸۰۶	۹٫۰۷۵۴۸۰	۸۳°									
۷°	۹٫۰۸۵۸۹۴	۹٫۰۹۶۰۶۲	۹٫۱۰۵۹۹۲	۹٫۱۱۵۶۹۸	۹٫۱۲۵۱۸۷	۹٫۱۳۴۴۷۰	۸۲°	۹۶	۱۹۲	۲۸۸	۳۸۴	۴۸۰	۵۷۶	۶۷۲	۷۶۸	۸۶۴
۸°	۹٫۱۴۳۵۵۵	۹٫۱۵۲۴۵۱	۹٫۱۶۱۱۶۴	۹٫۱۶۹۷۰۲	۹٫۱۷۸۰۷۲	۹٫۱۸۶۲۸۰	۸۱°	۸۵	۱۶۹	۲۵۴	۳۳۸	۴۲۳	۵۰۷	۵۹۲	۶۷۶	۷۶۱
۹°	۹٫۱۹۴۳۳۲	۹٫۲۰۲۲۳۴	۹٫۲۰۹۹۹۲	۹٫۲۱۷۶۰۹	۹٫۲۲۵۰۹۲	۹٫۲۳۲۴۴۴	۸۰°	۷۶	۱۵۱	۲۲۶	۳۰۲	۳۷۸	۴۵۳	۵۲۹	۶۰۴	۶۸۰
	۶۰′	۵۰′	۴۰′	۳۰′	۲۰′	۱۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′

لوکارتھمی جیوب التمام

لوگارثم جیوب

	۰'	۱۰'	۲۰'	۳۰'	۴۰'	۵۰'		۱'	۲'	۳'	۴'	۵'	۶'	۷'	۸'	۹'
۱۰°	۹،۲۳۹۶۷	۹،۲۴۶۷۷	۹،۲۵۳۷۶	۹،۲۶۰۶۳	۹،۲۶۷۳۹	۹،۲۷۴۰۵	۷۹°	۶۸	۱۳۶	۲۰۴	۲۷۲	۳۴۱	۴۰۹	۴۷۷	۵۴۵	۶۱۳
۱۱°	،۲۸۰۶۰	،۲۸۷۰۵	،۲۹۳۴۰	،۲۹۹۶۶	،۳۰۵۸۲	،۳۱۱۸۹	۷۸°	۶۲	۱۲۴	۱۸۶	۲۴۸	۳۱۰	۳۷۲	۴۳۵	۴۹۷	۵۵۹
۱۲°	،۳۱۷۸۸	،۳۲۳۷۸	،۳۲۹۶۰	،۳۳۵۳۲	،۳۴۱۰۰	،۳۴۶۵۸	۷۷°	۵۷	۱۱۴	۱۷۱	۲۲۸	۲۸۵	۳۴۲	۳۹۹	۴۵۶	۵۱۳
۱۳°	،۳۵۲۰۹	،۳۵۷۵۲	،۳۶۲۸۹	،۳۶۸۱۹	،۳۷۳۴۱	،۳۷۸۵۸	۷۶°	۵۳	۱۰۵	۱۵۸	۲۱۰	۲۶۳	۳۱۶	۳۶۸	۴۲۱	۴۷۳
۱۴°	،۳۸۳۶۸	،۳۸۸۷۱	،۳۹۳۶۹	،۳۹۸۶۰	،۴۰۳۴۷	،۴۰۸۲۵	۷۵°	۴۹	۹۸	۱۴۷	۱۹۵	۲۴۴	۲۹۳	۳۴۲	۳۹۱	۴۴۰
۱۵°	۹،۴۱۳۰۰	۹،۴۱۷۶۸	۹،۴۲۲۳۲	۹،۴۲۶۹۰	۹،۴۳۱۴۳	۹،۴۳۵۹۱	۷۴°	۴۶	۹۱	۱۳۷	۱۸۲	۲۲۸	۲۷۳	۳۱۹	۳۶۴	۴۱۰
۱۶°	،۴۴۰۳۴	،۴۴۴۷۲	،۴۴۹۰۵	،۴۵۳۳۴	،۴۵۷۵۸	،۴۶۱۷۸	۷۳°	۴۳	۸۵	۱۲۸	۱۷۱	۲۱۳	۲۵۶	۲۹۹	۳۴۱	۳۸۴
۱۷°	،۴۶۵۹۴	،۴۷۰۰۵	،۴۷۴۱۱	،۴۷۸۱۴	،۴۸۲۱۳	،۴۸۶۰۷	۷۲°	۴۰	۸۰	۱۲۰	۱۶۰	۲۰۱	۲۴۱	۲۸۱	۳۲۱	۳۶۱
۱۸°	،۴۸۹۹۸	،۴۹۳۸۵	،۴۹۷۶۸	،۵۰۱۴۸	،۵۰۵۲۳	،۵۰۸۹۶	۷۱°	۳۸	۷۶	۱۱۳	۱۵۱	۱۸۹	۲۲۷	۲۶۴	۳۰۲	۳۴۰
۱۹°	،۵۱۲۶۴	،۵۱۶۲۹	،۵۱۹۹۱	،۵۲۳۵۰	،۵۲۷۰۵	،۵۳۰۵۶	۷۰°	۳۶	۷۱	۱۰۷	۱۴۳	۱۷۹	۲۱۴	۲۵۰	۲۸۵	۳۲۱

۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱		۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	
۳۰۴	۲۷۰	۲۳۶	۲۰۳	۱۶۹	۱۳۵	۱۰۱	۶۸	۳۴	۶۹°	۹٫۵۵۱۰۲	۹٫۵۴۷۶۹	۹٫۵۴۴۳۳	۹٫۵۴۰۹۳	۹٫۵۳۷۵۱	۹٫۵۳۴۰۵	۲۰°
۲۸۹	۲۵۷	۲۲۵	۱۹۳	۱۶۱	۱۲۸	۹۶	۶۴	۳۲	۶۸°	٫۵۷۰۴۴	٫۵۶۷۲۷	٫۵۶۴۰۸	٫۵۶۰۸۵	٫۵۵۷۶۱	٫۵۵۴۳۳	۲۱°
۲۷۵	۲۴۴	۲۱۴	۱۸۳	۱۵۳	۱۲۲	۹۲	۶۱	۳۱	۶۷°	٫۵۸۸۸۹	٫۵۸۵۸۸	٫۵۸۲۸۴	٫۵۷۹۷۸	٫۵۷۶۶۹	٫۵۷۳۵۸	۲۲°
۲۶۲	۲۳۳	۲۰۴	۱۷۴	۱۴۶	۱۱۶	۸۷	۵۸	۲۹	۶۶°	٫۶۰۶۴۶	٫۶۰۳۵۹	٫۶۰۰۷۰	٫۵۹۷۷۸	٫۵۹۴۸۴	٫۵۹۱۸۸	۲۳°
۲۵۰	۲۲۲	۱۹۵	۱۶۶	۱۳۹	۱۱۱	۸۳	۵۶	۲۸	۶۵°	٫۶۲۳۲۳	٫۶۲۰۴۹	٫۶۱۷۷۳	٫۶۱۴۹۴	٫۶۱۲۱۴	٫۶۰۹۳۱	۲۴°
۲۳۹	۲۱۲	۱۸۶	۱۵۹	۱۳۳	۱۰۶	۸۰	۵۳	۲۷	۶۴°	۹٫۶۳۹۲۴	۹٫۶۳۶۶۲	۹٫۶۳۳۹۸	۹٫۶۳۱۳۳	۹٫۶۲۸۶۵	۹٫۶۲۵۹۵	۲۵°
۲۲۹	۲۰۳	۱۷۸	۱۵۲	۱۲۷	۱۰۲	۷۶	۵۱	۲۵	۶۳°	٫۶۵۴۵۶	٫۶۵۲۰۵	٫۶۴۹۵۳	٫۶۴۶۹۸	٫۶۴۴۴۲	٫۶۴۱۸۴	۲۶°
۲۱۹	۱۹۴	۱۷۰	۱۴۶	۱۲۲	۹۷	۷۳	۴۹	۲۴	۶۲°	٫۶۶۹۲۲	٫۶۶۶۸۲	٫۶۶۴۴۱	٫۶۶۱۹۷	٫۶۵۹۵۲	٫۶۵۷۰۵	۲۷°
۲۱۰	۱۸۶	۱۶۳	۱۴۰	۱۱۷	۹۳	۷۰	۴۷	۲۳	۶۱°	٫۶۸۳۲۸	٫۶۸۰۹۸	٫۶۷۸۶۶	٫۶۷۶۳۳	٫۶۷۳۹۸	٫۶۷۱۶۱	۲۸°
۲۰۱	۱۷۹	۱۵۶	۱۳۴	۱۱۲	۸۹	۶۷	۴۵	۲۲	۶۰°	٫۶۹۶۷۷	٫۶۹۴۵۶	٫۶۹۲۳۴	٫۶۹۰۱۰	٫۶۸۷۸۴	٫۶۸۵۵۷	۲۹°

لوکارثمی جیوب التمام

لوگارثمی جیوب

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۳۰°	۹٫۶۹۸۹۷	۹٫۷۰۱۱۵	۹٫۷۰۳۳۲	۹٫۷۰۵۴۷	۹٫۷۰۷۶۱	۹٫۷۰۹۷۳	۵۹°	۲۲	۴۳	۶۵	۸۶	۱۰۸	۱۲۹	۱۵۰	۱۷۲	۱۹۳
۳۱°	٫۷۱۱۸۴	٫۷۱۳۹۳	٫۷۱۶۰۲	٫۷۱۸۰۹	٫۷۲۰۱۴	٫۷۲۲۱۸	۵۸°	۲۱	۴۱	۶۲	۸۲	۱۰۳	۱۲۴	۱۴۴	۱۶۵	۱۸۵
۳۲°	٫۷۲۴۲۱	٫۷۲۶۲۲	٫۷۲۸۲۳	٫۷۳۰۲۲	٫۷۳۲۱۹	٫۷۳۴۱۶	۵۷°	۲۰	۴۰	۵۹	۷۹	۹۹	۱۱۹	۱۳۹	۱۵۹	۱۷۸
۳۳°	٫۷۳۶۱۱	٫۷۳۸۰۵	٫۷۳۹۹۷	٫۷۴۱۸۹	٫۷۴۳۷۹	٫۷۴۵۶۸	۵۶°	۱۹	۳۸	۵۷	۷۶	۹۶	۱۱۵	۱۳۴	۱۵۳	۱۷۲
۳۴°	٫۷۴۷۵۶	٫۷۴۹۴۳	٫۷۵۱۲۸	٫۷۵۳۱۳	٫۷۵۴۹۶	٫۷۵۶۷۸	۵۵°	۱۸	۳۷	۵۵	۷۴	۹۲	۱۱۰	۱۲۹	۱۴۷	۱۶۵
۳۵°	۹٫۷۵۸۵۹	۹٫۷۶۰۳۹	۹٫۷۶۲۱۸	۹٫۷۶۳۹۵	۹٫۷۶۵۷۲	۹٫۷۶۷۴۷	۵۴°	۱۸	۳۵	۵۳	۷۱	۸۹	۱۰۶	۱۲۴	۱۴۲	۱۵۹
۳۶°	٫۷۶۹۲۲	٫۷۷۰۹۵	٫۷۷۲۶۸	٫۷۷۴۳۹	٫۷۷۶۰۹	٫۷۷۷۷۸	۵۳°	۱۷	۳۴	۵۱	۶۸	۸۶	۱۰۳	۱۲۰	۱۳۷	۱۵۴
۳۷°	٫۷۷۹۴۶	٫۷۸۱۱۳	٫۷۸۲۸۰	٫۷۸۴۴۵	٫۷۸۶۰۹	٫۷۸۷۷۲	۵۲°	۱۷	۳۳	۵۰	۶۶	۸۳	۹۹	۱۱۶	۱۳۲	۱۴۹
۳۸°	٫۷۸۹۳۴	٫۷۹۰۹۵	٫۷۹۲۵۶	٫۷۹۴۱۵	٫۷۹۵۷۳	٫۷۹۷۳۱	۵۱°	۱۶	۳۲	۴۸	۶۴	۸۰	۹۵	۱۱۲	۱۲۷	۱۴۳
۳۹°	٫۷۹۸۸۷	٫۸۰۰۴۳	٫۸۰۱۹۷	٫۸۰۳۵۱	٫۸۰۵۰۴	٫۸۰۶۵۶	۵۰°	۱۵	۳۱	۴۶	۶۲	۷۷	۹۲	۱۰۸	۱۲۳	۱۳۸

درجہ	٦٠′	٥٠′	٤٠′	٣٠′	٢٠′	١٠′		١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤٠°	٩٫٨٠٨٠٧	٩٫٨٠٩٥٧	٩٫٨١١٠٦	٩٫٨١٢٥٤	٩٫٨١٤٠٢	٩٫٨١٥٤٩	٤٩°	١٥	٣٠	٤٤	٥٩	٧٤	٨٩	١٠٤	١١٨	١٣٣
٤١°	٫٨١٦٩٤	٫٨١٨٣٩	٫٨١٩٨٣	٫٨٢١٢٦	٫٨٢٢٦٩	٫٨٢٤١٠	٤٨°	١٤	٢٩	٤٣	٥٧	٧٢	٨٦	١٠٠	١١٤	١٢٩
٤٢°	٫٨٢٥٥١	٫٨٢٦٩١	٫٨٢٨٣٠	٫٨٢٩٦٨	٫٨٣١٠٦	٫٨٣٢٤٢	٤٧°	١٤	٢٨	٤١	٥٥	٦٩	٨٢	٩٧	١١٠	١٢٤
٤٣°	٫٨٣٣٧٨	٫٨٣٥١٣	٫٨٣٦٤٨	٫٨٣٧٨١	٫٨٣٩١٤	٫٨٤٠٤٦	٤٦°	١٣	٢٧	٤٠	٥٣	٦٧	٨٠	٩٣	١٠٦	١٢٠
٤٤°	٫٨٤١٧٧	٫٨٤٣٠٨	٫٨٤٤٣٧	٫٨٤٥٦٦	٫٨٤٦٩٤	٫٨٤٨٢٢	٤٥°	١٣	٢٦	٣٨	٥١	٦٢	٧٧	٩٠	١٠٢	١١٥
٤٥°	٩٫٨٤٩٤٩	٩٫٨٥٠٧٤	٩٫٨٥٢٠٠	٩٫٨٥٣٢٤	٩٫٨٥٤٤٨	٩٫٨٥٥٧١	٤٤°	١٢	٢٥	٣٧	٥٠	٦٢	٧٤	٨٧	٩٩	١١٢
٤٦°	٫٨٥٦٩٣	٫٨٥٨١٥	٫٨٥٩٣٦	٫٨٦٠٥٦	٫٨٦١٧٦	٫٨٦٢٩٥	٤٣°	١٢	٢٤	٣٦	٤٨	٦٠	٧٢	٨٤	٩٦	١٠٨
٤٧°	٫٨٦٤١٣	٫٨٦٥٣٠	٫٨٦٦٤٧	٫٨٦٧٦٣	٫٨٦٨٧٩	٫٨٦٩٩٣	٤٢°	١٢	٢٣	٣٥	٤٧	٥٨	٧٠	٨١	٩٣	١٠٤
٤٨°	٫٨٧١٠٧	٫٨٧٢٢١	٫٨٧٣٣٤	٫٨٧٤٤٦	٫٨٧٥٥٧	٫٨٧٦٦٨	٤١°	١١	٢٢	٣٣	٤٥	٥٦	٦٧	٧٨	٨٩	١٠٠
٤٩°	٫٨٧٧٧٨	٫٨٧٨٨٧	٫٨٧٩٩٦	٫٨٨١٠٥	٫٨٨٢١٢	٫٨٨٣١٩	٤٠°	١١	٢٢	٣٢	٤٣	٥٤	٦٥	٧٦	٨٦	٩٧

لوکارثمی جیوب التمام

لوگارثمی جیوب

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	فرق ۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۵۰°	۹٫۸۸۴۲۵	۹٫۸۸۵۳۱	۹٫۸۸۶۳۶	۹٫۸۸۷۴۱	۹٫۸۸۸۴۴	۹٫۸۸۹۴۸	۳۹°	۱۰	۲۱	۳۱	۴۲	۵۲	۶۲	۷۳	۸۳	۹۴
۵۱	٫۸۹۰۵۰	٫۸۹۱۵۲	٫۸۹۲۵۴	٫۸۹۳۵۴	٫۸۹۴۵۵	٫۸۹۵۵۴	۳۸°	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰
۵۲°	٫۸۹۶۵۳	٫۸۹۷۵۲	٫۸۹۸۴۹	٫۸۹۹۴۶	٫۹۰۰۴۳	٫۹۰۱۳۹	۳۷°	۱۰	۱۹	۲۹	۳۹	۴۹	۵۸	۶۸	۷۸	۸۷
۵۳°	٫۹۰۲۳۵	٫۹۰۳۳۰	٫۹۰۴۲۴	٫۹۰۵۱۸	٫۹۰۶۱۱	٫۹۰۷۰۴	۳۶°	۹	۱۹	۲۸	۳۷	۴۷	۵۶	۶۵	۷۵	۸۴
۵۴°	٫۹۰۷۹۶	٫۹۰۸۸۷	٫۹۰۹۷۸	٫۹۱۰۶۹	٫۹۱۱۵۸	٫۹۱۲۴۸	۳۵°	۹	۱۸	۲۷	۳۶	۴۵	۵۴	۶۳	۷۲	۸۱
۵۵°	۹٫۹۱۳۳۶	۹٫۹۱۴۲۵	۹٫۹۱۵۱۲	۹٫۹۱۵۹۹	۹٫۹۱۶۸۶	۹٫۹۱۷۷۲	۳۴°	۹	۱۷	۲۶	۳۵	۴۴	۵۲	۶۱	۷۰	۷۸
۵۶°	٫۹۱۸۵۷	٫۹۱۹۴۲	٫۹۲۰۲۷	٫۹۲۱۱۱	٫۹۲۱۹۴	٫۹۲۲۷۷	۳۳°	۸	۱۷	۲۵	۳۴	۴۲	۵۰	۵۹	۶۷	۷۶
۵۷°	٫۹۲۳۵۹	٫۹۲۴۴۱	٫۹۲۵۲۱	٫۹۲۶۰۳	٫۹۲۶۸۳	٫۹۲۷۶۳	۳۲°	۸	۱۶	۲۴	۳۲	۴۱	۴۹	۵۶	۶۵	۷۳
۵۸°	٫۹۲۸۴۲	٫۹۲۹۲۱	٫۹۲۹۹۹	٫۹۳۰۷۷	٫۹۳۱۵۴	٫۹۳۲۳۰	۳۱°	۸	۱۶	۲۳	۳۱	۳۹	۴۷	۵۵	۶۲	۷۰
۵۹°	٫۹۳۳۰۷	٫۹۳۳۸۲	٫۹۳۴۵۶	٫۹۳۵۳۲	٫۹۳۶۰۹	٫۹۳۶۸۰	۳۰°	۸	۱۵	۲۳	۳۰	۳۸	۴۵	۵۲	۶۰	۶۸

لوکارتمِ جیوب

درجه	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′	درجه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۷۰°	۹٫۹۷۲۹۹	۹٫۹۷۳۴۴	۹٫۹۷۳۹۰	۹٫۹۷۴۳۵	۹٫۹۷۴۷۹	۹٫۹۷۵۲۳	۱۹°	۴	۹	۱۳	۱۸	۲۲	۲۶	۳۱	۳۶	۴۰
۷۱°	۹٫۹۷۵۶۷	۹٫۹۷۶۱۰	۹٫۹۷۶۵۳	۹٫۹۷۶۹۶	۹٫۹۷۷۳۸	۹٫۹۷۷۷۹	۱۸°	۴	۹	۱۳	۱۷	۲۱	۲۶	۳۰	۳۴	۳۸
۷۲°	۹٫۹۷۸۲۱	۹٫۹۷۸۶۱	۹٫۹۷۹۰۲	۹٫۹۷۹۴۲	۹٫۹۷۹۸۲	۹٫۹۸۰۲۱	۱۷°	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸	۳۲	۳۶
۷۳°	۹٫۹۸۰۶۰	۹٫۹۸۰۹۸	۹٫۹۸۱۳۶	۹٫۹۸۱۷۴	۹٫۹۸۲۱۱	۹٫۹۸۲۴۸	۱۶°	۴	۸	۱۱	۱۵	۱۹	۲۳	۲۷	۳۰	۳۴
۷۴°	۹٫۹۸۲۸۴	۹٫۹۸۳۲۰	۹٫۹۸۳۵۶	۹٫۹۸۳۹۱	۹٫۹۸۴۲۶	۹٫۹۸۴۶۰	۱۵°	۴	۷	۱۱	۱۴	۱۸	۲۱	۲۵	۲۸	۳۲
۷۵°	۹٫۹۸۴۹۴	۹٫۹۸۵۲۸	۹٫۹۸۵۶۱	۹٫۹۸۵۹۴	۹٫۹۸۶۲۷	۹٫۹۸۶۵۹	۱۴°	۳	۷	۱۰	۱۳	۱۷	۲۰	۲۳	۲۶	۳۰
۷۶°	۹٫۹۸۶۹۰	۹٫۹۸۷۲۲	۹٫۹۸۷۵۳	۹٫۹۸۷۸۳	۹٫۹۸۸۱۳	۹٫۹۸۸۴۳	۱۳°	۳	۶	۹	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴	۲۷
۷۷°	۹٫۹۸۸۷۲	۹٫۹۸۹۰۱	۹٫۹۸۹۳۰	۹٫۹۸۹۵۸	۹٫۹۸۹۸۵	۹٫۹۹۰۱۳	۱۲°	۳	۶	۸	۱۱	۱۴	۱۷	۲۰	۲۲	۲۵
۷۸°	۹٫۹۹۰۴۰	۹٫۹۹۰۶۶	۹٫۹۹۰۹۲	۹٫۹۹۱۱۹	۹٫۹۹۱۴۵	۹٫۹۹۱۷۰	۱۱°	۳	۵	۸	۱۰	۱۳	۱۶	۱۸	۲۱	۲۳
۷۹°	۹٫۹۹۱۹۵	۹٫۹۹۲۱۹	۹٫۹۹۲۴۳	۹٫۹۹۲۶۶	۹٫۹۹۲۹۰	۹٫۹۹۳۱۳	۱۰°	۲	۵	۷	۹	۱۲	۱۴	۱۷	۱۹	۲۱

	۶۰′	۵۰′	۴۰′	۳۰′	۲۰′	۱۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۸۰°	۹٫۹۹۳۳۵	۹٫۹۹۳۵۷	۹٫۹۹۳۷۹	۹٫۹۹۴۰۰	۹٫۹۹۴۲۱	۹٫۹۹۴۴۲	۹°	۲	۴	۶	۸	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹
۸۱°	٫۹۹۴۶۲	٫۹۹۴۸۲	٫۹۹۵۰۱	٫۹۹۵۲۰	٫۹۹۵۳۹	٫۹۹۵۵۷	۸°	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷
۸۲°	٫۹۹۵۷۵	٫۹۹۵۹۳	٫۹۹۶۱۰	٫۹۹۶۲۷	٫۹۹۶۴۳	٫۹۹۶۵۹	۷°	۲	۳	۵	۷	۸	۱۰	۱۲	۱۳	۱۵
۸۳°	٫۹۹۶۷۵	٫۹۹۶۹۰	٫۹۹۷۰۵	٫۹۹۷۲۰	٫۹۹۷۳۴	٫۹۹۷۴۸	۶°	۱	۳	۴	۶	۷	۹	۱۰	۱۲	۱۳
۸۴°	٫۹۹۷۶۱	٫۹۹۷۷۵	٫۹۹۷۸۷	٫۹۹۸۰۰	٫۹۹۸۱۲	٫۹۹۸۲۳	۵°	۱	۳	۴	۵	۶	۸	۹	۱۰	۱۱
۸۵°	۹٫۹۹۸۳۴	۹٫۹۹۸۴۵	۹٫۹۹۸۵۶	۹٫۹۹۸۶۶	۹٫۹۹۸۷۵	۹٫۹۹۸۸۵	۴°	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۸۶°	٫۹۹۸۹۴	٫۹۹۹۰۳	٫۹۹۹۱۱	٫۹۹۹۱۹	٫۹۹۹۲۶	٫۹۹۹۳۴	۳°	۱	۲	۲	۳	۴	۵	۵	۶	۷
۸۷°	٫۹۹۹۴۰	٫۹۹۹۴۷	٫۹۹۹۵۳	٫۹۹۹۵۹	٫۹۹۹۶۴	٫۹۹۹۶۹	۲°	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵
۸۸°	٫۹۹۹۷۴	٫۹۹۹۷۸	٫۹۹۹۸۲	٫۹۹۹۸۵	٫۹۹۹۸۸	٫۹۹۹۹۱	۱°	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲	۳
۸۹°	٫۹۹۹۹۳	٫۹۹۹۹۵	٫۹۹۹۹۷	٫۹۹۹۹۸	٫۹۹۹۹۹	۱٫۰۰۰۰۰	۰°									—
۹۰°	۱٫۰۰۰۰۰															

لوکارتمی جیوب التمام

لوکارثمی مماس

	۰َ	۱۰َ	۲۰َ	۳۰َ	۴۰َ	۵۰َ		فرق ۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
°۰	∞-	۷٫۴۶۳۷۳	۷٫۷۶۴۷۶	۷٫۹۴۰۸۴	۸٫۰۶۵۸۱	۸٫۱۶۲۶۷	°۸۹									
°۱	۸٫۲۴۱۹۲	۸٫۳۰۸۸۸	۸٫۳۶۶۸۹	۸٫۴۱۸۰۷	۸٫۴۶۳۸۵	۸٫۵۰۵۲۷	°۸۸									
°۲	۸٫۵۴۳۰۸	۸٫۵۷۷۸۸	۸٫۶۱۰۰۹	۸٫۶۴۰۰۹	۸٫۶۶۸۱۶	۸٫۶۹۴۵۳	°۸۷									
°۳	۸٫۷۱۹۴۰	۸٫۷۴۲۹۲	۸٫۷۶۵۲۵	۸٫۷۸۶۴۹	۸٫۸۰۶۷۴	۸٫۸۲۶۱۰	°۸۶									
°۴	۸٫۸۴۴۶۴	۸٫۸۶۲۴۳	۸٫۸۷۹۵۳	۸٫۸۹۵۹۸	۸٫۹۱۱۸۵	۸٫۹۲۷۱۶	°۸۵									
°۵	۸٫۹۴۱۹۵	۸٫۹۵۶۲۷	۸٫۹۷۰۱۳	۸٫۹۸۳۵۸	۸٫۹۹۶۶۲	۹٫۰۰۹۳۰	°۸۴									
°۶	۹٫۰۲۱۶۲	۹٫۰۳۳۶۱	۹٫۰۴۵۲۸	۹٫۰۵۶۶۶	۹٫۰۶۷۷۵	۹٫۰۷۸۵۸	°۸۳									
°۷	۹٫۰۸۹۱۴	۹٫۰۹۹۴۷	۹٫۱۰۹۵۶	۹٫۱۱۹۴۳	۹٫۱۲۹۰۹	۹٫۱۳۸۵۴	°۸۲	۹۸	۱۹۵	۲۹۳	۳۹۱	۴۸۸	۵۸۶	۶۸۴	۷۸۲	۸۷۹
°۸	۹٫۱۴۷۸۰	۹٫۱۵۶۸۸	۹٫۱۶۵۷۷	۹٫۱۷۴۵۰	۹٫۱۸۳۰۶	۹٫۱۹۱۴۶	°۸۱	۸۷	۱۷۳	۲۶۰	۳۴۶	۴۳۳	۵۱۹	۶۰۶	۶۹۲	۷۷۹
°۹	۹٫۱۹۹۷۱	۹٫۲۰۷۸۲	۹٫۲۱۵۷۸	۹٫۲۲۳۶۱	۹٫۲۳۱۳۰	۹٫۲۳۸۸۷	°۸۰	۷۸	۱۵۵	۲۳۳	۳۱۰	۳۸۸	۴۶۶	۵۴۳	۶۲۱	۶۹۸

فرق یہاں اسقدر جلدی بدلتے ہیں کہ انکا درج کرنا ناممکن ہے قلیل زاویہ نَ کیلئے لوک مس نَ یا لوک مم (۹۰° - نَ) = لوک ن + ۴٫۶۳۷۲۶۳

	۶۰	۵۰	۴۰	۳۰	۲۰	۱۰		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱۰°	۹٫۲۴۶۳۲	۹٫۲۵۳۶۵	۹٫۲۶۰۸۶	۹٫۲۶۷۹۷	۹٫۲۷۴۹۶	۹٫۲۸۱۸۶	۷۹°	۷۱	۱۴۱	۲۱۲	۲۸۲	۳۵۴	۴۲۰	۴۹۴	۵۶۴	۶۳۵
۱۱°	٫۲۸۸۶۵	٫۲۹۵۳۵	٫۳۰۱۹۵	٫۳۰۸۴۶	٫۳۱۴۸۹	٫۳۲۱۲۲	۷۸°	۶۵	۱۲۹	۱۹۴	۲۵۹	۳۲۳	۳۸۸	۴۵۳	۵۱۸	۵۸۲
۱۲°	٫۳۲۷۴۷	٫۳۳۳۶۵	٫۳۳۹۷۴	٫۳۴۵۷۶	٫۳۵۱۷۰	٫۳۵۷۵۷	۷۷°	۶۰	۱۲۰	۱۷۹	۲۳۹	۲۹۹	۳۵۹	۴۱۹	۴۷۸	۵۳۸
۱۳°	٫۳۶۳۳۶	٫۳۶۹۰۹	٫۳۷۴۷۷	٫۳۸۰۳۵	٫۳۸۵۸۹	٫۳۹۱۳۶	۷۶°	۵۶	۱۱۱	۱۶۷	۲۲۲	۲۷۸	۳۳۳	۳۸۹	۴۴۵	۵۰۰
۱۴°	٫۳۹۶۷۷	٫۴۰۲۱۲	٫۴۰۷۴۲	٫۴۱۲۶۶	٫۴۱۷۸۴	٫۴۲۲۹۷	۷۵°	۵۲	۱۰۳	۱۵۵	۲۰۸	۲۶۱	۳۱۳	۳۶۵	۴۱۶	۴۶۹
۱۵°	۹٫۴۲۸۰۵	۹٫۴۳۳۰۸	۹٫۴۳۸۰۶	۹٫۴۴۲۹۹	۹٫۴۴۷۸۶	۹٫۴۵۲۷۱	۷۴°	۴۹	۹۸	۱۴۷	۱۹۶	۲۴۵	۲۹۴	۳۴۳	۳۹۲	۴۴۱
۱۶°	٫۴۵۷۵۰	٫۴۶۲۲۴	٫۴۶۶۹۴	٫۴۷۱۶۰	٫۴۷۶۲۲	٫۴۸۰۸۰	۷۳°	۴۷	۹۳	۱۳۹	۱۸۷	۲۳۲	۲۷۸	۳۲۵	۳۷۱	۴۱۸
۱۷°	٫۴۸۵۳۴	٫۴۸۹۸۴	٫۴۹۴۳۰	٫۴۹۸۷۲	٫۵۰۳۱۱	٫۵۰۷۴۶	۷۲°	۴۴	۸۸	۱۳۲	۱۷۶	۲۲۰	۲۶۴	۳۰۸	۳۵۲	۳۹۶
۱۸°	٫۵۱۱۷۸	٫۵۱۶۰۶	٫۵۲۰۳۱	٫۵۲۴۵۲	٫۵۲۸۷۰	٫۵۳۲۸۵	۷۱°	۴۲	۸۳	۱۲۵	۱۶۷	۲۱۰	۲۵۲	۲۹۴	۳۳۶	۳۷۸
۱۹°	٫۵۳۶۹۷	٫۵۴۱۰۷	٫۵۴۵۱۲	٫۵۴۹۱۵	٫۵۵۳۱۵	٫۵۵۷۱۲	۷۰°	۴۰	۸۰	۱۲۱	۱۶۰	۲۰۱	۲۴۱	۲۸۱	۳۲۱	۳۶۲

لوگارثمی مماس التمام

لوکاریتم مماس

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
°۲۰	۹٫۵۶۱۰۷	۹٫۵۶۴۹۸	۹٫۵۶۸۸۷	۹٫۵۷۲۷۴	۹٫۵۷۶۵۸	۹٫۵۸۰۳۹	°۶۹	۳۹	۷۷	۱۱۶	۱۵۴	۱۹۳	۲۳۱	۲۷۰	۳۰۸	۳۴۷
°۲۱	٫۵۸۴۱۸	٫۵۸۷۹۴	٫۵۹۱۶۸	٫۵۹۵۴۰	٫۵۹۹۰۹	٫۶۰۲۷۶	°۶۸	۳۷	۷۴	۱۱۱	۱۴۸	۱۸۵	۲۲۲	۲۵۹	۲۹۶	۳۳۳
°۲۲	٫۶۰۶۴۱	٫۶۱۰۰۴	٫۶۱۳۶۴	٫۶۱۷۲۲	٫۶۲۰۷۹	٫۶۲۴۳۳	°۶۷	۳۶	۷۲	۱۰۷	۱۴۳	۱۷۹	۲۱۴	۲۵۰	۲۸۶	۳۲۲
°۲۳	٫۶۲۷۸۵	٫۶۳۱۳۵	٫۶۳۴۸۴	٫۶۳۸۳۰	٫۶۴۱۷۵	٫۶۴۵۱۷	°۶۶	۳۵	۶۹	۱۰۴	۱۳۸	۱۷۳	۲۰۸	۲۴۳	۲۷۷	۳۱۱
°۲۴	٫۶۴۸۵۸	٫۶۵۱۹۷	٫۶۵۵۳۵	٫۶۵۸۷۰	٫۶۶۲۰۴	٫۶۶۵۳۷	°۶۵	۳۴	۶۷	۱۰۱	۱۳۴	۱۶۸	۲۰۱	۲۳۵	۲۶۸	۳۰۲
°۲۵	۹٫۶۶۸۶۷	۹٫۶۷۱۹۶	۹٫۶۷۵۲۴	۹٫۶۷۸۵۰	۹٫۶۸۱۷۴	۹٫۶۸۴۹۷	°۶۴	۳۳	۶۵	۹۸	۱۳۰	۱۶۳	۱۹۵	۲۲۸	۲۶۰	۲۹۳
°۲۶	٫۶۸۸۱۸	٫۶۹۱۳۸	٫۶۹۴۵۷	٫۶۹۷۷۴	٫۷۰۰۸۹	٫۷۰۴۰۴	°۶۳	۳۲	۶۳	۹۵	۱۲۶	۱۵۸	۱۹۰	۲۲۱	۲۵۳	۲۸۴
°۲۷	٫۷۰۷۱۷	٫۷۱۰۲۸	٫۷۱۳۳۹	٫۷۱۶۴۸	٫۷۱۹۵۵	٫۷۲۲۶۲	°۶۲	۳۱	۶۲	۹۲	۱۲۳	۱۵۴	۱۸۵	۲۱۶	۲۴۷	۲۷۷
°۲۸	٫۷۲۵۶۷	٫۷۲۸۷۲	٫۷۳۱۷۵	٫۷۳۴۷۶	٫۷۳۷۷۷	٫۷۴۰۷۷	°۶۱	۳۰	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۵۱	۱۸۱	۲۱۱	۲۴۱	۲۷۱
°۲۹	٫۷۴۳۷۵	٫۷۴۶۷۲	٫۷۴۹۶۹	٫۷۵۲۶۴	٫۷۵۵۵۸	٫۷۵۸۵۲	°۶۰	۲۹	۵۹	۸۸	۱۱۸	۱۴۷	۱۷۷	۲۰۶	۲۳۶	۲۶۵

۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱		۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	
۲۶۰	۲۳۱	۲۰۲	۱۷۳	۱۴۵	۱۱۶	۸۷	۵۸	۲۹	۵۹°	۹٫۷۷۵۹۱	۹٫۷۷۳۰۳	۹٫۷۷۰۱۵	۹٫۷۶۷۲۵	۹٫۷۶۴۳۵	۹٫۷۶۱۴۴	۳۰°
۲۵۵	۲۲۷	۱۹۸	۱۷۰	۱۴۲	۱۱۳	۸۵	۵۷	۲۸	۵۸°	۹٫۷۹۲۹۶	۹٫۷۹۰۱۵	۹٫۷۸۷۳۲	۹٫۷۸۴۴۸	۹٫۷۸۱۶۳	۹٫۷۷۸۷۷	۳۱°
۲۵۱	۲۲۳	۱۹۵	۱۶۷	۱۳۹	۱۱۲	۸۴	۵۶	۲۸	۵۷°	۹٫۸۰۹۷۵	۹٫۸۰۶۹۷	۹٫۸۰۴۱۹	۹٫۸۰۱۴۰	۹٫۷۹۸۶۰	۹٫۷۹۵۷۹	۳۲°
۲۴۷	۲۲۰	۱۹۲	۱۶۵	۱۳۷	۱۱۰	۸۳	۵۵	۲۸	۵۶°	۹٫۸۲۶۲۴	۹٫۸۲۳۵۲	۹٫۸۲۰۷۸	۹٫۸۱۸۰۳	۹٫۸۱۵۲۸	۹٫۸۱۲۵۲	۳۳°
۲۴۴	۲۱۷	۱۹۰	۱۶۲	۱۳۶	۱۰۸	۸۱	۵۴	۲۷	۵۵°	۹٫۸۴۲۵۳	۹٫۸۳۹۸۴	۹٫۸۳۷۱۲	۹٫۸۳۴۴۳	۹٫۸۳۱۷۱	۹٫۸۲۸۹۹	۳۴°
۲۴۱	۲۱۳	۱۸۸	۱۶۰	۱۳۳	۱۰۶	۸۰	۵۳	۲۶	۵۴°	۹٫۸۵۸۷۴۰	۹٫۸۵۵۹۴	۹٫۸۵۳۲۷	۹٫۸۵۰۵۹	۹٫۸۴۷۹۱	۹٫۸۴۵۲۳	۳۵°
۲۳۸	۲۱۲	۱۸۵	۱۵۸	۱۳۲	۱۰۶	۷۹	۵۳	۲۶	۵۳°	۹٫۸۷۴۴۸	۹٫۸۷۱۸۵	۹٫۸۶۹۲۱	۹٫۸۶۶۵۷	۹٫۸۶۳۹۲	۹٫۸۶۱۲۶	۳۶°
۲۳۶	۲۰۹	۱۸۳	۱۵۷	۱۳۱	۱۰۵	۷۸	۵۲	۲۶	۵۲°	۹٫۸۹۰۲۰	۹٫۸۸۷۵۹	۹٫۸۸۴۹۸	۹٫۸۸۲۳۴	۹٫۸۷۹۷۴	۹٫۸۷۷۱۱	۳۷°
۲۳۳	۲۰۸	۱۸۲	۱۵۶	۱۳۰	۱۰۴	۷۸	۵۲	۲۶	۵۱°	۹٫۹۰۵۷۸	۹٫۹۰۳۲۰	۹٫۹۰۰۶۱	۹٫۸۹۸۰۱	۹٫۸۹۵۴۱	۹٫۸۹۲۸۱	۳۸°
۲۳۲	۲۰۶	۱۸۰	۱۵۵	۱۲۹	۱۰۳	۷۷	۵۲	۲۶	۵۰°	۹٫۹۲۱۲۵	۹٫۹۱۸۶۸	۹٫۹۱۶۱۰	۹٫۹۱۳۵۳	۹٫۹۱۰۹۵	۹٫۹۰۸۳۷	۳۹°

لوگارثمی ماس التمام

لوکارتمی ماسس

	٠′	١٠′	٢٠′	٣٠′	٤٠′	٥٠′		١′	٢′	٣′	٤′ فرق	٥′	٦′	٧′	٨′	٩′
٤٠°	٩،٩٢٣٨١	٩،٩٢٦٣٨	٩،٩٢٨٩٤	٩،٩٣١٥٠	٩،٩٣٤٠٧	٩،٩٣٦٦١	٤٩°	٢٦	٥١	٧٧	١٠٢	١٢٨	١٥٣	١٧٩	٢٠٥	٢٣٠
٤١°	،٩٣٩١٦	،٩٤١٧١	،٩٤٤٢٧	،٩٤٦٨١	،٩٤٩٣٥	،٩٥١٩٠	٤٨°	٢٥	٥١	٧٦	١٠٢	١٢٧	١٥٣	١٧٨	٢٠٤	٢٢٩
٤٢°	،٩٥٤٤٤	،٩٥٦٩٨	،٩٥٩٥٢	،٩٦٢٠٥	،٩٦٤٥٩	،٩٦٧١٢	٤٧°	٢٥	٥١	٧٦	١٠١	١٢٧	١٥٢	١٧٧	٢٠٣	٢٢٨
٤٣°	،٩٦٩٦٦	،٩٧٢١٩	،٩٧٤٧٢	،٩٧٧٢٥	،٩٧٩٧٨	،٩٨٢٣١	٤٦°	٢٥	٥١	٧٦	١٠١	١٢٧	١٥٢	١٧٧	٢٠٢	٢٢٨
٤٤°	،٩٨٤٨٤	،٩٨٧٣٦	،٩٨٩٨٩	،٩٩٢٤٢	،٩٩٤٩٥	،٩٩٧٤٧	٤٥°	٢٥	٥١	٧٦	١٠١	١٢٧	١٥٢	١٧٧	٢٠٢	٢٢٨
٤٥°	١٠،٠٠٠٠٠	١٠،٠٠٢٥٣	١٠،٠٠٥٠٥	١٠،٠٠٧٥٨	١٠،٠١٠١١	١٠،٠١٢٦٣	٤٤°	٢٥	٥١	٧٦	١٠١	١٢٧	١٥٢	١٧٧	٢٠٢	٢٢٨
٤٦°	،٠١٥١٦	،٠١٧٦٩	،٠٢٠٢٢	،٠٢٢٧٥	،٠٢٥٢٨	،٠٢٧٨١	٤٣°	٢٥	٥١	٧٦	١٠١	١٢٧	١٥٢	١٧٧	٢٠٣	٢٢٨
٤٧°	،٠٣٠٣٤	،٠٣٢٨٨	،٠٣٥٤١	،٠٣٧٩٥	،٠٤٠٤٨	،٠٤٣٠٢	٤٢°	٢٥	٥١	٧٦	١٠١	١٢٧	١٥٢	١٧٧	٢٠٣	٢٢٨
٤٨°	،٠٤٥٥٦	،٠٤٨١٠	،٠٥٠٦٥	،٠٥٣١٩	،٠٥٥٧٤	،٠٥٨٢٩	٤١°	٢٥	٥١	٧٦	١٠٢	١٢٧	١٥٣	١٧٨	٢٠٤	٢٢٩
٤٩°	،٠٦٠٨٤	،٠٦٣٣٩	،٠٦٥٩٤	،٠٦٨٥٠	،٠٧١٠٦	،٠٧٣٦٢	٤٠°	٢٦	٥١	٧٧	١٠٢	١٢٨	١٥٣	١٧٩	٢٠٥	٢٣٠

	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′	۶۰′		۱′	۲′	۳′	۴′	۵′	۶′	۷′	۸′	۹′
۵۰°	۱۰،۵۰۶۹۱۹	۱۰،۵۰۶۸۶۵	۱۰،۵۰۸۱۳۲	۱۰،۵۰۸۳۹۰	۱۰،۵۰۸۹۴۶	۱۰،۵۰۸۹۰۵	۳۹°	۲۶	۵۲	۷۷	۱۰۳	۱۲۹	۱۵۵	۱۸۰	۲۰۶	۲۳۲
۵۱°	۵۰۹۱۴۳	۵۰۹۴۲۲	۵۰۹۷۸۰	۵۰۹۹۳۹	۵۱۰۱۹۹	۵۱۰۴۵۹	۳۸°	۲۶	۵۲	۷۸	۱۰۴	۱۳۰	۱۵۶	۱۸۲	۲۰۸	۲۳۴
۵۲°	۵۱۰۶۱۹	۵۱۰۹۸۰	۵۱۱۲۴۱	۵۱۱۵۰۲	۵۱۱۷۶۳	۵۱۲۰۲۴	۳۷°	۲۶	۵۲	۷۸	۱۰۵	۱۳۱	۱۵۷	۱۸۳	۲۰۹	۲۳۵
۵۳°	۵۱۲۲۸۹	۵۱۲۵۵۲	۵۱۲۸۱۵	۵۱۳۰۶۹	۵۱۳۳۴۴	۵۱۳۶۰۸	۳۶°	۲۶	۵۳	۷۹	۱۰۶	۱۳۲	۱۵۸	۱۸۵	۲۱۲	۲۳۸
۵۴°	۵۱۳۸۷۳	۵۱۴۱۴۰	۵۱۴۴۰۷	۵۱۴۶۷۳	۵۱۴۹۴۱	۵۱۵۲۰۹	۳۵°	۲۷	۵۳	۸۰	۱۰۷	۱۳۳	۱۶۰	۱۸۸	۲۱۴	۲۴۱
۵۵°	۱۰،۵۱۵۴۷۷	۱۰،۵۱۵۷۴۴	۱۰،۵۱۶۰۱۴	۱۰،۵۱۶۲۸۶	۱۰،۵۱۶۵۵۸	۱۰،۵۱۶۸۲۹	۳۴°	۲۷	۵۴	۸۱	۱۰۸	۱۳۴	۱۶۲	۱۹۰	۲۱۶	۲۴۳
۵۶°	۵۱۷۱۰۱	۵۱۷۳۷۴	۵۱۷۶۴۸	۵۱۷۹۲۲	۵۱۸۱۹۶	۵۱۸۴۷۲	۳۳°	۲۸	۵۵	۸۳	۱۱۰	۱۳۷	۱۶۵	۱۹۲	۲۲۰	۲۴۷
۵۷°	۵۱۸۷۴۸	۵۱۹۰۲۵	۵۱۹۳۰۲	۵۱۹۵۸۱	۵۱۹۸۶۰	۵۲۰۱۴۰	۳۲°	۲۸	۵۶	۸۴	۱۱۲	۱۳۹	۱۶۷	۱۹۵	۲۲۳	۲۵۱
۵۸°	۵۲۰۴۲۱	۵۲۰۷۰۳	۵۲۰۹۸۵	۵۲۱۲۶۸	۵۲۱۵۵۲	۵۲۱۸۳۶	۳۱°	۲۸	۵۷	۸۵	۱۱۳	۱۴۲	۱۷۰	۱۹۸	۲۲۷	۲۵۵
۵۹°	۵۲۲۱۲۳	۵۲۲۴۰۹	۵۲۲۶۹۶	۵۲۲۹۸۵	۵۲۳۲۷۵	۵۲۳۵۶۵	۳۰°	۲۹	۵۸	۸۷	۱۱۷	۱۴۴	۱۷۳	۲۰۲	۲۳۱	۲۶۰

لوگارتمِ مماس التمام

لوگارتمی مماس

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′		۱	۲	۳	۴ فرق	۵	۶	۷	۸	۹
۸۰°	۱۰٫۷۵۳۶۸	۱۰٫۷۶۱۱۳	۱۰٫۷۶۸۶۰	۱۰٫۷۷۶۳۹	۱۰٫۷۸۴۲۲	۱۰٫۷۹۲۱۸	۹°	۷۸	۱۵۵	۲۳۳	۳۱۰	۳۸۸	۴۶۶	۵۴۳	۶۲۱	۶۹۸
۸۱	۱۰٫۸۰۰۲۹	۱۰٫۸۰۸۵۳	۱۰٫۸۱۶۹۴	۱۰٫۸۲۵۵۰	۱۰٫۸۳۴۲۲	۱۰٫۸۴۳۱۲	۸°	۸۶	۱۷۳	۲۶۰	۳۴۶	۴۳۳	۵۱۹	۶۰۶	۶۹۲	۷۷۹
۸۲	۱۰٫۸۵۲۳۰	۱۰٫۸۶۱۶۴	۱۰٫۸۷۰۹۱	۱۰٫۸۸۰۵۶	۱۰٫۸۹۰۴۴	۱۰٫۹۰۰۵۳	۷°	۹۸	۱۹۵	۲۹۳	۳۹۱	۴۸۸	۵۸۶	۶۸۴	۷۸۲	۸۷۹
۸۳	۱۰٫۹۱۰۸۶	۱۰٫۹۲۱۴۲	۱۰٫۹۳۲۲۵	۱۰٫۹۴۳۳۴	۱۰٫۹۵۴۷۲	۱۰٫۹۶۶۳۹	۶°									
۸۴	۱۰٫۹۷۸۳۰	۱۰٫۹۹۰۷۰	۱۱٫۰۰۳۳۸	۱۱٫۰۱۶۴۲	۱۱٫۰۲۹۸۶	۱۱٫۰۴۳۷۳	۵°									
۸۵	۱۱٫۰۵۸۰۵	۱۱٫۰۷۲۸۴	۱۱٫۰۸۸۱۵	۱۱٫۱۰۴۰۲	۱۱٫۱۲۰۴۷	۱۱٫۱۳۷۵۶	۴°	فرق اسقدر جلدی بدلتے ہیں کہ درج نہیں ہوسکتے								
۸۶	۱۱٫۱۵۵۳۲	۱۱٫۱۷۳۹۰	۱۱٫۱۹۳۲۲	۱۱٫۲۱۳۵۱	۱۱٫۲۳۴۷۵	۱۱٫۲۵۷۰۸	۳°									
۸۷	۱۱٫۲۸۰۶۰	۱۱٫۳۰۵۴۷	۱۱٫۳۳۱۸۴	۱۱٫۳۵۹۹۱	۱۱٫۳۸۹۹۱	۱۱٫۴۲۲۱۲	۲°									
۸۸	۱۱٫۴۵۶۹۲	۱۱٫۴۹۴۷۳	۱۱٫۵۳۶۱۵	۱۱٫۵۸۱۹۳	۱۱٫۶۳۳۱۱	۱۱٫۶۹۱۱۲	۱°									
۸۹	۱۱٫۷۵۸۰۸	۱۱٫۸۳۷۲۶	۱۱٫۹۳۳۱۹	۱۲٫۰۵۹۱۲	۱۲٫۲۳۵۲۴	۱۲٫۵۳۶۲۶	۰°									
۹۰	+∞															
	۶۰′	۵۰′	۴۰′	۳۰′	۲۰′	۱۰′		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

لوگارتمی مماس التمام

مقادیر مستقلہ

ایک زاویہ نیمقطری = ۵۷° ۱۷′ ۴۵″ تقریباً = ۲۰۶۲۶۵″

لوک ۲۰۶۲۶۵ = ۵٫۳۱۴۴۲۵۵

π = ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵	لوک π = ۰٫۴۹۷۱۴۹۹
$\frac{1}{\pi}$ = ۰٫۳۱۸۳۰۹۸۹	لوک $\frac{1}{\pi}$ = $\bar{1}$٫۵۰۲۸۵۰۱
$\frac{\pi}{180}$ = ۰٫۰۱۷۴۵۳۲۹	لوک $\frac{\pi}{180}$ = $\bar{2}$٫۲۴۱۸۷۷۴
$\frac{180}{\pi}$ = ۵۷٫۲۹۵۷۷۹۵	لوک $\frac{180}{\pi}$ = ۱٫۷۵۸۱۲۲۶
π^2 = ۹٫۸۶۹۶۰۴۴۰	لوک π^2 = ۰٫۹۹۴۲۹۹۷
$\frac{1}{\pi^2}$ = ۰٫۱۰۱۳۲۱۱۸	لوک $\frac{1}{\pi^2}$ = $\bar{1}$٫۰۰۵۷۰۰۳
$\sqrt{\pi}$ = ۱٫۷۷۲۴۵۳۸۵	لوک $\sqrt{\pi}$ = ۰٫۲۴۸۵۷۴۹
$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ = ۰٫۵۶۴۱۸۹۵۸	لوک $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ = $\bar{1}$٫۷۵۱۴۲۵۱
$\sqrt[3]{\pi}$ = ۱٫۴۶۴۵۹۱۸۹	لوک $\sqrt[3]{\pi}$ = ۰٫۱۶۵۷۱۶۶
$\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ = ۰٫۶۸۲۷۸۴۰۶	لوک $\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ = $\bar{1}$٫۸۳۴۲۸۳۴
$\sqrt{2}$ = ۱٫۴۱۴۲۱۳۵...	$\sqrt{3}$ = ۱٫۷۳۲۰۵۰۸...
$\sqrt{5}$ = ۲٫۲۳۶۰۶۷۹...	$\sqrt{6}$ = ۲٫۴۴۹۴۹۸۹...
$\sqrt{7}$ = ۲٫۶۴۵۷۵۱۳...	$\sqrt{8}$ = ۲٫۸۲۸۴۲۷۱...
$\sqrt{10}$ = ۳٫۱۶۲۲۷۷۶...	

تمّت

TRIGONOMETRY.

English	Urdu
Angle (Right angle)	زاویہ (زاویہ قائمہ)
Arc	قوس
Angle of Elevation	زاویہ ارتفاع
Angle of depression	زاویہ انخفاض
Ambiguous case	صورت مشتبہ
Bisector (Internal) (External)	منصف { داخلی / خارجی }
Base line	بنیادی خط
Bearings (Compass)	جہات
Circular measure	قوسی پیمانہ
Centesimal measure	مئی پیمانہ
Clock wise (Counter clock wise)	موافق سمت ساعت (مقابل سمت ساعت)
Constants	مقادیر مستقلہ
Circumference	محیط
Chord	وتر
Cosine	جیب التمام
Cotangent	ظل التمام
Cosecant	قاطع التمام

Coversed Sine	سہم التمام
Complementary angles	متمم زاویے
Complement	متمم
Characteristic	ممیز
Circum-circle	بیرونی دائرہ
Centroid	مرکز ہندسی
Circum-centre	بیرونی دائرہ کا مرکز
Circular Functions	مستدیر جملے
Degree, Minute, Second.	درجہ، دقیقہ، ثانیہ
Decagon	معشر
Duodecagon	اثنا عشری
Dip (of the horizon)	(افق کا) میلان
Dimensions	ابعاد
Diameter	قطر
Equilateral (Triangle)	(مثلث) متساوی الاضلاع
Elevation	ارتفاع
Elements (of a triangle)	(مثلث کے) اجزا
Escribed circle	جانبی دائرہ
Elimination	اسقاط
Excentric triangle	جانبی مرکزوں کا مثلث
Fixed (lines, Axes)	ثابت (خطوط ، محاور)

اساسی (ضابطے)	Fundamental (Formulae)
ضابطہ	Formula
جغرافی (میل)	Geographical (miles)
ترسیم	Graph
اتار چڑھاؤ	Gradiant
مسبع	Heptagon
لامتناہی	Infinity
(مثلث) متساوی الساقین	Isosceles (triangle)
متماثلات	Identities
اندرونی دائرہ	Incircle
اندرونی دائرہ کا مرکز	Incentre
مقلوب ومستدیر جملے	Inverse Circular functions
متباین	Incommensurable
عرض بلد	Latitude
لوکارتم	Logarithm
خط میلان اعظم	Line of greatest slope
نصف النہار	Meridian
اضعافی زاویے	Multiple angles
اعشاریہ لوکارتمی	Mantissa
وسطانیہ	Median
نونقطی دائرہ	Nine point circle

Normal (to an ellipse)	(اہلیلجی کا)، عماد
Ortho-centre	مرکز عمودی
Octagon	مثمن
Orbit (Earth)	مدار (زمین)
Obtuse, Acute (Angles)	(زاویہ) منفرجہ (زاویہ) حادہ
Plane (Trigonometry)	(علم مثلث) مستوی
Perimeter	گھیرا۔ مجموعۂ اضلاع
Pentagon	مخمس
Point (Line) at infinity	لاتناہی پر کا نقطہ
Periods	ادوار
Periodic functions	محلات دوریّہ
Proportional parts (principle of)	(اصول) اجزائے متناسب
Pedal triangle	مثلث پائین
Projection	تظلیل (ظل)
Quadrant	رُبع
Quadrilateral	ذوار بعۃ الاضلاع
Revolving line	خط دائر
Right angled triangle	مثلث قائم الزاویہ
Radian	نیمقطری
Regular (polygon)	منتظم (کثیر الاضلاع)
Radius	نصف قطر

Rectilinear (figure)	شکل، مستقیم الاضلاع
Reciprocal	تکافی
Spherical (Trigonometry)	علم مثلث، کروی
Sexagesimal measure	ستینی پیمانہ
Sector	قطاع (دائرہ)
Semi-circle	نصف دائرہ
Segment	قطعہ (دائرہ)
Sirius	شعری
Sine	جیب
Secant	قاطع التمام
Sextant	سُدس
Supplement	تکملہ
Submultiple angles	کسری زاویے
Subsidiary angles	امدادی زاویئے
Solution (of triangles)	(مثلثوں کا) حل
Trigonometry	علم مثلث
Theorem	مسئلہ (اثباتی)
Trigonometrical (ratios)	مثلثی (نسبتیں)
Tangent	مماس
Theodolite	زاویہ بیں
Tables (of Logarithm)	جداول (لوکارثمی)

Versed Sine	سہم الجیب، جیب معکوس
Visible horizon (Offing)	افق مرئی
Angle and sides of a triangle	مثلث کے زاویے اور اضلاع
a, b, c,	اَ، بَ، جَ
A. B. C.	ا، ب، ج
II	(حیث)